

## 窓関数を用いたスペクトル法による非周期的な場の時間発展の 数値シミュレーション法の検討

大阪府立大学工学研究科 樽林聖子(Seiko Kurebayashi), 村上洋一(Youichi Murakami)  
Graduate School of Engineering,  
Osaka Prefecture University

### 1 はじめに

偏微分方程式の数値解法のひとつであるスペクトル法は、周期境界条件のもとでは非常に精度よく空間微分を計算できる。しかし境界が不連続な場合、フーリエ級数で関数を表すと不連続点の近傍で激しく振動し級数の収束性が悪くなり(ギブスの現象)、実用的でなくなる。本研究は、境界が不連続な初期条件においてもギブスの現象を回避してスペクトル法を用いて精度よく計算する手法の提案を目的としている。

現在この手法には、周辺領域法、ウィンドウ法が提案されている。Shlatter et al [1]は2次元非圧縮の Navier-Stokes 方程式に周辺領域法、ウィンドウ法を適用して両者の比較を行っている。

本研究では、ウィンドウ法を用いて Burgers 方程式を計算した。まず、窓関数を掛け合わせた新しい関数を導入し、Burgers 方程式を修正した方程式を用いてシミュレーションを行った。Burgers 方程式は、非線形項と散逸項を持つにもかかわらず、非定常な厳密解が存在する。したがって、本研究ではウィンドウ法の有効性を定量的に調べることができる。

### 2 数値計算法

#### 2.1 Burgers 方程式の修正

領域 $[0,L]$ において非周期的(左右の境界で値が不連続)な関数 $u(x,t)$ を考える。 $u(x,t)$ についての Burgers 方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

で与えられる。式(1)をスペクトル法を用いて精度良く計算するために、窓関数 $W(x)$ によって $u(x,t)$ を人工的に周期的な関数 $\tilde{u}(x,t)$ にする。Burgers方程式を修正し、新しい関数 $\tilde{u}(x,t)$ についての Burgers方程式を導出する。

まず、

$$\tilde{u}(x,t) = W(x)u(x,t), \quad (2)$$

$$\tilde{u}^2(x,t) = W(x)\{u(x,t)\}^2 \quad (3)$$

を定義する。ここで、 $W(x)$ は両端近傍で急速に0に減少する関数である。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Wu) = W \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

より、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{W} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}. \quad (5)$$

次に,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \widetilde{u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} W u^2 \right) = W \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{1}{2} u^2 \frac{dW}{dx} \quad (6)$$

より,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{1}{W} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \widetilde{u^2} \right) - \frac{1}{2} u^2 \frac{dW}{dx} \right\}. \quad (7)$$

最後に,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (W u) = \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - u \frac{dW}{dx} \right) + W \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{dW}{dx} \right) \quad (8)$$

より,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{W} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - u \frac{dW}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{dW}{dx} \right) \right\}. \quad (9)$$

以上得られた式(5), (7), (9)を式(3.3)に代入し, 方程式全体に窓関数 $W(x)$ をかけると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \widetilde{u^2} \right) + \frac{1}{2} u^2 \frac{dW}{dx} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - u \frac{dW}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{dW}{dx} \right) \right\}. \quad (10)$$

式(10)のすべての項は周期化されている. 以上より,  $\bar{u}(x)$ について修正したBurgers方程式が得られた.

## 2.2 数値スキームについて

まず, (1)(2)式より, 実空間で,  $\bar{u}(x, t)$ ,  $\widetilde{u^2}(x, t)$ を作る(windowing).

式(10)の各項を, それぞれフーリエ級数に展開すると,

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \exp[-ikx], \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \{\bar{u}(x, t)\}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) \exp[-ikx], \quad (12)$$

$$u \frac{dW}{dx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) \exp[-ikx], \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} u^2 \frac{dW}{dx} + \frac{\nu}{W} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(t) \exp[-ikx], \quad (14)$$

$$-\nu \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(t) \exp[-ikx]. \quad (15)$$

以上を式(10)に代入すると, 各フーリエ成分について,

$$\frac{da_k}{dt} = ikb_k(t) - \nu k^2 a_k(t) + i\nu k c_k(t) + d_k(t) + e_k(t) \quad (16)$$

が得られた. 式(16)を時間について前進オイラー法を用いて差分化すると,

$$a_k(t + \Delta t) = a_k(t) + \Delta t \{ ikb_k(t) - \nu k^2 a_k(t) + i\nu k c_k(t) + d_k(t) + e_k(t) \}. \quad (17)$$

これを実空間に戻して,  $\bar{u}(t + \Delta t)$ が得られる. 次に,

$$u(x, t + \Delta t) = (1 - W)u(0) + \bar{u}(x, t + \Delta t) \quad (18)$$

から,  $u(x, t + \Delta t)$ を得る(dewindowing). この操作をすることで, もとの境界条件を取り入れるこ

とになる。以上を繰り返す。

### 2.3 窓関数と領域について

今回は、以下に示す窓関数[1]を採用した。

$$W(x) = 10^{-a^n |2(x-x_L)/(x_R-x_L)-1|^n}. \quad (19)$$

図1, 2に $W(x)$ と $dW(x)/dx$ の概形を示す。この関数はなめらかで、何回でも微分可能であり、微分回数が増えると、極値の数と極値の絶対値がともに増大する。窓関数の中心の平らな領域が正しくシミュレーションしたい領域(物理領域 $\Gamma_I$ )である。2つのパラメータ $a, n$ はそれぞれ物理領域の幅と、窓関数の1から0への落ち方を決める。 $a$ は大きいほど平らな領域はせまくなり、 $n$ は大きいほど落ち方が急になる。

### 3 数値計算の結果

以下の左右の境界で値が不連続な初期条件,

$$u(x) = -2v \left\{ \frac{k}{2} + \frac{k}{2} \tanh \left( \frac{kx+x_0}{2} \right) \right\}, \quad (20)$$

$$u(x) = -2v \frac{k_1 \exp(k_1 x + x_1) + k_2 \exp(k_2 x + x_2)}{1 + \exp(k_1 x + x_1) + \exp(k_2 x + x_2)} \quad (21)$$

のもとでシミュレーションを行い、得られた数値解と厳密解を比較した。(20)式は1つの衝撃波が振幅の幅によってきまる一定の速度で進行する場合、(21)式は2つの衝撃波がそれぞれの振幅によってきまる一定速度で進行していき、やがて融合し、最終的に1つの衝撃波として進行していく場合の初期条件である。初期条件のパラメータは、 $v = 0.01$ ,  $k = -10$ ,  $x = 50$ ,  $k_1 = -10$ ,  $x_1 = 60$ ,  $k_2 = -20$ ,  $x_2 = 100$ , 窓関数のパラメータは $a = 1.18$ ,  $n = 40$ とした。

図3に衝撃波が1つの場合、図4に衝撃波が2つの場合の時間発展の様子を示す。図3, 図4より、どちらの数値解も厳密解と比較して、正しくシミュレーションすることができた。

しかし、図3の $u = 0.2$ 付近を拡大して見ると(図5)、振幅が徐々に下がっていくのがわかる。この誤差をできるだけ小さくするために、空間分割数 $nx$ , 時間刻み $dt$ , 窓関数のパラメータ $a$ と $n$ の与える影響を調べた。図6より、 $nx$ を変えても大きな変化は見られなかった。 $dt$ については、 $dt = 0.1$ では差がかなり大きくなり正しくないが、 $dt$ を小さくすれば誤差も小さくなるというわけではなかった(図7)。窓関数のパラメータは $a$ を変えても誤差の入り方は大きくは変わらないが(図8),  $n$ を変えると誤差の入り方に変化が見られた(図9)。

以上より、パラメータを変えることによって誤差を大きく改善することはできなかった。領域を拡大して、 $t = 100$ までの各時刻のピークの位置(図10)での誤差を定量的に調べた結果を図11に示す。 $t = 100$ で振幅に対する誤差は0.5%程度で十分小さいと言えるが、この誤差は時刻とともにほぼ線形に成長するのでシミュレーションには注意が必要である。

### 4 おわりに

ウィンドウ法による誤差は、十分小さいが、時刻とともに成長するので注意してシミュレーシ

ョンしなければならない。今後この誤差を小さくしていく必要がある。(10)式では周期境界条件のもとで $\tilde{u}$ だけで解いているが、各項を $\tilde{u}$ だけではなく $u$ も含んだ形に変更したり、dewindowingの方法を変更して誤差の入り方がどうなるか、現在検討している。

## 5 参考文献

[1] P.Schlatter, N.A.Adams, L.Kleiser, "A windowing method for periodic inflow/outflow boundary treatment of non-periodic flows", *Journal of Computational Physics* 206 (2005) pp.505-535

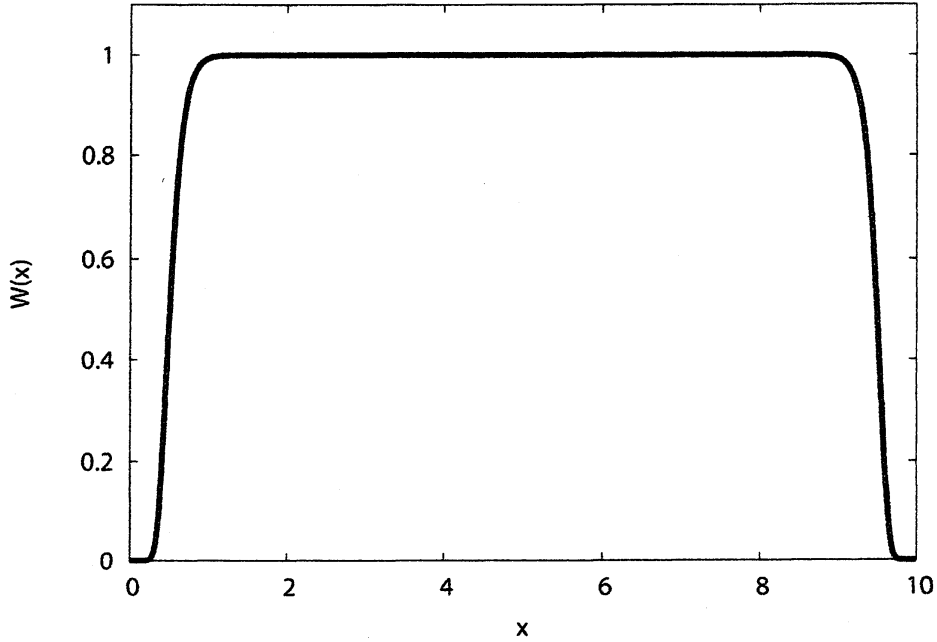


図1  $W(x)$ の概形 ( $x_R = 0$ ,  $x_L = 10$ ,  $a = 1.18$ ,  $n = 40$ )

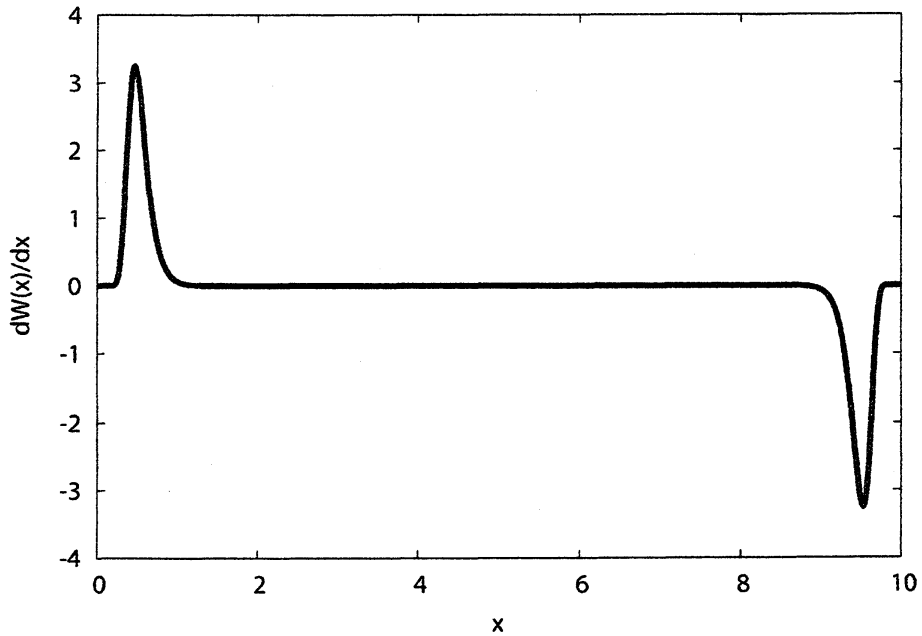


図2  $dW(x)/dx$ の概形 ( $x_R = 0$ ,  $x_L = 10$ ,  $a = 1.18$ ,  $n = 40$ )

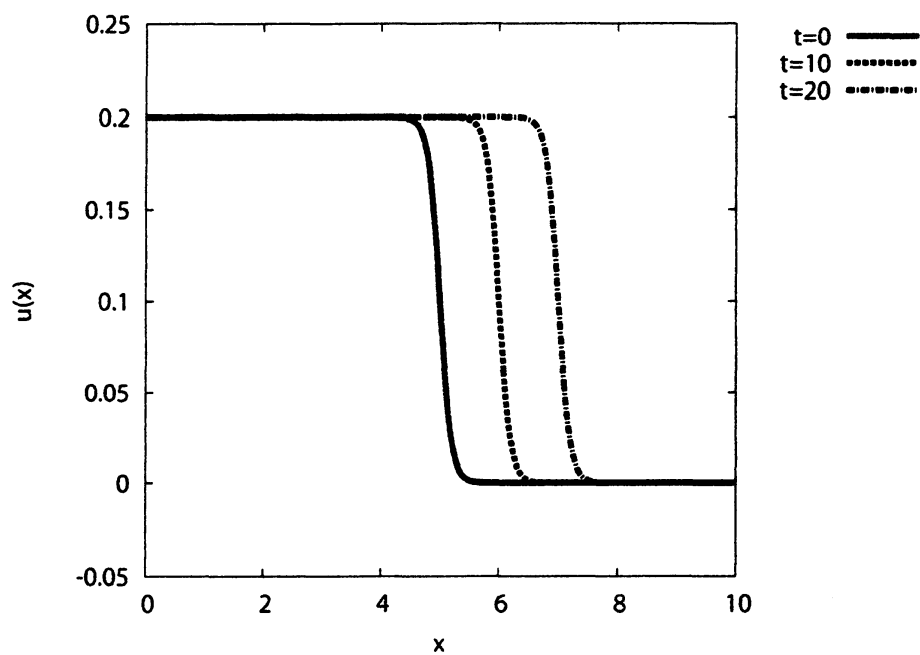


図 3(a) 厳密解による時間発展の様子(衝撃波が 1 つの場合)

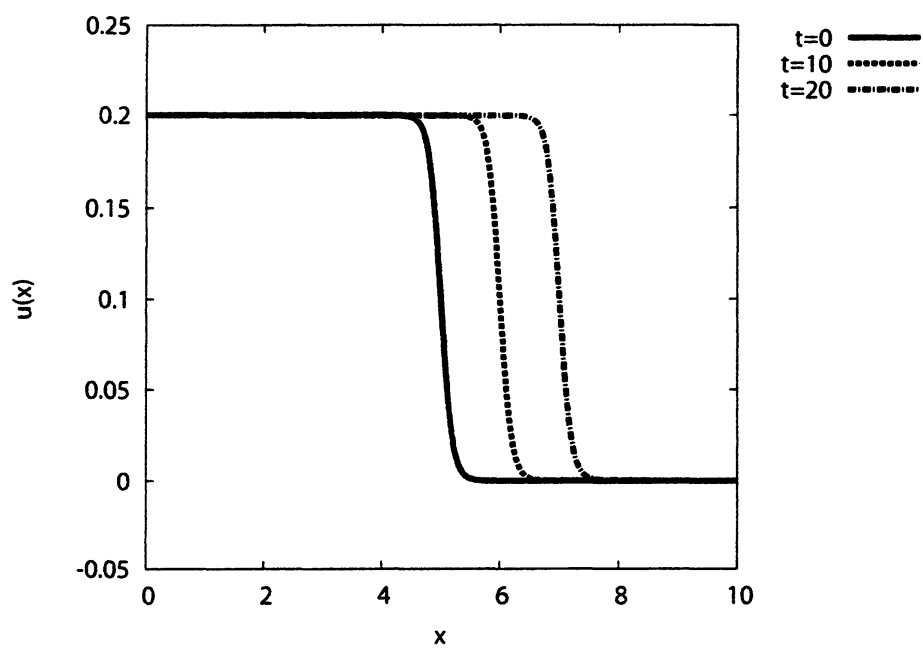


図 3(b) 数値解による時間発展の様子(衝撃波が 1 つの場合)

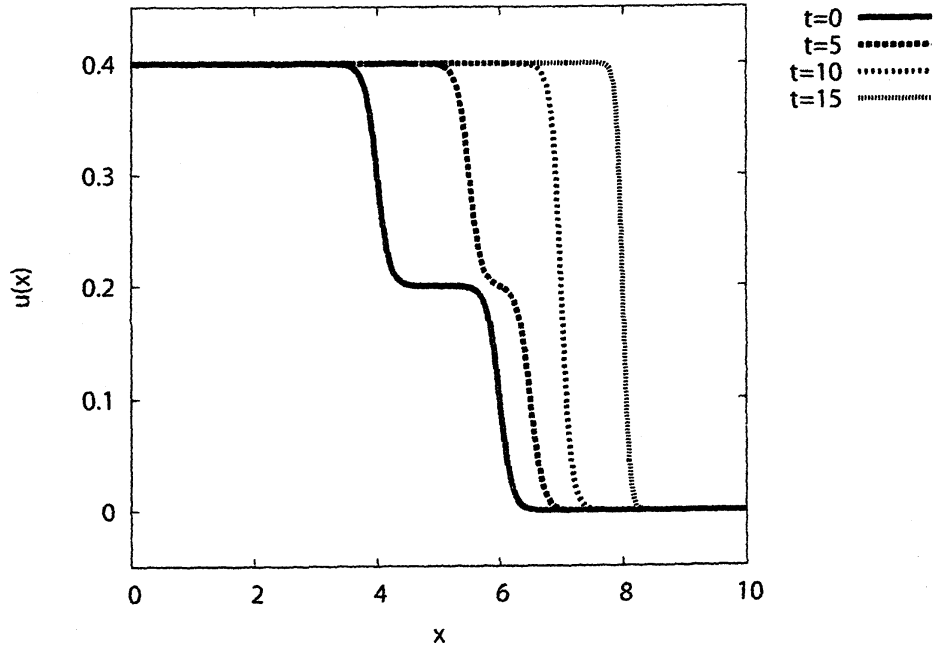


図 4(a) 厳密解による時間発展の様子(衝撃波が 2 つの場合)

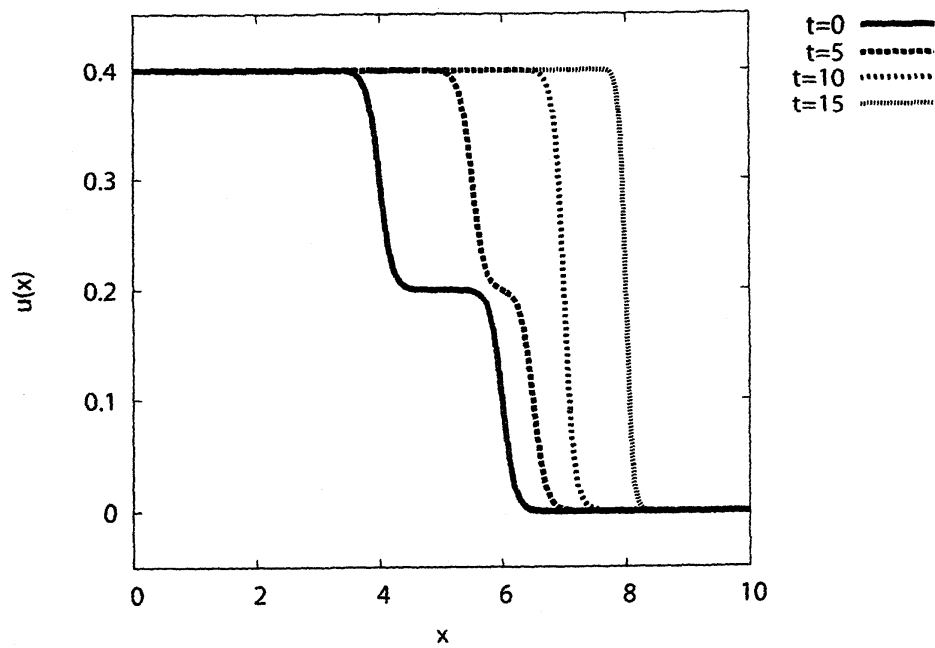


図 4(b) 数値解による時間発展の様子(衝撃波が 2 つの場合)

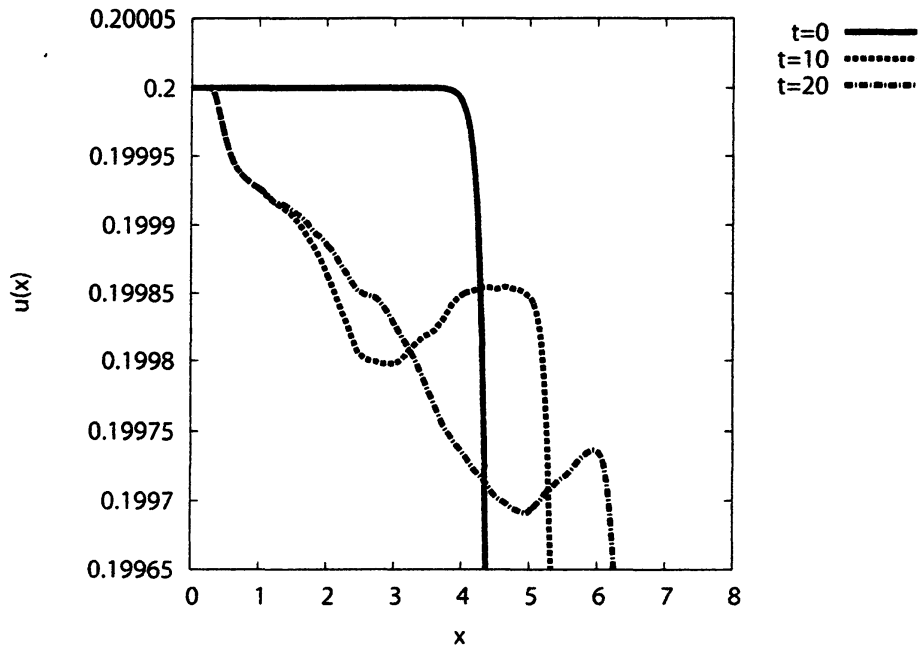


図5 図3(a)の  $u = 0.2$  付近の拡大図

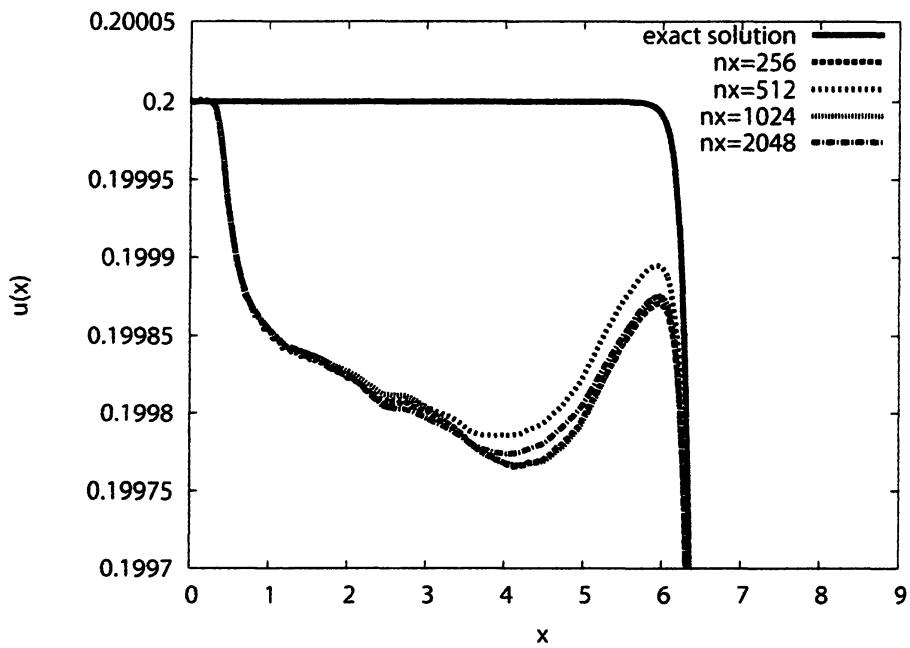


図6  $t=20$  で  $nx$  を変化させた場合の  $u(x)$

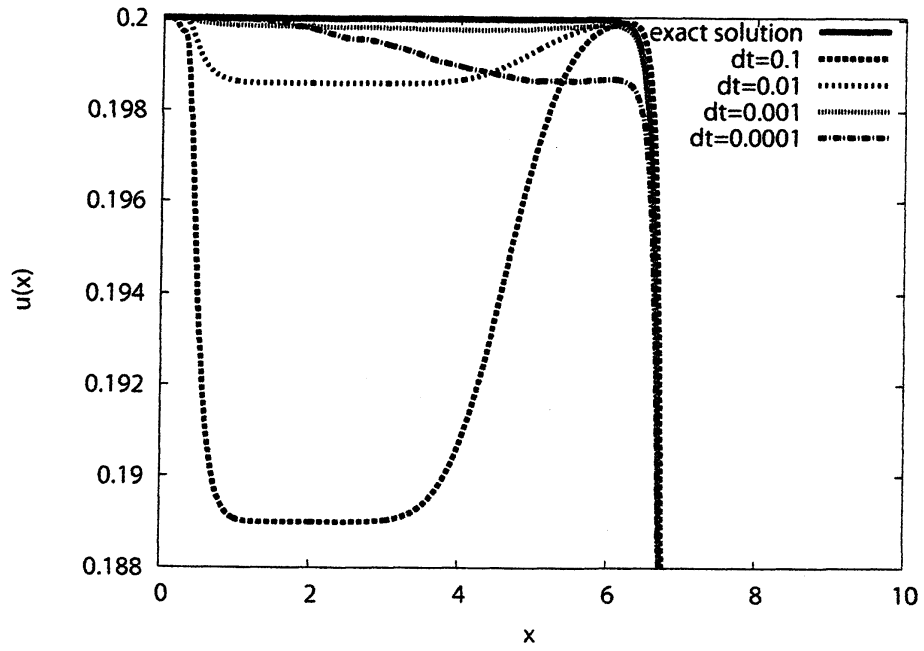


図7  $t=20$  で  $dt$  を変化させた場合の  $u(x)$

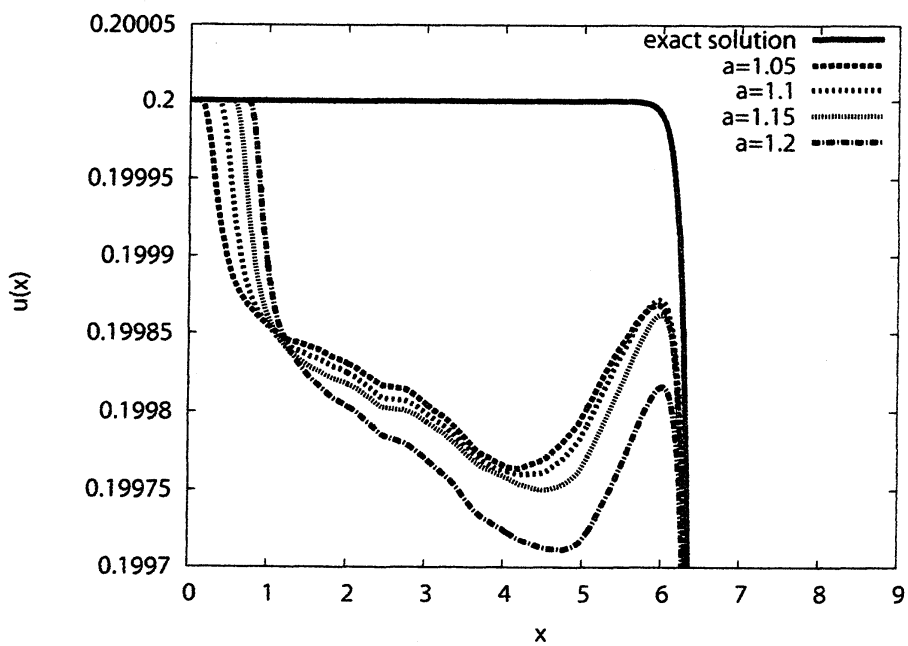


図8  $t=20$  で  $a$  を変化させた場合の  $u(x)$  ( $n=40$ )



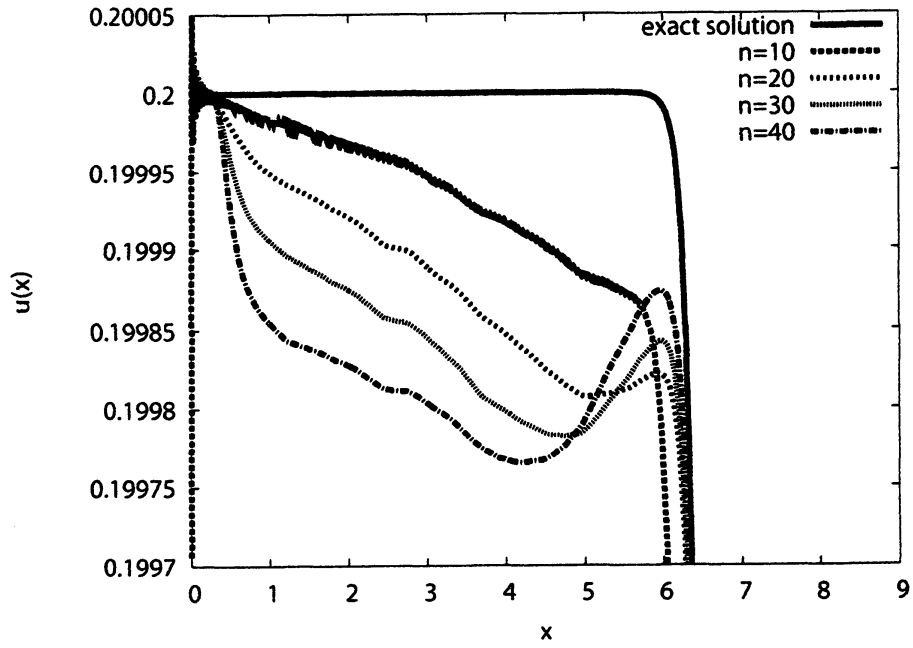


図9  $t=20$  で  $n$  を変化させた場合の  $u(x)$  ( $a=1.08$ )

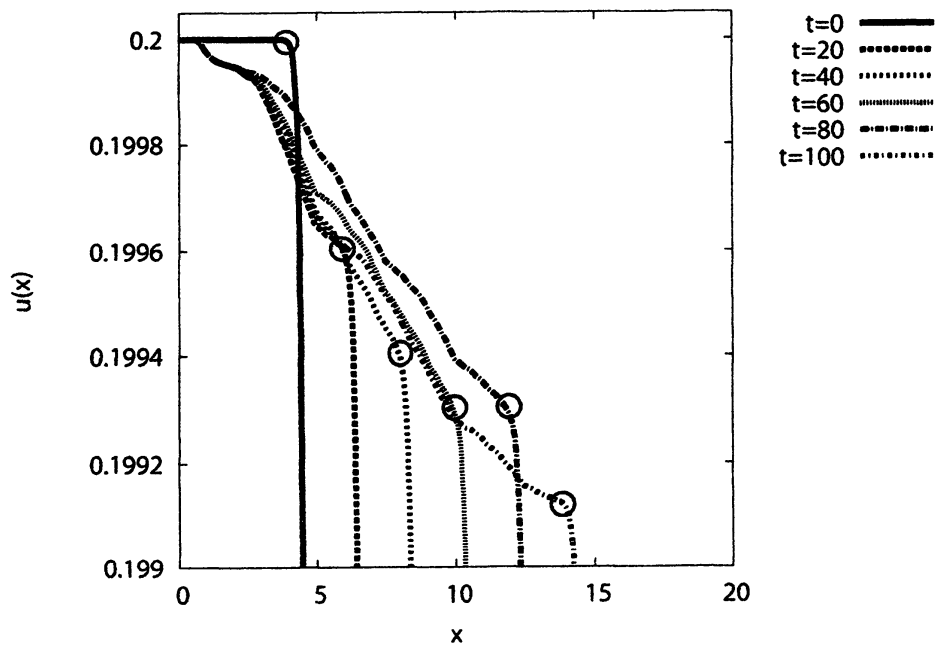


図10 各時刻でのピーク位置

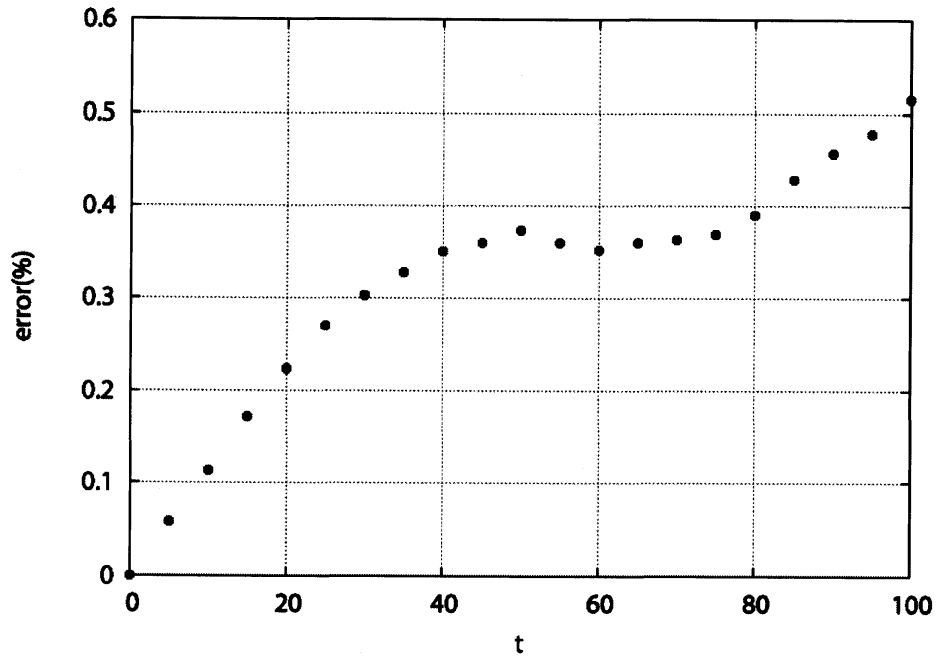


図 11 振幅に対する誤差の時刻歴