数理解析研究所講究録
第 1795 巻 2012 年 59-69

KR クリスタルのテンソル積と Demazure クリスタル

東京大学大学院数理科学研究科　直井 克之 (Katsuyuki Naoi)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

Kirillov-Reshetikhin (KR) クリスタルは重要な有限クリスタルの族であり、そのテンソル積にはエネルギー関数と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 関数が組合せ論的に定義される。このテンソル積を Demazure クリスタルと呼ばれる最高ウェイトクリスタルの部分集合と関連付けることで、エネルギー関数こみのウェイト和をある種の線形作用素 (Demazure 作用素) を用いて表した、というのが [Naoa] の結果である。本稿ではこの結果とその証明に関する概説を行う。また [Naob] では、上の結果を用いて $A_n^{(1)}$、$D_n^{(1)}$ 型の場合に $X=M$ 予想に証明を与えた。この結果についても簡単に触れたいと思う。

1 拡大アファイン Weyl 群とクリスタル

$\mathfrak{g}$ をアファインリー代数とし、$I=\{0,\dots,n\}$ でその添え字集合を表す (添え字づけは [Kac90] に従う)。また $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$ で $I_0 = I\setminus\{0\}$ に対応する単純部分リー代数を表す。P および P_0 でそれぞれ $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_0$ のウェイト格子を表し、標準的に $P_0 \subseteq P$ とみなす。また Λ_i ($i\in I$)、ϖ_i ($i \in I_0$) をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}_0$ の基本ウェイトとし、W、W_0 でそれぞれの Weyl 群を表す。

本節では拡大アファイン Weyl 群の各元 w ごとに、クリスタルの部分集合に新たなクリスタルの部分集合を対応させる写像 $\mathcal{F}_w$ を構成する。そのためにまず拡大アファイン Weyl 群について復習しておく。$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数、$\alpha_0,\dots,\alpha_n$ を単純ルート、$(\ ,\ )$ を $\mathfrak{h}^*$ 上の W 不変双線形形式で $(\alpha_0,\alpha_0)=2$ となるものとし、P_0 から $GL(\mathfrak{h}^*)$ への単射群準同型写像を

$$\lambda \mapsto t_\lambda \colon t_\lambda(\mu) = \mu + \langle \mu, K\rangle\lambda - \big((\mu,\lambda) + \frac{1}{2}(\lambda,\lambda)\langle\mu,K\rangle\big)\delta$$

により定義する (K は $\mathfrak{g}$ の中心元、δ は零ルート)。$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン行列、互いに素な正整数の列 $(a_0,\dots,a_n)$ と $(a_0^\vee,\dots,a_n^\vee)$ をそれぞれ

$$\text{任意の } i\in I \text{ に対し } \sum_{j\in I} a_{ij}a_j = 0, \qquad \text{任意の } j \in I \text{ に対し } \sum_{i\in I} a_i^\vee a_{ij} = 0$$

を満たす唯一つの列とし、$i\in I_0$ に対し $c_i = \max\{1, a_i/a_i^\vee\}$ とおく ($\mathfrak{g}$ が $B_n^{(1)}$、$C_n^{(1)}$、$F_4^{(1)}$、$G_2^{(1)}$ 以外の場合、すべての i に対し $c_i=1$ である)。また P_0 の部分格子 M と $\widetilde{M}$ を

$$M = \sum_{w\in W_0} \mathbb{Z}w(\alpha_0/a_0), \quad \widetilde{M} = \bigoplus_{i\in I_0} \mathbb{Z}c_i\varpi_i$$

により定義する。$T(M)=\{t_\lambda \mid \lambda\in M\}$ とおくとき、$W \cong W_0 \ltimes T(M)$ となる。$T(\widetilde{M}) = \{t_\lambda \mid \lambda \in \widetilde{M}\}$ とおき、$\widetilde{W} = W_0 \ltimes T(\widetilde{M})$ を**拡大アファイン Weyl 群**と呼ぶ。基本チャンバー

$C = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P \mid (\lambda, \alpha_i) \geq 0 \ (i \in I)\}$ を不変にする元からなる $\widetilde{W}$ の部分群を Σ で表す。このとき $\widetilde{W} \cong W \rtimes \Sigma$ が成り立ち、また $\tau \in \Sigma$ に対し $\tau(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$ とすることで Σ は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の自己同型群の部分群と同一視できる。

$\mathfrak{g}$ の量子展開環を $U_q(\mathfrak{g})$、$\mathfrak{g}_0$ の量子展開環を $U_q(\mathfrak{g}_0)$ とし、$U_q(\mathfrak{g})$ から次数作用素を除いた部分代数を $U_q'(\mathfrak{g})$ で表す。また $U_q'(\mathfrak{g})$ のウェイト格子を P_{cl} で表し、$\mathrm{cl}\colon P \to P_{\mathrm{cl}}$ を標準的な射とする。本稿では、$U_q(\mathfrak{g})$ クリスタルと $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルをまとめてクリスタルと呼ぶことにする。クリスタルの定義については [HK02] を参照していただきたい。

B をクリスタルとし、$\tau \in \Sigma$ とする。このとき新たなクリスタル $\widetilde{\tau}(B)$ を、集合としては $\widetilde{\tau}(B) = \{\widetilde{\tau}(b) \mid b \in B\} \cong B$、ウェイト関数と柏原作用素は

$$\mathrm{wt}\big(\tau(b)\big) = \tau\big(\mathrm{wt}(b)\big), \qquad \widetilde{e}_i \widetilde{\tau}(b) = \widetilde{\tau}(\widetilde{e}_{\tau^{-1}(i)} b), \quad \widetilde{f}_i \widetilde{\tau}(b) = \widetilde{\tau}(\widetilde{f}_{\tau^{-1}(i)} b)$$

により定義する。また B の部分集合 S と $w \in W$ に対し w の最短表示 $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ を一つ選び、B の新たな部分集合 $\mathcal{F}_w(S)$ を

$$\mathcal{F}_w(S) = \{\widetilde{f}_{i_k}^{j_k} \cdots \widetilde{f}_{i_1}^{j_1}(b) \mid j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b \in S\} \setminus \{0\}$$

によって定義する。一般には $\mathcal{F}_w$ は w の最短表示の選び方によるが、S が特別な部分集合である場合（例えば Demazure クリスタルの直和である場合。補足 3.2 参照）には $\mathcal{F}_w(S)$ は最短表示の選び方によらない（本稿で登場するのはすべてこのような場合である）。最後に $\widetilde{W}$ の元 $w' = w\tau$ $(w \in W, \tau \in \Sigma)$ に対して、

$$\mathcal{F}_{w'}(S) = \mathcal{F}_w\big(\widetilde{\tau}(S)\big) \subseteq \widetilde{\tau}(B)$$

により $\mathcal{F}_{w'}(S)$ を定義する。

2 KR クリスタル

本節では KR クリスタル及びエネルギー関数の定義と、後に必要な事実について述べる。**Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群** $W^{r,\ell}$ は、I_0 の元 r と正整数 ℓ によってパラメトライズされる重要な既約有限次元 $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群の族であり、様々な良い性質（T-system、Q-system、フェルミ型公式など）を持つことが知られている。その中でも以下の性質が本稿では特に重要である。

定理 2.1 ([OS08]). $\mathfrak{g}$ が非例外型（すなわち $\mathfrak{g}_0$ が古典型）のとき、任意の KR 加群 $W^{r,\ell}$ は結晶基底 $B^{r,\ell}$ を持つ。$B^{r,\ell}$ を **Kirillov-Reshetkihin (KR) クリスタル**と呼ぶ。

補足 2.2. 上の定理はすべての $\mathfrak{g}$ に対し成り立つと期待されているが、例外型に対しては今のところ（一部の r、ℓ を除いて）証明は与えられていない。

以下本稿では $\mathfrak{g}$ を非例外型と仮定する。$B^{r,\ell}$ はウェイトが $\ell\varpi_r$ となる元を唯一つ持つ。以下この元を $u(B^{r,\ell})$ と表す。また KR クリスタルのテンソル積に対しても

$$u(B^{r_1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p,\ell_p}) = u(B^{r_1,\ell_1}) \otimes \cdots \otimes u(B^{r_p,\ell_p})$$

とおく。

以下の KR クリスタルの性質は、Schilling と Tingley によって示された。

命題 2.3 ([ST]). 任意の KR クリスタル $B^{r,\ell}$ と $\tau \in \Sigma$ に対し、$U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルとしての同型 $\rho_\tau \colon \widetilde{\tau}(B^{r,\ell}) \xrightarrow{\sim} B^{r,\ell}$ が一意に存在する。

この命題により、$\tau \in \Sigma$ に対し $B^{r,\ell}$ 上の作用素 $\tau : B^{r,\ell} \to B^{r,\ell}$ を

$$\tau(b) = \rho_\tau\bigl(\widetilde{\tau}(b)\bigr)$$

と定めることで Σ の $B^{r,\ell}$ への作用を定義できる。この作用は

$$\tau \circ \widetilde{e}_i = \widetilde{e}_{\tau(i)} \circ \tau, \quad \tau \circ \widetilde{f}_i = \widetilde{f}_{\tau(i)} \circ \tau$$

を満たす。

$U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルには完全性という概念が定義されており、本稿の主定理（定理 4.1）は完全な KR クリスタルに対して定式化されるものである。そこでここで完全クリスタルについて復習しておく。$U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタル B に対し $\varepsilon, \varphi \colon B \to P_{\mathrm{cl}}$ をそれぞれ

$$\varepsilon(b) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i(b)\Lambda_i, \quad \varphi(b) = \sum_{i \in I} \varphi_i(b)\Lambda_i$$

と定義する。このとき $\mathrm{wt}(b) = \varphi(b) - \varepsilon(b)$ が成り立つ。また $\mathrm{wt}(B) \subseteq P_{\mathrm{cl}}^0 := \{\lambda \in P_{\mathrm{cl}} \mid \langle \lambda, K \rangle = 0\}$ となるとき B のレベル $\mathrm{lev}(B)$ を

$$\mathrm{lev}(B) = \min_{b \in B} \langle \varphi(b), K \rangle = \min_{b \in B} \langle \varepsilon(b), K \rangle$$

で定義し、また B の部分集合 $B_{\min}$ を

$$\begin{aligned} B_{\min} &= \{b \in B \mid \langle \varphi(b), K \rangle = \mathrm{lev}(B)\} \\ &= \{b \in B \mid \langle \varepsilon(b), K \rangle = \mathrm{lev}(B)\} \end{aligned}$$

により定義する。

定義 2.4 ([KKM+92]). 正整数 ℓ に対し $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタル B が以下の条件を満たすとき、B はレベル ℓ の**完全クリスタル**であるという。

(i) B はある有限次元 $U_q'(\mathfrak{g})$-加群の結晶基底に同型である。
(ii) $B \otimes B$ は連結である。
(iii) ある $\lambda \in P_{\mathrm{cl}}^0$ が存在して $\mathrm{wt}(B) \subseteq \lambda - \sum_{i \in I_0} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ を満たし、またウェイトが λ となるような B の元がただ一つ存在する。
(iv) B のレベルは ℓ である。
(v) 二つの写像 ε と φ がともに $B_{\min}$ から $(P_{\mathrm{cl}}^+)^\ell := \{\lambda \in P_{\mathrm{cl}} \mid \langle \lambda, K \rangle = \ell,\ \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0\ (\forall i \in I)\}$ への全単射を誘導する。

P^+ を $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトの集合とする。このとき任意の $\Lambda \in P^+$ に対し、$U_q(\mathfrak{g})$ の既約最高ウェイト加群 $V(\Lambda)$ は結晶基底を持つ。これを $B(\Lambda)$ と表し、その最高ウェイト元を u_Λ で表す。また $\lambda = \mathrm{cl}(\Lambda)$ とおくとき、$B(\lambda)$ で $B(\Lambda)$ を $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルとみなしたものを表す。このとき完全クリスタルに対して以下の定理が成り立つ。

定理 2.5 ([KKM+92]). B を完全クリスタルとし $b \in B_{\min}$ とする。このとき $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルとして

$$B\bigl(\varepsilon(b)\bigr) \otimes B \xrightarrow{\sim} B\bigl(\varphi(b)\bigr)$$

が成り立ち、またこの同型は $u_{\varepsilon(b)} \otimes b$ を $u_{\varphi(b)}$ へうつす。

KR クリスタルがいつ完全となるかは、以下の定理によって与えられる。

定理 2.6 ([FOS10]). $B^{r,\ell}$ は $\ell/c_r \in \mathbb{Z}$ となる場合のみ完全であり、そのレベルは ℓ/c_r である（c_r は 1 節で定義された)。

続いてエネルギー関数の定義について述べる。エネルギー関数の定義は少々煩雑ではあるが、本稿の主定理に直接関わる対象であるため詳細な定義を与えておく。B_1、B_2 をそれぞれ KR クリスタルのテンソル積とするとき、普遍的 R 行列の存在から以下が示される。

定理 2.7. (i) $U'_q(\mathfrak{g})$ クリスタルの同型 $\sigma\colon B_1 \otimes B_2 \to B_2 \otimes B_1$ が存在する。
(ii) $b_1 \in B_1$、$b_2 \in B_2$ に対し $\sigma(b_1 \otimes b_2) = \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1$ とおくとき

$$
\begin{aligned}
&H\big(\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2)\big)\\
&= \begin{cases} H(b_1 \otimes b_2) + 1 & i = 0,\ \tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = \tilde{e}_0 b_1 \otimes b_2,\ \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{e}_0 \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) - 1 & i = 0,\ \tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = b_1 \otimes \tilde{e}_0 b_2,\ \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{b}_2 \otimes \tilde{e}_0 \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) & \text{それ以外} \end{cases}
\end{aligned}
$$

を満たし、また $H\big(u(B_1 \otimes B_2)\big) = 0$ となる関数 $H\colon B_1 \otimes B_2 \to \mathbb{Z}$ が唯一つ存在する。

KR クリスタルのテンソル積 B に対し、**エネルギー関数** $D : B \to \mathbb{Z}$ は H を用いて以下のように定義される。
(i) $B = B^{r,\ell}$ のとき

$$D(b) = H\big(m'(B) \otimes b\big) - H\big(m'(B) \otimes u(B)\big)$$

と定める。ここで $m'(B)$ は $\varphi\big(m'(B)\big) = \mathrm{lev}(B)\Lambda_0$ となる唯一の元である（$B^{r,\ell}$ が完全でない場合にも、このような元が唯一つ存在することが知られている)。
(ii) $B = B^{r_p,\ell_p} \otimes \cdots \otimes B^{r_1,\ell_1}$ のとき、$b = b_p \otimes \cdots \otimes b_1 \in B$ と $1 \le i \le j \le p$ に対し $b_i^{(j)}$ を

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
B^{r_j,\ell_j} & \otimes \cdots \otimes & B^{r_{i+1},\ell_{i+1}} & \otimes & B^{r_i,\ell_i} & \xrightarrow{\sim} & B^{r_i,\ell_i} & \otimes & B^{r_j,\ell_j} & \otimes \cdots \otimes & B^{r_{i+1},\ell_{i+1}} \\
b_j & \otimes \cdots \otimes & b_{i+1} & \otimes & b_i & \xrightarrow{\sim} & b_i^{(j)} & \otimes & \tilde{b}_j & \otimes \cdots \otimes & \tilde{b}_{i+1}
\end{array} \tag{2.1}
$$

により定め、

$$D(b) = \sum_{1 \le i \le p} D(b_i^{(p)}) + \sum_{1 \le i < j \le p} H(b_j \otimes b_i^{(j-1)})$$

と定義する。このとき定義から以下が示せる。

補題 2.8. KR クリスタルのテンソル積 $B = B^{r_p,\ell_p} \otimes \cdots \otimes B^{r_1,\ell_1}$ に対し、$\ell = \max\{\mathrm{lev}(B^{r_i,\ell_i}) \mid 1 \le i \le p\}$ とおく。このとき $b \in B$ が $\varepsilon_0(b) > \ell$ であるならば、

$$D\big(\tilde{e}_0(b)\big) = D(b) - 1$$

が従う。

3 Demazure クリスタル

本節では Demazure クリスタルの定義及び、後に必要な事実について述べる。

定義 3.1 ([Kas93]). $\Lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対し、$B(\Lambda)$ の部分集合

$$B_w(\Lambda) = \mathcal{F}_w(u_\Lambda)$$

を **Demazure クリスタル**と呼ぶ。

補足 3.2. $B_w(\Lambda)$ は $\mathcal{F}_w$ の定義における w の最短表示の選び方によらないことが知られている [Kas93]。この事実を用いることで、より一般に $\mathcal{F}_w B_{w'}(\Lambda)$ は w の最短表示の選び方によらないことも示すことができる。

以下の定理は組合せ論的エクセレントフィルトレーション定理と呼ばれる。

定理 3.3 ([LLM02], [Jos03]). 任意の Λ、$\Lambda' \in P^+$ と $w \in W$ に対し、

$$u_\Lambda \otimes B_w(\Lambda') \subseteq B(\Lambda) \otimes B(\Lambda')$$

は Demazure クリスタルの直和となる。

各 $i \in I$ に対し、P の群環 $\mathbb{Z}[P]$ 上の作用素 D_i を

$$D_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i} \cdot s_i(f)}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

と定義し、これを **Demazure 作用素**と呼ぶ。ただし s_i は $\mathbb{Z}[P]$ に $e^\lambda \mapsto e^{s_i(\lambda)}$ で作用する。W の元 w に対し $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ を最短表示とするとき、

$$D_w = D_{i_k} \cdots D_{i_1}$$

は最短表示の選び方によらないことが知られており [Kum02]、また Demazure クリスタルのウェイト和は Demazure 作用素を用いて以下のように求めることができる。

定理 3.4 ([Kas93]). 任意の Demazure クリスタル $B_w(\Lambda)$ に対し、

$$\sum_{b \in B_w(\Lambda)} e^{\mathrm{wt}(b)} = D_w(e^\Lambda)$$

が従う。

後のために D_w を $w \in \widetilde{W}$ にまで拡張しておく。$\tau \in \Sigma$ の $\mathbb{Z}[P]$ への作用を $e^\lambda \mapsto e^{\tau(\lambda)}$ と定め、$w \in \widetilde{W}$ が $w = w'\tau$ ($w' \in W, \tau \in \Sigma$) と表されるとき $D_w = D_{w'}\tau$ とおく。このとき定理 3.4 から以下が示せる。

命題 3.5. 任意の $w \in \widetilde{W}$ と Demazure クリスタル $B_{w'}(\Lambda)$ に対し $\mathcal{F}_w B_{w'}(\Lambda)$ はやはり Demazure クリスタルとなり、

$$\sum_{b \in \mathcal{F}_w B_{w'}(\Lambda)} e^{\mathrm{wt}(b)} = D_w \left(\sum_{b \in B_{w'}(\Lambda)} e^{\mathrm{wt}(b)} \right)$$

が従う。

W_0 の最長元を w_0 とする。また $r \in I_0$ に対し $w^r \in W$、$\tau^r \in \Sigma$ を $t_{c_r w_0(\varpi_r)} = w^r \tau^r$ となる元として定義する。このとき完全 KR クリスタル $B = B^{r,c_r\ell}$ に対し $m(B) \in B$ を $\varepsilon(m(B)) = \ell\Lambda_0$ となる唯一の元とすると、$\varphi(m(B)) = \ell\Lambda_{\tau^r(0)}$ となることが知られている。このことと定理 2.5 から、$U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルとしての同型

$$B(\ell\Lambda_0) \otimes B \xrightarrow{\sim} B(\ell\Lambda_{\tau^r(0)})$$

が得られる。このとき完全 KR クリスタルと Demazure クリスタルは、以下の定理により関係づけられる。

定理 3.6 ([ST]). 上の同型において、$u_{\ell\Lambda_0} \otimes B$ の像は Demazure クリスタル $B_{w^r}(\ell\Lambda_{\tau^r(0)})$ に一致する。

4 主定理

以下が [Naoa] の主定理である。

定理 4.1. p 個の完全 KR クリスタル $B_j = B^{r_j,c_{r_j}\ell_j}$ の列 $B_1,\ldots,B_p$ が $\ell_1 \leq \cdots \leq \ell_p$ を満たすと仮定する。このとき $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタルの充満部分グラフとしての同型

$$\begin{aligned}\Psi\colon & u_{\ell_p\Lambda_0} \otimes B_p \otimes \cdots \otimes B_1 \\ & \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_p} w_0(\varpi_{r_p})}}\Big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_2} w_0(\varpi_{r_2})}}\Big(u_{(\ell_2-\ell_1)\Lambda_0} \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_1} w_0(\varpi_{r_1})}}(u_{\ell_1\Lambda_0})\Big)\cdots\Big)\end{aligned}$$

で、各 $b \in B_p \otimes \cdots \otimes B_1$ に対し

$$D(b) = -\langle \mathrm{wt}\,\Psi(u_{\ell_p\Lambda_0} \otimes b), d\rangle + C \tag{4.1}$$

となるものが存在する。ただし $d \in \mathfrak{h}$ は次数作用素、C はある定数とする。

定理 3.3 と命題 3.5 より、定理 4.1 の右辺は Demazure クリスタルの直和となる。このことと命題 3.5 から帰納的に、右辺のウェイト和は

$$D_{t_{c_{r_p} w_0(\varpi_{r_p})}}\Big(e^{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\cdots D_{t_{c_{r_2} w_0(\varpi_{r_2})}}\Big(e^{(\ell_2-\ell_1)\Lambda_0}\cdot D_{t_{c_{r_1} w_0(\varpi_{r_1})}}(e^{\ell_1\Lambda_0})\Big)\cdots\Big)$$

と表される。よって系として以下が示せる。

系 4.2. $B = B_p \otimes \cdots \otimes B_1$ とおくとき、エネルギー関数こみの B のウェイト和は Demazure 作用素を用いて

$$\begin{aligned}&\sum_{b\in B} q^{D(b)} e^{\mathrm{wt}(b)} \\ &\quad = q^C e^{-\ell_p\Lambda_0} D_{t_{c_{r_p} w_0(\varpi_{r_p})}}\Big(e^{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\cdots D_{t_{c_{r_2} w_0(\varpi_{r_2})}}(e^{(\ell_2-\ell_1)\Lambda_0}\cdot D_{t_{c_{r_1} w_0(\varpi_{r_1})}}(e^{\ell_1\Lambda_0}))\cdots\Big)\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし $\mathrm{wt}(b) \in P_{\mathrm{cl}}$ は標準的な埋め込みにより P の元とみなし、$q = e^{-\delta}$ とおいた。

5　主定理の証明

本節では定理 4.1 の証明の概略を述べる。まず充満部分グラフの同型 Ψ を帰納的に構成する。$p=1$ のときは、定理 3.6 により同型

$$u_{\ell_1\Lambda_0}\otimes B_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_1}w_0(\varpi_{r_1})}}(u_{\ell_1\Lambda_0}) = B_{w^{r_1}}(\ell_1\Lambda_{\tau^{r_1}(0)})$$

が得られる。よって同型

$$\begin{aligned}\Psi' \colon & u_{\ell_{p-1}\Lambda_0}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1\\ & \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_{p-1}}w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}\Big(u_{(\ell_{p-1}-\ell_{p-2})\Lambda_0}\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_2}w_0(\varpi_{r_2})}}\Big(u_{(\ell_2-\ell_1)\Lambda_0}\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_1}w_0(\varpi_{r_1})}}(u_{\ell_1\Lambda_0})\Big)\cdots\Big)\end{aligned}$$

が与えられているという仮定の下で、Ψ を構成すればよい。まず定理 3.6 より

$$u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes B_p\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{w^{r_p}}(u_{\ell_p\Lambda_{\tau^{r_p}(0)}})\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1$$

が従う。またテンソル積の定義から

$$\mathcal{F}_{w^{r_p}}(u_{\ell_p\Lambda_{\tau^{r_p}(0)}})\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1 = \mathcal{F}_{w^{r_p}}(u_{\ell_p\Lambda_{\tau^{r_p}(0)}}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1)$$

が示せる。このとき命題 2.3 より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{w^{r_p}}(u_{\ell_p\Lambda_{\tau^{r_p}(0)}}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{w^{r_p}}\big(u_{\ell_p\Lambda_{\tau^{r_p}(0)}}\otimes\widetilde{\tau}^{r_p}(B_{p-1})\otimes\cdots\otimes\widetilde{\tau}^{r_p}(B_1)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{w^{r_p}}\circ\widetilde{\tau}^{r_p}(u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_p}w_0(\varpi_{r_p})}}\big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\otimes(u_{\ell_{p-1}\Lambda_0}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1)\big)\end{aligned}$$

となる。最後に内側の ( ) に Ψ' を施すことで

$$\begin{aligned}\Psi \colon & u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes B_p\otimes\cdots\otimes B_1\\ & \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_p}w_0(\varpi_{r_p})}}\Big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_2}w_0(\varpi_{r_2})}}\Big(u_{(\ell_2-\ell_1)\Lambda_0}\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_1}w_0(\varpi_{r_1})}}(u_{\ell_1\Lambda_0})\Big)\cdots\Big)\end{aligned}$$

が構成できる。上の構成を図式で表すと、

$$\begin{tikzcd}
u_{\ell_{p-1}\Lambda_0}\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1 \arrow[r, "\cong", "\Psi'"'] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] & \mathcal{F}_{t_{c_{p-1}w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}(u_{(\ell_{p-1}-\ell_{p-2})\Lambda_0}\otimes\cdots) \arrow[d, "\cong"', "\psi"] \\
u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes m(B_p)\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1 \arrow[d, hook] & \widetilde{\tau}^{r_p}\big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_{p-1}}w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}(\cdots)\big) \arrow[d, hook] \\
u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes B_p\otimes B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1 \arrow[r, "\cong", "\Psi"'] & \mathcal{F}_{t_{c_{r_p}w_0(\varpi_{r_p})}}\big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\otimes\mathcal{F}_{t_{c_{r_{p-1}}w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}(\cdots)\big)
\end{tikzcd}$$

となる。ただし φ は $b\in B_{p-1}\otimes\cdots\otimes B_1$ に対し

$$\varphi(u_{\ell_{p-1}\Lambda_0}\otimes b) = u_{\ell_p\Lambda_0}\otimes m(B_p)\otimes\tau^{r_p}(b)\text{、}$$

ψ は $b\in\mathcal{F}_{t_{c_{p-1}w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}(u_{(\ell_{p-1}-\ell_{p-2})\Lambda_0}\otimes\cdots)$ に対し

$$\psi(b) = \widetilde{\tau}^{r_p}\big(u_{(\ell_p-\ell_{p-1})\Lambda_0}\otimes b\big)$$

と定義された集合としての同型を表す。

上で構成された Ψ が、任意の $b \in B_p \otimes \cdots \otimes B_1$ に対し (4.1) を満たすことを示せば証明が完了する。ある $i \in I_0$ に対し $\widetilde{e}_i(b) \neq 0$ であるとき、(4.1) の両辺は b を $\widetilde{e}_i(b)$ に取り替えても変わらない。また $\varepsilon_0(b) > \ell_p$ ならば、補題 2.8 から $D(b) = D(\widetilde{e}_0 b) + 1$ が従う。同時に Ψ がクリスタルの同型であることから、

$$
\begin{aligned}
-\langle \mathrm{wt}\,\Psi(u_{\ell\Lambda_0} \otimes b), d\rangle &= -\langle \mathrm{wt}\,\widetilde{e}_0 \Psi(u_{\ell_p\Lambda_0} \otimes b), d\rangle + 1 \\
&= -\langle \mathrm{wt}\,\Psi\big(u_{\ell_p\Lambda_0} \otimes \widetilde{e}_0(b)\big), d\rangle + 1
\end{aligned}
$$

も従う。よって $\varepsilon(b) = \ell_p\Lambda_0$ となる $b \in B_p \otimes \cdots \otimes B_1$ に対して (4.1) を示せば十分である。特に $p = 1$ のときには、$\{b \in B_1 \mid \varepsilon(b) = \ell_1\Lambda_0\} = \{m(B_1)\}$ であるから定理が従う。以下 $p > 1$ とし、$p - 1$ に対して (4.1) を仮定する。KR クリスタルのテンソル積 B と正整数 ℓ に対し

$$
\mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell}(B) = \{b \in B \mid \varepsilon_0(b) \leq \ell,\ \varepsilon_i(b) = 0\ (i \in I_0)\}
$$

と表し、$B^{p-1} = B_{p-1} \otimes \cdots \otimes B_1$、$\tau = \tau^{r_p}$ とおく。このとき $\varphi\big(m(B_p)\big) = \ell_p\Lambda_{\tau(0)}$ であることから

$$
\{b \in B_p \otimes B^{p-1} \mid \varepsilon(b) = \ell_p\Lambda_0\} = m(B_p) \otimes \tau\big(\mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_p}(B^{p-1})\big)
$$

となる。また $b' \in \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_p}$ を任意の元とすると、上で述べた Ψ の構成法と帰納法の仮定からある定数 C' が存在して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{wt}\,\Psi\big(u_{\ell_p\Lambda_0} \otimes m(B_p) \otimes \tau(b')\big) &= \tau\Big(\mathrm{aff} \circ \mathrm{wt}(b') + \ell_p\Lambda_0 - \big(D(b') - C'\big)\delta\Big) \\
&= \mathrm{aff} \circ \mathrm{wt}\big(\tau(b')\big) + \ell_p\Lambda_{\tau(0)} - \big(D(b') - (\mathrm{wt}(b'), \varpi_{\tau^{-1}(0)}) - C'\big)\delta \\
&= \mathrm{aff} \circ \mathrm{wt}\big(\tau(b')\big) + \ell_p\Lambda_{\tau(0)} - \big(D(b') - \langle \mathrm{wt}(b'), \varpi^\vee_{\tau^{-1}(0)}\rangle - C'\big)\delta
\end{aligned}
$$

となる（$\varpi^\vee_{\tau^{-1}(0)}$ は基本余ウェイト）。よって定理 4.1 を示すには以下の命題を示せば十分である。

命題 5.1. ある定数 C が存在して、任意の $b' = \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_p}(B^{p-1})$ に対し

$$
D\big(m(B_p) \otimes \tau(b')\big) = D(b') - \langle \mathrm{wt}(b'), \varpi^\vee_{\tau^{-1}(0)}\rangle + C
$$

が従う。

この命題の証明には以下の 3 つの補題が必要である（証明は [Naoa] を参照)。

補題 5.2. B_1、B_2 をそれぞれ KR クリスタルのテンソル積とし、$b_1 \in B_1$、$b_2 \in B_2$ に対し $\sigma(b_1 \otimes b_2) = \widetilde{b}_2 \otimes \widetilde{b}_1$ とおく。このとき任意の $\tau \in \Sigma$ に対し

$$
H\big(b_1 \otimes b_2\big) - H\big(\tau(b_1 \otimes b_2)\big) = \langle \mathrm{wt}(b_2) - \mathrm{wt}(\tilde{b}_2), \varpi^\vee_{\tau^{-1}(0)}\rangle
$$

が成り立つ。

補題 5.3. 二つの完全 KR クリスタル $B_j = B^{r_j, c_{r_j}\ell_j}$ $(j = 1, 2)$ が $\ell_1 \geq \ell_2$ であるとき、任意の $b_2 \in \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_1}(B_2)$ に対しある $b_1 \in B_1$ が存在して

$$
\sigma\big(m(B_1) \otimes \tau^{r_1}(b_2)\big) = b_2 \otimes b_1
$$

となる。

補題 5.4. 二つの完全 KR クリスタル $B_j = B^{r_j, c_{r_j}\ell_j}$ $(j=1,2)$ が $\ell_1 \geq \ell_2$ であるとき、ある定数 C が存在して任意の $b_2 \in \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_1}(B_2)$ に対し

$$H\big(m(B_1) \otimes \tau^{r_1}(b_2)\big) = -\langle \mathrm{wt}(b_2), \varpi^{\vee}_{(\tau^{r_1})^{-1}(0)}\rangle + C$$

となる。

命題 5.1 の証明) $b' = b_{p-1} \otimes \cdots \otimes b_1$ とおき、$1 \leq i \leq j \leq p-1$ に対し $b_i^{(j)}$ を (2.1) と同様にして定義する。$\tau = \tau^{r_p}$ とおくとき、τ の作用と σ が可換であることは容易に確かめられる。よって、$\tau(b_j) \otimes \cdots \otimes \tau(b_{i+1}) \otimes \tau(b_i)$ の

$$B_j \otimes \cdots \otimes B_{i+1} \otimes B_i \xrightarrow{\sim} B_i \otimes B_j \otimes \cdots \otimes B_{i+1}$$

による像の左端のテンソル成分は $\tau(b_i^{(j)})$ となる。また $b' \in \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_p}(B^{p-1})$ であるから $b_j^{(p-1)} \in \mathrm{hw}_{I_0}^{\leq \ell_p}(B_j)$ が成り立つ。よって補題 5.3 により、ある $b_p^j \in B_p$ が存在して

$$\sigma\big(m(B_p) \otimes \tau(b_j^{(p-1)})\big) = b_j^{(p-1)} \otimes b_p^j$$

となる。以上よりエネルギー関数は

$$\begin{aligned} D\big(m(B_p) \otimes \tau(b')\big) = D\big(m(B_p)\big) &+ \sum_{1\leq j\leq p-1} D(b_j^{(p-1)}) + \sum_{1\leq j\leq p-1} H\big(m(B_p) \otimes \tau(b_j^{(p-1)})\big) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq p-1} H\big(\tau(b_j) \otimes \tau(b_i^{(j-1)})\big) \end{aligned} \tag{5.1}$$

となる。補題 5.4 により、各 $1 \leq j \leq p-1$ に対して $b_j^{(p-1)}$ に依存しない定数 C_j が存在して

$$H\big(m(B_p) \otimes \tau(b_j^{(p-1)})\big) = -\langle \mathrm{wt}(b_j^{(p-1)}), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle + C_j$$

となる。 また各 $1 \leq i < j \leq p$ に対し補題 5.2 から

$$H\big(\tau(b_j) \otimes \tau(b_i^{(j-1)})\big) = H\big(b_j \otimes b_i^{(j-1)}\big) - \langle \mathrm{wt}(b_i^{(j-1)}) - \mathrm{wt}(b_i^{(j)}), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle$$

が成り立つ。以上よりある定数 C が存在して

$$\begin{aligned} (5.1) &= \sum_{1\leq j\leq p-1} D(b_j^{(p-1)}) + \sum_{1\leq i<j\leq p-1} H\big(b_j \otimes b_i^{(j-1)}\big) - \sum_{1\leq j\leq p-1} \langle \mathrm{wt}(b_j^{(p-1)}), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle \\ &\qquad - \sum_{1\leq i<j\leq p-1} \langle \mathrm{wt}(b_i^{(j-1)}) - \mathrm{wt}(b_i^{(j)}), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle + C \\ &= D(b') - \sum_{1\leq i\leq p-1} \langle \mathrm{wt}(b_i), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle + C \\ &= D(b') - \langle \mathrm{wt}(b'), \varpi^{\vee}_{\tau^{-1}(0)}\rangle + C \end{aligned}$$

となる。

6 $X = M$ 予想

$I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1,\ell_1),\ldots,(r_p,\ell_p)\big)$ に対し、$B^{\boldsymbol{\nu}} = B^{r_1,c_{r_1}\ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p,c_{r_p}\ell_p}$ とおく。また P_0^+ を $\mathfrak{g}_0$ の支配的整ウェイトの集合とし、$\lambda \in P_0^+$ とする。このとき $B^{\boldsymbol{\nu}}$ 上の **1 次元状態和**

$X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q, q^{-1}]$ は

$$X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q) = \sum_{\substack{b \in B^{\boldsymbol{\nu}} \\ \tilde{e}_i b = 0 \ (i \in I_0) \\ \mathrm{wt}(b) = \lambda}} q^{D(b)}$$

により定義される。$\mathrm{ch}\, V_{\mathfrak{g}_0}(\lambda)$ で最高ウェイト λ の既約 $\mathfrak{g}_0$ 加群の指標を表すとき、定義から

$$\sum_{b \in B^{\boldsymbol{\nu}}} q^{D(b)} e^{\mathrm{wt}(b)} = \sum_{\lambda \in P_0^+} X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q) \mathrm{ch}\, V_{\mathfrak{g}_0}(\lambda) \tag{6.1}$$

が成り立つ。

一方 $\boldsymbol{\nu}$ と λ からは**フェルミ型公式**と呼ばれる多項式 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ も定義される（[HKO+99, HKO+02] 参照)。以下は [Naob] の主結果である。

定理 6.1. $\mathfrak{g}$ が $A_n^{(1)}$、$D_n^{(1)}$、$E_n^{(1)}$ のいずれかである時、ある定数 C が存在して

$$\sum_{\lambda \in P_0^+} M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) \mathrm{ch}\, V_{\mathfrak{g}_0}(\lambda)$$
$$= q^C e^{-\ell_p \Lambda_0} D_{t_{w_0(\varpi_{r_p})}} \Big(e^{(\ell_p - \ell_{p-1})\Lambda_0} \cdots D_{t_{w_0(\varpi_{r_2})}} \big(e^{(\ell_2 - \ell_1)\Lambda_0} \cdot D_{t_{w_0(\varpi_{r_1})}} (e^{\ell_1 \Lambda_0}) \big) \cdots \Big)$$

となる。ただし $q = e^{-\delta}$ とおいた。

$\mathfrak{g}$ が上の定理の型のとき、全ての $r \in I_0$ に対して $c_r = 1$ が成り立つ。よって上の定理の右辺は系 4.2 の右辺と完全に一致している。このことと $\mathrm{ch}\, V_{\mathfrak{g}_0}(\lambda)$ の線形独立性、および簡単な係数比較により以下が示せる。この等式は $X = M$ 予想と呼ばれており、[HKO+99, HKO+02] において予想されたものである。

系 6.2. $\mathfrak{g}$ が $A_n^{(1)}$ または $D_n^{(1)}$ である時、任意の λ に対し

$$q^{-D(u(B^{\boldsymbol{\nu}}))} X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q) = M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$$

が成り立つ。

補足 6.3. $A_n^{(1)}$ 型についてはこの結果の以前から、[KSS02] によってすでに証明が与えられていた。

参考文献

[FOS10] G. Fourier, M. Okado, and A. Schilling. Perfectness of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. In *Quantum affine algebras, extended affine Lie algebras, and their applications*, volume 506 of *Contemp. Math.*, pages 127–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[HK02] J. Hong and S.-J. Kang. *Introduction to quantum groups and crystal bases*, volume 42 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[HKO$^+$99] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Remarks on fermionic formula. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 243–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[HKO$^+$02] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi. Paths, crystals and fermionic formulae. In *MathPhys odyssey, 2001*, volume 23 of *Prog. Math. Phys.*, pages 205–272. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[Jos03] A. Joseph. A decomposition theorem for Demazure crystals. *J. Algebra*, 265(2):562–578, 2003.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[Kas93] M. Kashiwara. The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula. *Duke Math. J.*, 71(3):839–858, 1993.

[KKM$^+$92] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki. Affine crystals and vertex models. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, volume 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 449–484. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[KSS02] A.N. Kirillov, A. Schilling, and M Shimozono. A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations. *Selecta Math. (N.S.)*, 8(1):67–135, 2002.

[Kum02] S. Kumar. *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, volume 204 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[LLM02] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar. Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties. *Compositio Math.*, 130(3):293–318, 2002.

[Naoa] K. Naoi. Demazure crystals and tensor products of perfect Kirillov-Reshetikhin crystals with various levels. math.QA/1108.3139.

[Naob] K. Naoi. Fusion product of kirillov-reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. math.RT/1109.2450.

[OS08] M. Okado and A. Schilling. Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. *Represent. Theory*, 12:186–207, 2008.

[ST] A. Schilling and P. Tingley. Demazure crystals, Kirillov-Reshetikhin crystals, and the energy function. math.QA/1104.2359.