

# 単位円交差グラフの線形構造を持つ部分クラスについて

林 貴史\*    木野 徹\*    桑原 勇人\*    長澤 亮介\*    芝田 悠華\*  
山崎 浩一\*†

## 1 はじめに

単位円交差グラフとはグラフの各頂点を直径の等しい円で表した交差グラフで、アドホックワイヤレスネットワークなどに応用を持つ [1, 2, 3]. 本稿では単位円交差グラフを単に単位円グラフと呼ぶことにする. 単位円グラフは自然なグラフクラスでもあるため, 様々な研究結果が得られている. 例えば入力グラフを単位円グラフに制限しても, 独立頂点集合問題, 彩色問題, 支配集合問題は NP 困難であることが知られている [4]. また, 単位円グラフの認識問題は NP 困難である [3]. 単位円グラフを表現するのに必要な領域はその単位円グラフの直径から制限を受けるため, 重なりを持たない円の配置数には限界がある. 限られた領域内に如何に多く重なりを持たない円を配置できるかという円パッキング問題も盛んに研究されている (cf. [5]).

ある限られた領域内で表現可能な単位円グラフからなる集合 (つまりグラフクラス) に対する研究も行われている [6]. 縦  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 横無限長の矩形内で表現可能な単位円グラフ全体からなる集合は co-comparability グラフからなる集合に真に含まれることが知られている [6]. これにより縦  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  の制限を受けた単位円グラフにおいては, いくつかの NP 完全な問題が線形時間で解くことができる. しかし, 縦が  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  未満で制限された単位円グラフの研究は (著者等が知る限り) なされていない. 本稿では, 縦が  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  未満で制限した場合に, グラフクラスがどのように変化するかについての研究する.

## 2 準備

グラフ  $G$  を頂点集合  $V$ , 辺集合  $E$  を用いて  $G = (V, E)$  で表す.  $G$  および  $u, v \in V$  に対し,  $dist_G(u, v)$

を  $G$  上での  $u, v$  間の最短経路の辺数とする. また,  $diam(G)$  を  $G$  の直径とし  $\max_{u, v \in V} dist_G(u, v)$  で定義する.  $G$  の最大独立集合のサイズを  $\alpha(G)$  で表す.

あるグラフが単位円交差グラフ (以降, 単に単位円グラフと記す) とは, 2 次元平面上において各頂点が直径 1 の (閉じた) 円に対応し, 二つの円が重なりを持つ場合のみ, 対応する 2 頂点間に辺を持つグラフのことである. 連結な単位円グラフ全体からなる集合を UDG で表す. あるグラフが単位区間グラフとは, 各頂点が長さ 1 の閉区間に対応し, 二つの区間が重なりを持つ場合のみ, 対応する 2 頂点間に辺をもつグラフのことである. 連結な単位区間グラフ全体からなる集合を UIG で表す. 便宜上しばしば, UIG を  $L_0$  で, UDG を  $L_\infty$  で表す (UIG は UDG のサブクラスであることに注意).

$R = \{p_i = (x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$  が単位円グラフ  $G = (V = (v_1, \dots, v_n), E)$  の中心点表現とは,  $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \leq 1$  iff  $\{p_i, p_j\} \in E (1 \leq i < j \leq n)$  が成り立つ時をいう. ここで各  $p_i$  には  $v_i$  が対応する.  $p_i$  は単位円の中心点を表し,  $v_i$  は単位円に対応する頂点を表すが, 本稿ではこれら二つを同一視する. なお, 本稿を通して  $p$  はある単位円の中心点を,  $v$  は単位円に対応する頂点を表すものとする.  $\max |x_i - x_j|, \max |y_i - y_j|$  をそれぞれ  $R$  の長さ, 幅と呼び  $l(R), w(R)$  で表す.

中心点表現  $R, p_i, p_j \in R$  に対して  $p_i, p_j$  間の (ユークリッド) 距離を  $dist_R(p_i, p_j)$  で表す.  $R$  の直径を  $R$  上の最も離れた 2 頂点間の距離  $\max_{p_i, p_j \in R} dist_R(p_i, p_j)$  で定義し,  $diam(R)$  で表す.

$\forall \delta (\delta \geq 0)$  に対して, 幅  $\delta$  の中心点表現を持つ連結グラフ全体の集合を  $L_\delta$  で表す. したがって  $L_\delta$  は縦の長さ  $1 + \delta$ , 横の長さ  $\infty$  の矩形内に単位円を配置して得られる連結な単位円グラフ全体からなる集合であり,  $UIG = L_0 \subseteq L_\delta \subseteq L_\infty = UDG$  が成り立つ.

あるグラフが比較可能グラフ (comparability

\*群馬大学

†本研究は科研費 (21500004) の助成を受けたものである.

graph) とは, 半順序中で互いに比較可能な要素を辺で結んだグラフのことである. 比較可能グラフの補グラフを **co-comparability グラフ** という.  $L_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$  は co-comparability グラフからなる集合に真に含まれることが知られている [6]. co-comparability 性を保つという意味では,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  という値は限界値である. 実際  $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$  での  $L_c$  に対しては, co-comparability グラフ以外のグラフ (例えば  $C_k, k \geq 6$ ) を含む.

本研究では以下の問題について考える.

**問題 1** 次を満たす定数  $C$  は存在するか. すなわち  $\forall \epsilon (0 < \epsilon < C)$  に対し,  $L_\epsilon = L_c$ .

**問題 2** 次を満たす定数  $C$  は存在するか. すなわち  $\forall \epsilon (\epsilon > C)$  に対し,  $L_\epsilon = L_c$ .

UIG は clique-width に対してバウンドされていない [7]. 一方  $\forall \epsilon (\epsilon > 0)$  に対し,  $L_\epsilon$  は UIG を含む. よって,  $L_\epsilon$  は clique-width に対してバウンドされていない. また,  $\bigcap_{0 < \epsilon} L_\epsilon$  と区間グラフも比較不能である (例えば  $K_{1,7}$  と  $C_4$ ).

### 3 研究結果

#### 3.1 問題 1 について

我々は問題 1 を否定的に解いた (定理 1). 本節では定理 1 の証明の概略を与える. そのためにまず補題 1, 2 を示す.

**補題 1.** グラフ  $G$  の中心点表現  $R$  について  $diam(R) \leq diam(G)$ .

**証明.**  $diam(R) > diam(G)$  と仮定する.  $R$  上の最も離れた 2 頂点を  $p_a, p_b$  とする. すなわち  $dist_R(p_a, p_b) = diam(R)$  である.  $G$  において  $p_a, p_b$  の最短なパスを  $[p_a = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = p_b]$  とすると  $\sum_{i=0}^{k-1} dist_R(u_i, u_{i+1}) \geq dist_R(u_0, u_k) = dist_R(p_a, p_b) = diam(R)$  である. したがって,  $dist_R(u_j, u_{j+1}) \geq \frac{diam(R)}{k}$  を満たす辺  $\{u_j, u_{j+1}\}$  が存在する. さらに,  $diam(G) = \max_{u, v \in V} dist_G(u, v) \geq dist_G(u_0, u_k) = k$  である. よって  $dist_R(u_j, u_{j+1}) \geq \frac{diam(R)}{k} \geq \frac{diam(R)}{diam(G)} > 1$  となり矛盾.  $\square$

補題 1 により, 単位円グラフ  $G$  の中心点表現の幅, 長さはそれぞれ  $diam(G)$  以下に制限される. 制限さ

れた領域内に重ならないように配置できる円の個数には上限がある. したがって,  $\alpha(G)$  が  $diam(G)$  に依存した定数で上から抑えられることになる.

**補題 2.** グラフ  $G \in L_W, W < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ならば  $\alpha(G) \leq \lceil \frac{diam(G)}{\sqrt{1-W^2}} \rceil$  である.

**証明.**  $R$  を  $G$  のある中心点表現とする. 補題 1 より  $diam(R) \leq diam(G)$  である. よって,  $w(R) \leq W, l(R) \leq diam(G)$  である. ここで縦の長さ  $W$ , 対角線の長さが 1 の矩形領域  $T$  を考える.  $T$  の横の長さは  $\sqrt{1-W^2}$  であるから,  $\lceil \frac{diam(G)}{\sqrt{1-W^2}} \rceil$  個の  $T$  で  $R$  の領域全てを覆うことができる. しかし, 各  $T$  は高々一個の独立頂点 (中心点) しか含むことはできないので,  $\alpha(G)$  は高々  $\lceil \frac{diam(G)}{\sqrt{1-W^2}} \rceil$  である.  $\square$

補題 2 より  $\alpha(G) \leq \lceil \frac{diam(G)}{\sqrt{1-W^2}} \rceil$  である.  $\alpha(G) < \frac{diam(G)}{\sqrt{1-W^2}} + 1$  とすれば,  $W > \sqrt{\frac{(\alpha(G)-1)^2 - diam(G)^2}{(\alpha(G)-1)^2}}$  となる. したがって次の系を得る. 本稿では,  $\sqrt{\frac{(\alpha(G)-1)^2 - diam(G)^2}{(\alpha(G)-1)^2}}$  を  $f(G)$  で表す.

**系 1.** グラフ  $G \in L_W, W < \frac{\sqrt{3}}{2}$  の任意の中心点表現  $R$  に対し  $w(R) > f(G)$  が成り立つ.

系 1 より次の定理が成り立つ.

**定理 1.** 次を満たす定数  $C$  は存在しない. すなわち,  $\forall \epsilon (0 < \epsilon < C)$  に対し,  $L_\epsilon = L_c$ .

**証明.** 条件を満たす定数  $C$  が存在したと仮定する. すなわち  $\forall \epsilon (0 < \epsilon < C)$  に対し,  $G \in L_C$  ならば  $G \in L_\epsilon$  である.

ここで  $k$  を 2 以上の整数とし, 以下の 3 つの性質を満たすグラフの列  $F_k = (G_1, G_2, \dots, G_i, \dots)$  を考える.

**性質 1**  $\forall i (i \geq 1)$  に対して  $\alpha(G_i) - diam(G_i) = k$ ,

**性質 2**  $\lim_{i \rightarrow \infty} diam(G_i) = \infty$ ,

**性質 3**  $\forall \epsilon' (\epsilon' > 0)$  に対して  $G_i$  が幅  $f(G_i) + \epsilon'$  で表現可能.

性質 1, 2 より  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(G_i) = 0$  である. したがって  $f(G_j) < C$  なる  $G_j$  が存在する. また,  $f(G_j) + \epsilon' < C$  なる  $\epsilon'$  は必ず取れる. よって,  $F_k$  の性質 3 より  $G_j \in L_C$  である.

しかし系 1 によれば  $G_j$  の任意の中心点表現  $R$  に対し,  $w(R) > f(G_j)$  となる. つまり  $G_j$  は幅  $f(G_j)$

では表現できない.  $(C >)f(G_j) \geq \epsilon$ なる  $\epsilon$  に対して,  $G_j \notin L_\epsilon$  となり仮定と矛盾.

性質を全て満たす  $F_k$  は確かに存在する. 実際, 図 1 で  $F_2$  のグラフの例, 図 2 でその UDG 表現の例をそれぞれ示す. また, 図 1 の  $F_2$  が性質 3 を満たすことの証明は割愛する.

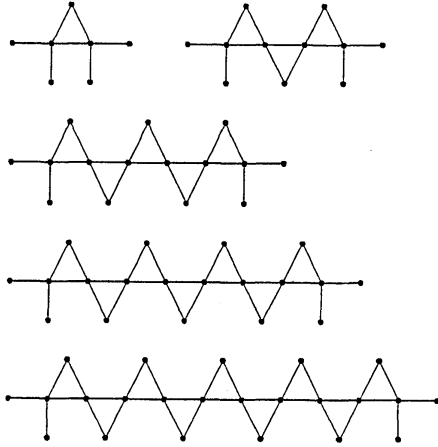


図 1:  $F_2$  の例

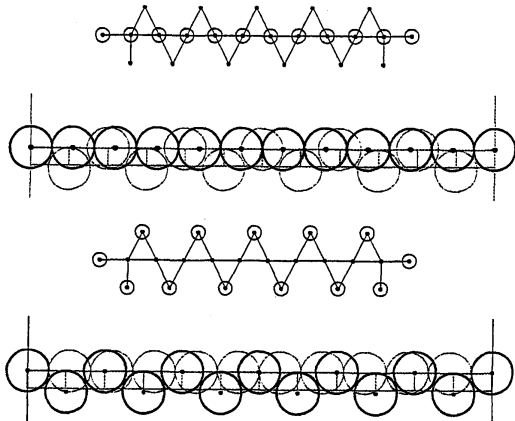


図 2:  $F_2$  の UDG 表現

### 3.2 問題 2 について

我々は問題 2 についても否定的に解いた (定理 2). 本節では補題 2 の一般化を考え (補題 3), それを用いて定理 2 を証明する.

□ 補題 3. 縦の長さ  $w$ , 横の長さ  $l$  の矩形領域  $D$  内に, 重ならないように配置できる単位円の最大個数  $I$  は,  $\forall h (\frac{1}{2} < h < \frac{\sqrt{3}}{2})$  に対して,  $I \leq \lceil \frac{w}{h} \rceil \times \lceil \frac{l}{\sqrt{1-h^2}} \rceil$  である.

証明. 縦の長さ  $h$ , 対角線の長さ 1 の矩形領域  $T$  を考える.  $T$  の横の長さは  $\sqrt{1-h^2}$  であるから,  $\lceil \frac{w}{h} \rceil \times \lceil \frac{l}{\sqrt{1-h^2}} \rceil$  個の  $T$  で  $D$  を全て覆いきれる. したがって鳩ノ巣原理より,  $I \leq \lceil \frac{w}{h} \rceil \times \lceil \frac{l}{\sqrt{1-h^2}} \rceil$  である. □

定理 2. 次を満たす定数  $C$  は存在しない. すなわち,  $\forall \epsilon (\epsilon > C)$  に対し,  $L_\epsilon = L_C$ .

証明. 条件を満たした  $C$  が存在すると仮定する. すなわち  $\forall \epsilon (\epsilon > C)$  に対し,  $G \in L_\epsilon$  ならば  $G \in L_C$  である.

$C$  に対して  $X = \lceil C \rceil$  とする.  $X \geq C$  なので  $L_X \supseteq L_C$  である. ここで, 図 3 のようなひし形の格子状グラフを考える. 明らかに, このようなひし形の格子状グラフは, UDG に属する. また各  $k = 1, 2, \dots$  に対し, 頂点数  $2k^2 - 2k + 1$ ,  $diam(H_k) = 2k - 2$ ,  $\alpha(H_k) = k^2$  なるひし形の格子状グラフ  $H_k$  が存在する.

$H_k \in L_X$ ,  $R$  を  $H_k$  のある中心点表現とする. このとき,  $\alpha(H_k) < 8kX$  であることを示す. 補題 1 より  $diam(R) \leq diam(H_k)$  であるから,  $l(R) \leq 2k - 2$  である. また  $H_k \in L_X$  より  $w(R) \leq X$  である. したがって補題 3 を  $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$  として用いれば,  $I \leq \lceil \sqrt{2}w(R) \rceil \times \lceil \sqrt{2}l(R) \rceil$  となり, よって  $I \leq 2w(R) \times 2l(R) = 4X(2k - 2) < 8kX$ . したがって,  $\alpha(H_k) \leq I < 8kX$ .

一方  $\alpha(H_k) = k^2$  なので,  $k > 8X$  に対し,  $\alpha(H_k) = k^2 > 8kX$  となる. よって  $k > 8X$  に対し, 単位円グラフ  $H_k$  は  $L_X$  に属さず, したがって  $L_C$  にも属さない. よって矛盾. □

## 4 今後の課題

今後の課題として以下の 2 つが挙げられる.

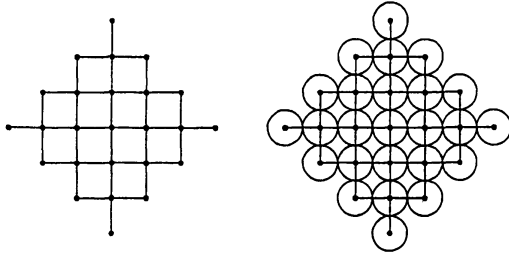


図 3: グラフ  $H$  の概形

1.  $S = \bigcap_{0 < \epsilon} L_\epsilon$  の特徴付け.
2.  $\forall a, c (0 < a < c)$  に対し,  $L_a \subsetneq L_b \subsetneq L_c$  なる  $a < b < c$  が必ず存在するか.

## 参考文献

- [1] M.L. Huson and A. Sen. Broadcast scheduling algorithms for radio networks. In *Military Communications Conference, 1995. MILCOM'95, Conference Record, IEEE*, volume 2, pages 647–651. IEEE, 1995.
- [2] X.Y. Li and Y. Wang. Simple heuristics and ptass for intersection graphs in wireless ad hoc networks. In *Proceedings of the 6th international workshop on Discrete algorithms and methods for mobile computing and communications*, pages 62–71. ACM, 2002.
- [3] H. Breu and D.G. Kirkpatrick. Unit disk graph recognition is NP-hard. *Computational Geometry*, 9(1-2):3–24, 1998.
- [4] B.N. Clark, C.J. Colbourn, and D.S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete mathematics*, 86(1-3):165–177, 1990.
- [5] 松井知己. 単位円グラフ上の最大独立集合問題の近似解法. 情報処理学会研究報告. *AL, アルゴリズム研究会報告*, 99(26):1–6, 1999.
- [6] H. Breu. *Algorithmic aspects of constrained unit disk graphs*. PhD thesis, University of British Columbia, 1996.
- [7] M.C. Golumbic and U. Rotics. On the clique-width of some perfect graph classes. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 11(3):423–443, 2000.