数理解析研究所講究録
第 1795 巻 2012 年 189-203

A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals

Masao ISHIKAWA* and Jiang ZENG†

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A30
Secondary 05A15, 15A15, 33D45.

Keywords : Hankel determinants, Pfaffian decomposition, Pfaffian of Catalan numbers, moments of orthogonal polynomials.

概要

ここでは, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arxiv:1011.5941` の中で証明した q-Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q-Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える.

1 Introduction

この記事では, [15] の中で証明した q-Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q-Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える.

*Department of Mathematics, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 901-0213, Japan, `ishikawa@edu.u-ryukyu.ac.jp`
†Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France, `zeng@math.univ-lyon1.fr`

Selberg の積分公式とは

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\le i<j\le n} |t_i - t_j|^{2\gamma}\, dt$$
$$= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+j\gamma)\,\Gamma(\beta+j\gamma)\,\Gamma(1+(j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-1)\gamma)\,\Gamma(1+\gamma)}. \tag{1.1}$$

と呼ばれるものである. また, 1987 年に青本和彦により発見されていた Selberg 型積分

$$\int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{k} t_i\right) \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\le i<j\le n} |t_i - t_j|^{2\gamma}\, dt$$
$$= S_n(\alpha,\beta,\gamma) \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha+(n-j)\gamma}{\alpha+\beta+(2n-j-1)}. \tag{1.2}$$

も有名である. この記事の中では述べないが, この記事の手法と, 青本和彦にる Selberg 型積分を組み合わせて新しい Hankel 型 Pfaffian の公式を得ることもできる.

この記事では, q-series に関する以下の標準的な記法を使う (see [7, 9]): 任意の整数 n に対して

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \qquad (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

ここで $(a;q)_n$ は q**-shifted factorial** といわれる. また, 以下の省略記法も用いる:

$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_\infty = (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_r;q)_\infty,$$
$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_n = (a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_r;q)_n.$$

q**-超幾何級数** ${}_{r+1}\phi_r$ は

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\dots,a_{r+1} \\ b_1,\dots,b_r \end{matrix}; q, z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,a_2,\dots,a_{r+1};q)_n}{(q,b_1,\dots,b_r;q)_n} z^n.$$

によって定義される.

2 Pfaffian の和公式

行列 $A=(a_{i,j})_{i,j\geq 1}$ (または $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$) が **歪対称** であるとは, $a_{j,i}=-a_{i,j}$ がすべての $i,j\geq 1$ (または $1\leq i,j\leq n$) に対して成り立つことである. n を偶数として, $n\times n$ 歪対称行列 $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ が与えられたとき, A の **パフィアン** ([29, 30])

$$\mathrm{Pf}(A)=\sum \epsilon(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},\sigma_n)\,a_{\sigma_1,\sigma_2}\cdots a_{\sigma_{n-1},\sigma_n}, \tag{2.1}$$

によって, 定義される. ここで左辺の和は, $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ の 2-元集合への分割 $\sigma=\{\{\sigma_1,\sigma_2\},\ldots,\{\sigma_{n-1},\sigma_n\}\}$ を動き, $\epsilon(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},\sigma_n)$ は置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

の符号を表す. $[n]$ の 2-元集合への分割 σ を **perfect matching** または **1-factor** という.

$D=(V,E)$ を cycle を持たない digraph とする. (u,v) が頂点の組のとき, $\mathscr{P}(u,v)$ を u から v に向かう道全体の集合とする. n を正の整数とするとき, **n-頂点** とは D の n 個の頂点の組とする. また $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ と $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ が n-頂点であるとき, $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ への **n-道** とは n 個の道の組 $\boldsymbol{P}=(P_1,\ldots,P_n)$ であって, $i=1,\ldots,n$ に対して $P_i\in\mathscr{P}(u_i,v_i)$ となることである. n-道 $\boldsymbol{P}=(P_1,\ldots,P_n)$ が **交わらない**とは, 任意の異なる $i\neq$ に対して P_i と P_j が共通の頂点を持たないことである. $\mathscr{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ によって $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ への n-道全体の集合を表す, また $\mathscr{P}_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ によって, $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ への交わらない n-道全体がなす $\mathscr{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の部分集合を表す, $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_m)$ と $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ を D の n-頂点の集合とするとき, $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ と **D-整合**であるとは, $i<j$ かつ $k<l$ であるならば, u_i から v_l への道 $P\in\mathscr{P}(u_i,v_l)$ と u_j から v_k への道 $Q\in\mathscr{P}(u_j,v_k)$ が必ず交わることである. 置換 $\pi\in S_n$ に対して, $\boldsymbol{v}^{\pi}$ が n-頂点 $(v_{\pi(1)},\ldots,v_{\pi(n)})$ を意味するとする. Tn-道 $\boldsymbol{P}$ の重み $w(\boldsymbol{P})$ は, 各道の重みの積として定義され, 各道の重みは, それをなす各辺の重みの積として定義される. ここでグラフの各辺には重みが与えられているとする. したがって $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ と $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ が n-頂点のとき, n-道の母関数 $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathrm{GF}\,[\mathscr{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]=\sum_{\boldsymbol{P}\in\mathscr{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}w(\boldsymbol{P})$ と, 交わらない n-道の母関数 $F_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathrm{GF}\,[\mathscr{P}_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]=\sum_{\boldsymbol{P}\in\mathscr{P}_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}w(\boldsymbol{P})$ を定義する

ことができる. 特に (u,v) が任意の頂点の組のとき,

$$h(u,v) = \mathrm{GF}\left[\mathscr{P}(u,v)\right] = \sum_{P\in\mathscr{P}(u,v)} w(P)$$

と書くことにする. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. $2n$-頂点 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{2n})$ が与えられたとき, これらの $2n$ 個の頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ を結ぶ交わらない n-道 $P_1,\ldots, P_n$ 全体の集合を $\mathscr{N}(\boldsymbol{v}) = \mathscr{N}(v_1, v_2, \ldots, v_{2n})$ によって表す. このとき

$$\sum_{\pi\in S_{2n}} \mathrm{GF}\left[\mathscr{N}(\boldsymbol{v}^{\pi})\right] = \mathrm{Pf}\left(h(v_i, v_j)\right)_{1\le i<j\le 2n} \tag{2.3}$$

が成立する.

ここでは, この証明は行わないが, この定理から次のパフィアンの和公式が証明できる. このパフィアンの和公式は, のちに de Bruijn の定理を証明するのに使う.

定理 2.2. ([16, 17]) n と N を $n \le N$ である正整数とし, n を偶数とする. $H = (h_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le N}$ を任意の $n\times N$ 行列とし, $A = (\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{I\subseteq[N]\\ \sharp I=n}} \mathrm{Pf}(A_I)\det(H_I^{[n]}) = \mathrm{Pf}(Q), \tag{2.4}$$

ここで, 歪対称行列 Q は $Q = (Q_{i,j}) = HAH^{\mathrm{T}}$ によって定義され, その (i,j) 成分は

$$Q_{i,j} = \sum_{1\le k<l\le N} \alpha_{k,l}\det(H_{k,l}^{i,j}), \qquad (1\le i,j\le n) \tag{2.5}$$

によって与えられる.

次の命題は, 実際にパフィアンを計算するときに便利なので, ここに引用しておく [16, 17].

命題 2.3. $\{\alpha_k\}_{k\ge 1}$ を任意の数列とし n を正整数とする. $B = (b_{i,j})_{i,j\ge 1}$ を次によって成分が定義される歪対称行列とする.

$$b_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } j = i+1 \text{ for } i \ge 1, \\ -\alpha_j & \text{if } i = j+1 \text{ for } j \ge 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.6}$$

$I=(i_1,\dots,i_{2n})$ を $1\le i_1<\cdots<i_{2n}$ を満たす添字集合とするとき,

$$\mathrm{Pf}\,(B_I)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}\alpha_{i_{2k-1}} & \text{if } i_{2k}=i_{2k-1}+1 \text{ for } k=1,\dots,n,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{2.7}$$

が成り立つ.

3 De Bruijn の公式と Hankel Pfaffians

0 から a までの q-Jackson 積分は

$$\int_0^a f(x)\,d_qx=(1-q)a\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n)q^n.$$

に、よって定義され, この和は $|q|<1$ のとき絶対収束する. μ を閉区間 $[0,a]$ 上の任意の測度とする, すなわち, ある weight function w に対して $d_q\mu(x)=w(x)d_qx$ と書ける. 次の命題が de Bruijn の公式と呼ばれる:

命題 3.1. n を正の整数とし, $1\le i\le 2n$ に対して $\phi_i(x)$ と $\psi_i(x)$ を閉区間 $[0,a]$ 上の連続関数とする. このとき

$$\int\cdots\int_{0\le x_1<\cdots<x_n\le a}\det\left(\phi_i(x_j)|\psi_i(x_j)\right)\,d_q\mu(x_1)\dots d_q\mu(x_n)=\mathrm{Pf}\left(Q_{i,j}\right)_{1\le i,j\le 2n},\tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで

$$Q_{i,j}=\int_0^a\left\{\phi_i(x)\psi_j(x)-\phi_j(x)\psi_i(x)\right\}\,d_q\mu(x)\tag{3.2}$$

であり, $(\phi_i(x_j)|\psi_i(x_j))$ は第 i 行 $(1\le i\le 2n)$ が

$$(\phi_i(x_1),\psi_i(x_1),\dots,\phi_i(x_n),\psi_i(x_n))$$

で与えられる $2n\times 2n$ 行列である.

証明. n と N を $n\le N$ を満たす正整数とし, $H=(h_{i,j})_{1\le i\le 2n,1\le j\le 2N}$ を任意の $2n\times 2N$ 行列とする. $2N\times 2N$ 歪対称行列 $A=(\alpha_{i,j})_{1\le i<j\le 2N}$ を

$$\alpha_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{if } i \text{ is odd and } j=i+1,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

によって定義する．このとき，直接計算によって $Q=(Q_{i,j})=HAH^{\mathrm{T}}$ の各成分は

$$Q_{i,j}=\sum_{1\le k<l\le 2N}\alpha_{k,l}\begin{vmatrix}h_{i,k} & h_{i,l}\\ h_{j,k} & h_{j,l}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\begin{vmatrix}h_{i,2k-1} & h_{i,2k}\\ h_{j,2k-1} & h_{j,2k}\end{vmatrix},$$

となることがわかる．また $[2N]$ の任意の n-元部分集合 I に対して，命題 2.3 から，明らかに

$$\mathrm{Pf}\,(A_I)=\begin{cases}1 & \text{if } I=\{2k_1-1,2k_1,\dots,2k_n-1,2k_n\},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

となる．定理 2.2 を適用した後に $N\to\infty$ とすると，

$$\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n}\det H_{2k_1-1,2k_1,\dots,2k_n-1,2k_n}=\mathrm{Pf}(Q_{i,j})_{1\le i<j\le 2n} \tag{3.3}$$

が得られる．ここで

$$Q_{i,j}=\sum_{k=1}^{\infty}\begin{vmatrix}h_{i,2k-1} & h_{i,2k}\\ h_{j,2k-1} & h_{j,2k}\end{vmatrix}$$

である．(3.3) 式において $h_{i,2k-1}=(1-q)a\phi_i(aq^{k-1})w(aq^{k-1})q^{k-1}$ かつ $h_{i,2k}=\psi_i(aq^{k-1})$ とおくと

$$\begin{aligned}(1-q)^n a^n\sum_{0\le k_1<k_2<\cdots<k_n}\det\left(\phi_i(q^{k_j})|\psi_i(q^{k_j})\right)\prod_{\nu=1}^{n}w(q^{k_\nu})q^{k_\nu}\\ =\mathrm{Pf}(Q'_{ij})_{1\le i<j\le 2n},\end{aligned} \tag{3.4}$$

が得られる．ここで

$$Q'_{i,j}=(1-q)a\sum_{k=0}^{\infty}\begin{vmatrix}\phi_i(aq^k) & \psi_i(aq^k)\\ \phi_j(aq^k) & \psi_j(aq^k)\end{vmatrix}w(aq^k)q^k \tag{3.5}$$

これで望む式が証明された． □

系 3.2. $d_q\mu(x)=w(x)d_qx$ を区間 $[0,a]$ 上の測度とし，$\mu_i=\int_0^a x^i d_q\mu(x)$ を，この測度の第 i モーメントとする．このとき

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\Big((q^{i-1}-q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i<j\le 2n}\\ &=\frac{1}{n!}q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n\int_0^a\cdots\int_0^a\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2\prod_{i<j}(qx_i-x_j)(x_i-qx_j)\\ &\qquad d_q\mu(x_1)\dots d_q\mu(x_n).\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立つ．

証明. (3.2) 式において $\varphi_i(x) = q^{i-1}x^{i-1}$ かつ $\psi_i(x) = x^{i+r-1}$ とおくと,

$$Q_{i,j} = (q^{i-1} - q^{j-1}) \int_0^1 x^{i+j+r-2} d_q\mu = (q^{i-1} - q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}.$$

を得る. 一方, (3.1) 式に同様の代入を行うと

$$\begin{aligned}&\det\left(\phi_i(x_j)|\psi_i(x_j)\right)_{1\le i\le 2n,\,1\le j\le n} = \det\left(q^{i-1}x_j^{i-1}|x_j^{i-1}\right)_{1\le i\le 2n,\,1\le j\le n}\\ &= q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n(x_1\dots x_n)^{r+1}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2\prod_{i<j}(qx_i - x_j)(x_i - qx_j)\end{aligned}$$

を得る. ここで, 最後の等号を示すにはヴァンデルモンド行列式$\det(a_j^{i-1}) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$ を使う. したがって

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\Big((q^{i-1} - q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i<j\le 2n}\\ &= q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n \int\dots\int_{0\le x_1<\dots<x_n\le a}\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2\\ &\qquad\times\prod_{i<j}(qx_i - x_j)(x_i - qx_j)\, d_q\mu(x_1)\dots d_q\mu(x_n).\end{aligned}$$

が証明された. 示したい式は, この式の簡単な帰結である. □

系 3.3. $d\psi(x) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[a,b]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_a^b x^i\, d\psi(x)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\Big((j-i)\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i<j\le 2n}\\ &= \frac{1}{n!}\int_a^b\dots\int_a^b\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^4\, d\psi(x_1)\dots d\psi(x_n).\end{aligned}\tag{3.7}$$

が成り立つ.

4 Selberg-Askey 積分公式

4.1 Little q-Jacobi 多項式

Little q-Jacobi 多項式 [9, 22] は

$$p_n(x;a,b;q) = \frac{(aq;q)_n}{(abq^{n+1};q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{-n}, abq^{n+1}\\ aq\end{matrix};q,xq\right]\tag{4.1}$$

によって定義され,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,d_q\mu(x) = \frac{(aq;q)_\infty}{(abq^2;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(bq;q)_k}{(q;q)_k}(aq)^k f\left(q^k\right)g\left(q^k\right)$$

$$= \frac{(aq;q)_\infty(bq;q)_\infty}{(abq^2;q)_\infty(q;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{k+1};q)_\infty}{(bq^{k+1};q)_\infty}(q^{\alpha+1})^k f\left(q^k\right)g\left(q^k\right), \quad (4.2)$$

によって定義される内積に関して, 直行多項式である. ここで $a=q^\alpha$ とする. よって測度は,

$$w(x) = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{(aq,bq;q)_\infty}{(abq^2,q;q)_\infty}\cdot\frac{(qx;q)_\infty}{(bqx;q)_\infty}x^{\alpha+1},$$

によって定義される重み関数によって与えられる. q-二項定理により, little q-Jacobi 多項式の第 n モーメントは

$$\mu_n = \int_0^1 x^n\,d_q\mu(x) = \frac{(aq;q)_n}{(abq^2;q)_n} \quad (n=0,1,2,\dots) \qquad (4.3)$$

となる. q-ガンマ関数は

$$\Gamma_q(a) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^a;q)_\infty}(1-q)^{1-a}$$

によって定義される $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 上の関数である.

$$A_n(x,y;q) = \prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_q(x+(j-1)k)\Gamma_q(y+(j-1)k)\Gamma_q(jk+1)}{\Gamma_q(x+y+(n+j-2)k)\Gamma_q(k+1)} \qquad (4.4)$$

とおくとき, Askey [2] は, 次のような Selberg 積分公式の q-アナログを予想し [2, Conjecture 1], Habsieger [12] と Kadell [19, Theorem 2;$l=m=0$] によって, 独立に証明された,

現在では, この式は Askey-Habsieger-Kadell の公式として知られる.

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i<j}t_i^{2k}\left(q^{1-k}t_j/t_i;q\right)_{2k}\prod_{i=1}^{n}t_i^{x-1}\frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty}d_q\boldsymbol{t}$$

$$= q^{kx\binom{n}{2}+2k^2\binom{n}{3}}A_n(x,y;q). \qquad (4.5)$$

ここで

$$\int_{[0,1]^n} f(\boldsymbol{t})d_q\boldsymbol{t} = (1-q)^n\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} f(q^{m_1},\dots,q^{m_n})q^{m_1+\cdots+m_n}$$

である. ここでは, 詳しく述べないが, この公式を使って, 次の [15, Theorem 3.1] の中の主定理の別証明が得られる. 詳しい証明は [18] で述べる.

定理 4.1. 正整数 n と整数 $r \geq 0$ に対して,

$$\operatorname{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$
$$= a^{n(n-1)}q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r}\prod_{k=1}^{n-1}(bq;q)_{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}}{(abq^2;q)_{2(k+n)+r-3}} \tag{4.6}$$

が成り立つ.

4.2 Motzkin, Delannoy, Schröder & Narayana

$M_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}C_k$ を **Motzkin 数**, $D_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$ を **central Delannoy 数**, を $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}C_k$ the **Schröder 数**という. また $N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ は **Narayana 数**といわれ,

$$N_n(a) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}a^k$$

は, 第 n **Narayana 多項式**と呼ばれ, 一般化された第 *1* 種チェビシェフ多項式 のモーメント列である. ここでは $N_0(a) = 1$ と定義しておく. 各数の母関数は次のようになる.

$$g_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty}M_nz^n = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}, \tag{4.7}$$

$$g_D(z) = \sum_{n=0}^{\infty}D_nz^n = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}}, \tag{4.8}$$

$$g_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}S_nz^n = \frac{1-z-\sqrt{1-6z+z^2}}{2z}, \tag{4.9}$$

また, Narayana 多項式の母関数もまた次のようになることが知られている [29, p. 238]

$$g_N(z) = \sum_{n\geq 0}N_n(a)x^n = \frac{1+(1-a)x-\sqrt{(1-(1+a)x))^2-4ax^2}}{2x}. \tag{4.10}$$

ここで $N_0(a) = 1$ とする. [14] において, 我々は, これらの数列のハンケル行列式や, その q-類似を計算した:

$$\det\left(M_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le n} = 1$$
$$\det\left(D_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le n} = 2^{\binom{n+1}{2}-1}$$
$$\det\left(S_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le n} = 2^{\binom{n}{2}}$$
$$\det\left(N_{i+j-2}(a)\right)_{1\le i,j\le n} = a^{\binom{n}{2}}$$

ここでは [15] の中で予想した次の等式の証明を与える. ただし、この予想の最初の証明は [13] によって与えられ, ここで与えるのは 2 番目の証明になる.

定理 4.2. 正整数 $n \ge 1$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\operatorname{Pf}\left((j-i)M_{i+j-3}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{k=0}^{n-1}(4k+1), \tag{4.11}$$

$$\operatorname{Pf}\left((j-i)D_{i+j-3}\right)_{1\le i,j\le 2n} = 2^{n^2-1}(2n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(4k-1), \tag{4.12}$$

$$\operatorname{Pf}\left((j-i)S_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le 2n} = 2^{n^2}\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1), \tag{4.13}$$

$$\operatorname{Pf}\left((j-i)N_{i+j-2}(a)\right)_{1\le i,j\le 2n} = a^{n^2}\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1). \tag{4.14}$$

$\det\left(\mu_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le n} \ne 0$ $(n \ge 1)$ であるという事実から $\mathbb{R}$ 上の測度でモーメント列が $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$ になるものが存在することが保障される (see [8, Theorem 3.1]). ψ を $\mathbb{R}$ 上の測度で, モーメント列が $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$ であるものとする, すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,d\psi(x) = \mu_n$ である. ここで実際に扱うのは ψ は正値で, あるコンパクトサポート $[a,b]$ をもつものだけである. しかし, 積分区間は $(-\infty,\infty)$ と書いておく. このとき Stieltjes の分布関数 ψ の変換公式は

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{z-x} = \frac{1}{z}g\left(\frac{1}{z}\right)$$

と書かれる. ここで $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n z^n$ である. よって, 分布関数 ψ は $G(z)$ から次の Stieltjes の逆転公式によって得ることができる:

$$\psi(t) - \psi(t_0) = -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to +0}\int_{t_0}^{t}\Im G(x+iy)\,dx,$$

ここで $\Im z$ は z の虚数部分を表す. よって

$$\psi'(t) = \lim_{y\to+0} \frac{G(t-iy) - G(t+iy)}{2\pi i} \tag{4.15}$$

これらの道具を使って上の定理を証明する. (4.15) によって, 計算を行うことによって, モーメント列 $\{M_n\}$, $\{D_n\}$, $\{S_n\}$ に対応する分布関数は, それぞれ次のようになる:

$$\begin{aligned}
\psi_M'(x) &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{(x+1)(3-x)},\\
\psi_D'(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{6x-1-x^2}},\\
\psi_S'(x) &= \frac{1}{2\pi x}\sqrt{6x-1-x^2},\\
\psi_N'(x) &= \frac{1}{2\pi a}\sqrt{4a-(x-1-a)^2},
\end{aligned}$$

ゆえに, (3.7) によって, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pf}\Big((j-i)M_{i+j-3}\Big)_{1\le i,j\le 2n} \qquad (4.16)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n n!}\int_{[-1,\,3]^n} \prod_{i<j}(x_i-x_j)^4 \prod_i \sqrt{(x_i+1)(3-x_i)}\, d\boldsymbol{x},\\
&\mathrm{Pf}\Big((j-i)D_{i+j-3}\Big)_{1\le i,j\le 2n} \qquad (4.17)\\
&= \frac{1}{\pi^n n!}\int_{[3-2\sqrt{2},\,3+2\sqrt{2}]^n} \frac{\prod_{i<j}(x_i-x_j)^4}{\prod_i \sqrt{6x_i-x_i^2-1}}\, d\boldsymbol{x}.\\
&\mathrm{Pf}\Big((j-i)S_{i+j-2}\Big)_{1\le i,j\le 2n} \qquad (4.18)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n n!}\int_{[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]^n} \prod_{i<j}(x_i-x_j)^4 \prod_i \sqrt{6x_i-x_i^2-1}\, d\boldsymbol{x}.\\
&\mathrm{Pf}\Big((j-i)N_{i+j-2}(a)\Big)_{1\le i,j\le 2n} = \frac{1}{(2\pi)^n n!}\int_{[(1-\sqrt{a})^2,\,(1+\sqrt{a})^2]^n} \prod_{i<j}(x_i-x_j)^4\\
&\times \prod_i \sqrt{4a-(x_i-1-a)^2}\, d\boldsymbol{x}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Selberg の積分公式から, 次の公式を得る:

$$\int_{[a,b]^n} \prod_{i<j}(x_i - x_j)^4 \prod_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - a)(b - x_i)}\, d\boldsymbol{x} = (b-a)^{2n^2} S_n\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\int_{[a,b]^n} \frac{\prod_{i<j}(x_i - x_j)^4}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - a)(b - x_i)}}\, d\boldsymbol{x} = (b-a)^{2n(n-1)} S_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right).$$

よって, 次の補題を証明すれば, 定理の証明が終わる.

補題 4.3. 次の等式が成り立つ:

$$\frac{(4\sqrt{a})^{2n^2}}{(2\pi)^n n!} S_n\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = a^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1}(4k+1). \tag{4.20}$$

$$\frac{(4\sqrt{2})^{2n(n-1)}}{\pi^n n!} S_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) = 2^{n^2-1}(2n-1) \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1). \tag{4.21}$$

Proof. Selberg の積分公式によって

$$S_n\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+2j)^2\Gamma(3+2j)}{\Gamma(1+2n+2j)\Gamma(3)}. \tag{4.22}$$

を得る. (4.20) の左辺を L_n とおく. 明らかに $L_1 = a$ であり, $n=1$ のとき, (4.20) 式は成り立つ. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ と $\Gamma(x+n) = (x)_n\Gamma(x)$ を使うと,

$$\begin{aligned}
\frac{S_{n+1}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)}{S_n\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+2n)^2\Gamma(3+2n)}{\Gamma(3+4n)\Gamma(3)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+2n+2j)}{\Gamma(3+2n+2j)} \\
&= \pi\frac{n+1}{2^{6n+2}}\frac{(1/2)_n(1/2+2n)}{(n+1)_n} \\
&= 2^{-(8n+3)}(n+1)(4n+1)\pi
\end{aligned}$$

を得る. よって $L_{n+1}/L_n = a^{2n+1}(4n+1)$ となり, 与式が証明できる.

同様にして

$$S_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+2j)^2\Gamma(3+2j)}{\Gamma(-1+2n+2j)\Gamma(3)} \tag{4.23}$$

が成り立つ. (4.21) 式の左辺を L'_n とおく. このとき $L'_1 = 1$ である. 一方,

$$\frac{S_{n+1}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)}{S_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+2n)^2\Gamma(3+2n)}{\Gamma(1+4n)\Gamma(3)}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(-1+2n+2j)}{\Gamma(1+2n+2j)}$$
$$= \pi\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{6n+2}}\frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n}(4n-1)$$

であるので, $L'_{n+1}/L'_n = 2^{4n-1}(4n-1)(2n+1)\frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n}$ が成り立つ. 最後に

$$2^{4n-1}(4n-1)(2n+1)\frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n} = 2^{2n+1}(4n-1)\frac{2n+1}{2n-1}$$

を示せばよい. すなわち $(n)_n = 2^{2n-2}(2n-1)(1/2)_{n-1}$, であるが, これは $(n-1)!(n)_n = (2)_{2n-2} = (1)_{n-1}(3/2)_{n-1}2^{2n-2} = 2^{2n-2}(n-1)!(2n-1)(1/2)_{n-1}$ を使って証明できる. □

参考文献

[1] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its applications 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] R. Askey, Some basic hypergeometric extenqions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal., t. 11, 1980, p. 203–951.

[3] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, J. Indian Math. Soc., **19** (1955), 133-151.

[4] M. Adler and P. Van Moerbeke, “Toda Versus Pfaff Lattice and Related Polynomials”, *Duke Math. J.*, **112** (2002), 1–58.

[5] M. Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag, (2007).

[6] W. Al-Salam and L. Carlitz, “Some orthogonal q-polynomials”, *Math. Nachr.*, **30** (1965), 47–61.

[7] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, (1999).

[8] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).

[9] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).

[10] I. Gessel and G. Viennot, "Binomial determinants, paths, and hook length formulae", *Adv. Math.* **58** (1985), 300–321.

[11] R. Gosper, "Decision procedure for indefinite hypergeometric summation", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 40–42.

[12] L. Habsieger, Une q-intégrale de Selberg et Askey, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), no. 6, 14751489

[13] M. Ishikawa and C. Koutschan, "Zeilberger's Holonomic Ansatz for Pfaffians", `arxiv:1011.5941`.

[14] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q-analogue of Catalan Hankel determinants", *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19–42.

[15] M. Ishikawa. H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arxiv:1011.5941`.

[16] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Minor summation formula of Pfaffians", *Linear and Multilinear Alg.* **39** (1995), 285-305

[17] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Applications of minor summation formula, III: Plücker relations. lattice paths and Pfaffian identities", *J. Combin. Theory Ser. A.*, **113** (2006), 113–155.

[18] M. Ishikawa and J. Zeng, "q-Selberg integrals and q-Catalan Hankel Pfaffians", in preparation.

[19] K. W. J. Kadell, A proof of Askeys conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 969-986.

[20] D. Knuth, "Overlapping Pfaffians", *Electron. J. Combin.*, **3** (1996), R5.

[21] C. Krattenthaler, "Evaluations of Some Determinants of Matrices Related to the Pascal Triangle", *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **B47g** (2002), 19 pp.

[22] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer-Verlag, (2000).

[23] B. Lindström, "On the vector representations of induced matroids", *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973), 85–90.

[24] J. Luque and J. Thibon, "Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals", *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 5267–5292.

[25] M. Mehta and R. Wang, "Calculation of a Certain Determinant", *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227–232.

[26] M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 223, American Mathematical Society, (2004).

[27] M. Petkovšek, H. Wilf and D. Zeilberger, $A = B$, A K Peters, (1996).

[28] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume I*, Cambridge University Press, second edition, 2011.

[29] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume II*, Cambridge University Press, 1997, 1999.

[30] J. Stembridge, "Nonintersecting Paths, Pfaffians, and Plane Partitions", *Adv. Math.* **83** (1990), 96–131.