

Quasi-line soliton interactions: KP I 及び DS I 方程式の解

大阪府立大学 田尻 昌義 (Masayoshi Tajiri)

Osaka Prefecture University

近畿大学・理工総研 新居 毅人 (Takahito Arai)

Research Institute for Science and Technology,

Kinki University

概要

KP I 及び DS I 方程式の周期ソリトン解のパラメータ空間で、解が正則から非正則になる境界面上のパラメータを持つ解は line-soliton 解と見做せる。この境界面近傍のパラメータを持つソリトンを quasi-line soliton と名付ける。見たところ line soliton だが、指数的に減衰した裾野は波打って周期ソリトンの性質を残している。このような 2 つの quasi-line solitons 間の相互作用を調べた。2 周期ソリトン解のパラメータ空間で、それぞれの周期ソリトンが line soliton に変わる 2 つの境界面の交線上のパラメータを持つ解は 2-line-soliton 解になる。その交線上で共鳴条件と長距離相互作用の条件を満たす 2 つの面が交わっていることに起因して、交線の近傍にパラメータの少しの変化に対して現象が敏感に変わる領域がある。その領域に、周期ソリトンを介する 2 つの quasi-line soliton 間の長距離相互作用が存在する。それは、2 つの line soliton が周期ソリトンを介して相互作用しているように見える。

1 はじめに

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式は 1 次元ソリトンの横方向の攪乱に対する安定性を調べるために Kadomtsev と Petviashvili によって導かれ、

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3su_{yy} = 0, \quad s = \pm 1, \quad (1)$$

と書ける [1]。結果は、 $s = -1$ を持つ正の分散の場合 (KP I) line soliton は不安定で、負の分散 ($s = 1$) の場合 (KP II) は安定である。そして、KP II 方程式で記述される line soliton 間にはソリトン共鳴が存在することが Miles によって示された [2]。しかし、KP I 方程式では line soliton 間にはそのようなソリトン共鳴は存在しない。KP I では line soliton が横方向の攪乱に対して不安定であることと関連して、line-soliton 解の他に代数ソリトン解、周期ソリトン解が存在する [3, 4]。

弱非線形深水波列は長い変調攪乱に対して不安定であることが知られている。その 2 次元波束の時間発展は Davey-Stewartson (DS) 方程式

$$\begin{cases} iu_t + pu_{xx} + u_{yy} + r|u|^2u - 2uv = 0, \\ v_{xx} - pv_{yy} - r(|u|^2)_{xx} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

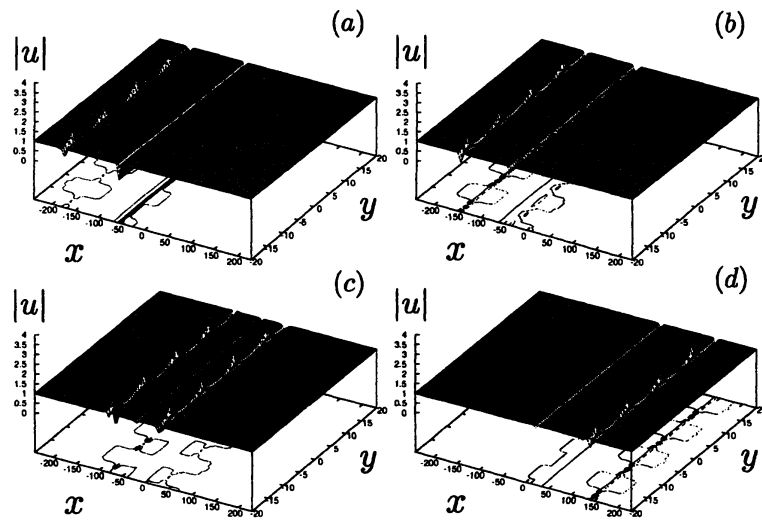


図 1: line soliton と周期ソリトンの長距離相互作用

によって記述される [5-8]. ここで, $p = \pm 1$. $p = 1$ をもつ (2) 式は DS I, $p = -1$ をもつ (2) 式は DS II 方程式と呼ばれる. ここでは, DS I 方程式のみを考える. DS I 方程式も KP I 方程式と同様, line-soliton 解の他に代数ソリトン, 周期ソリトン解をもつ. 周期ソリトンが存在する場合の特徴的なことは, line soliton 間の共鳴とは質的に異なる共鳴現象 (周期ソリトン共鳴) が存在することで, その共鳴は解の発散とは無関係である [9-17].

図 1 は DS I 方程式で記述される line soliton と 周期ソリトンの長距離相互作用を示したものである. 周期ソリトンが line soliton に近づくと周期ソリトンの裾野の波打ちにより line soliton 上に攪乱を与え, それが発展して追い付いてくる周期ソリトンと同じ周期ソリトンを放出し, 振幅のより小さな line soliton になる. その後, その line soliton は追い付いてきた周期ソリトンと共鳴し, もとの line soliton になって相互作用は完了する. この現象を見ると, 図 2 に示すように, line soliton と周期ソリトン間の周期ソリトン共鳴は line soliton が周期ソリトンを吸収して, より大きな振幅の line soliton になることで line soliton の線形不安定の発展の先は周期ソリトンの放出とみることが出来る. この現象は, 周期ソリトン解が波数の実部と虚部の間にある条件が満足されれば, line-soliton 解に変わるのではないかと推測へと導く. このことは, line soliton が隠れた虚数波数をもっているとの推測と同じである.

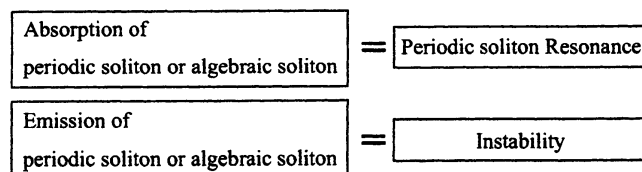


図 2: 不安定性と周期ソリトン共鳴

2 DS I 方程式の quasi-line soliton

波数 $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ の DS I 方程式の周期ソリトンは次式で与えられることはよく知られている [18].

$$u = u_0 e^{i(\zeta + \phi_r)} \frac{\cosh(\xi + i\phi_r) + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos(\eta + i\phi_i)}{\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos \eta}, \quad (3)$$

$$v = -2 \frac{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{M} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{M}} \cosh \xi \cos \eta + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{M}} \sinh \xi \sin \eta}{\left(\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos \eta \right)^2}, \quad (4)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \zeta &= kx + ly - \omega t + \zeta_0, & \xi &= \alpha x + \gamma y - \Omega_r t + \xi^0, \\ \eta &= \beta x + \delta y - \Omega_i t + \eta^0, & \omega &= k^2 + l^2 - ru_0^2, \\ \sin^2 \frac{\phi}{2} &= \frac{(\alpha + i\beta)^2 - (\gamma + i\delta)^2}{2ru_0^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Omega_r + i\Omega_i = 2k(\alpha + i\beta) + 2l(\gamma + i\delta) - \{(\alpha + i\beta)^2 + (\gamma + i\delta)^2\} \cot \frac{\phi}{2}, \quad (6)$$

$$M = \frac{2ru_0^2 \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi^*}{2} \cos \frac{\phi - \phi^*}{2} - \{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) - (\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)\}}{2ru_0^2 \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi^*}{2} \cos \frac{\phi + \phi^*}{2} - \{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) - (\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)\}}. \quad (7)$$

もし, 波数を $\phi (= \phi_r + i\phi_i)$ と $\theta (= \theta_r + i\theta_i)$ で

$$\alpha + i\beta = \sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi}{2} \cosh \theta, \quad \gamma + i\delta = \sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi}{2} \sinh \theta, \quad (8)$$

と表すならば, (7) 式は次のように書き直される.

$$M = \frac{\cosh \phi_i - \cos 2\theta_i}{\cos \phi_r - \cos 2\theta_r}. \quad (9)$$

$0 < \phi_r < 2\pi$ を仮定するとき, 解の存在条件は $M > 1$ より,

$$\begin{cases} n\pi + \frac{\phi_r}{2} < \theta_i < (n+1)\pi - \frac{\phi_r}{2} & \text{for } 0 < \phi_r < \pi, \\ n'\pi - \frac{\phi_r}{2} < \theta_i < (n'-1)\pi + \frac{\phi_r}{2} & \text{for } \pi < \phi_r < 2\pi, \end{cases} \quad (10)$$

$(n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

と与えられる. (9) 式より, $\cos \phi_r - \cos 2\theta_i \rightarrow 0$ の極限で M が ∞ になることが判る. 条件 $\cos \phi_r = \cos 2\theta_i$ のもとで,

$$\sin^2 \phi_r = \frac{(2\alpha)^2 - (2\gamma)^2}{2ru_0^2}, \quad (11)$$

$$2\Omega_r = \Omega_L = 2k(2\alpha) + 2l(2\gamma) - \{(2\alpha)^2 + (2\gamma)^2\} \cot \phi_r, \quad (12)$$

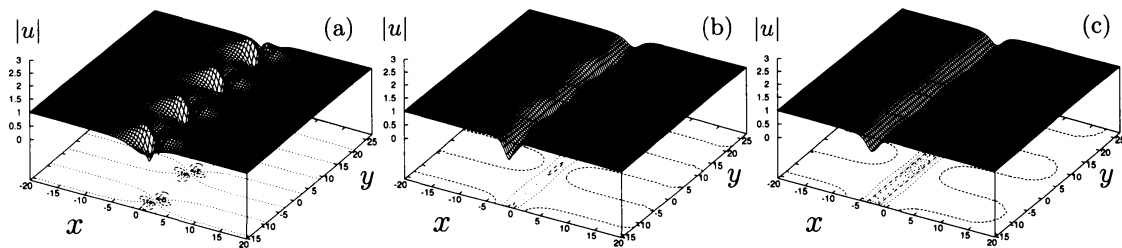


図 3: M の増加とともに周期ソリトンが line soliton に変わる. (a) $M = 1.82$; (b) $M = 10.15$; (c) $M = 106.1$.

が成り立つことが示される. これは, 波数 $(2\alpha, 2\gamma)$, 位相 $2\phi_r$, 振動数 $2\Omega_r$ をもつ line soliton の分散関係で, (3) 式と (4) 式はそれぞれ,

$$u = u_0 e^{i\zeta} \frac{1 + e^{\xi_L + i\phi_L}}{1 + e^{\xi_L}}, \quad v = -\frac{(2\alpha)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \xi_L, \quad (13)$$

になる [19]. ここで, $\xi_L = (2\alpha)x + (2\gamma)y - \Omega_L t + 2\xi^0$, $\phi_L = 2\phi_r$ で, これは line-soliton 解である. これは, パラメータ空間で正則と非正則の境界上のパラメータをもつ周期ソリトン解は line-soliton 解になることを意味している. 境界近傍で正則側のパラメータをもつ周期ソリトンを quasi-line soliton と呼ぶことにする. 図 3 は周期ソリトン解を M をだんだん大きくして描いたもので, M が 100 ぐらいになると見たところ line soliton と見分けがつかない. しかし, quasi-line-soliton 解はソリトンの中心より離れたところの裾野は,

$$u = u_0 e^{i(\zeta + \phi_r)} \left[e^{i\phi_r} \frac{\xi + \sigma}{|\xi + \sigma|} + \frac{2}{\sqrt{M}} e^{-|\xi + \sigma|} \left\{ \cos(\eta + i\phi_i) - e^{i\phi_r} \frac{\xi + \sigma}{|\xi + \sigma|} \cos \eta \right\} - e^{-2|\xi + \sigma|} (e^{i\phi_r} - e^{-i\phi_r}) \frac{\xi + \sigma}{|\xi + \sigma|} + \dots \right]. \quad (14)$$

と表すことができ, 純 line soliton よりゆっくり減衰し, しかも波打っている. 従って, 2-quasi-line-soliton 解が長距離相互作用の条件を満足しているとき, この波打っている構造が効果的に効いて, 2 つの line soliton 間の相互作用と異なる相互作用が存在するかもしれないという推測に導く. 以下の節で, 2 quasi-line solitons 間の相互作用を調べる. 内容は既発表論文 [19, 20] の要約である.

3 2 quasi-line solitons 間の相互作用

2 周期ソリトン解がパラメータの変化によって 2-line-soliton 解に変わっていくとき, 波数の虚数成分がどのようにして相互作用を特徴づける係数から消えていくかを示すのがこの節の目的だ. DS I 方程式の 2 周期ソリトン解は Satsuma と Ablowitz の解から次のように導ける [18].

$$u = \frac{g}{f}, \quad v = -2(\ln f)_{xx}, \quad (15)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
f &= 1 + \frac{M_1}{4} e^{2\xi_1} + \frac{M_2}{4} e^{2\xi_2} + \frac{M_1 M_2 L_1^2 L_2^2}{16} e^{2(\xi_1 + \xi_2)} \\
&\quad + e^{\xi_1} \left\{ \cos \eta_1 + \frac{M_2 L_1 L_2}{4} e^{2\xi_2} \cos(\eta_1 + \varphi_1 + \varphi_2) \right\} \\
&\quad + e^{\xi_2} \left\{ \cos \eta_2 + \frac{M_1 L_1 L_2}{4} e^{2\xi_1} \cos(\eta_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{\xi_1 + \xi_2} \left\{ L_1 \cos(\eta_1 + \eta_2 + \varphi_1) + L_2 \cos(\eta_1 - \eta_2 + \varphi_2) \right\}, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$g = u_0 e^{i\zeta} f(\xi_1 + i\phi_{1r}, \xi_2 + i\phi_{2r}, \eta_1 + i\phi_{1i}, \eta_2 + i\phi_{2i}), \tag{17}$$

また,

$$\begin{aligned}
\xi_j &= \alpha_j x + \gamma_j y - \Omega_{jr} t + \xi_j^0, & \eta_j &= \beta_j x + \delta_j y - \Omega_{ji} t + \eta_j^0, \\
\sin^2 \frac{\phi_{jr} + i\phi_{ji}}{2} &= \frac{(\alpha_j + i\beta_j)^2 - (\gamma_j + i\delta_j)^2}{2ru_0^2}, \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{jr} + i\Omega_{ji} &= 2k(\alpha_j + i\beta_j) + 2l(\gamma_j + i\delta_j) \\
&\quad - \{(\alpha_j + i\beta_j)^2 + (\gamma_j + i\delta_j)^2\} \cot \frac{\phi_{jr} + i\phi_{ji}}{2}, \quad (j = 1, 2). \tag{19}
\end{aligned}$$

もし, 波数 $(\alpha_j + i\beta_j, \gamma_j + i\delta_j)$ を ϕ_j と θ_j で,

$$\alpha_j + i\beta_j = \sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi_j}{2} \cosh \theta_j, \quad \gamma_j + i\delta_j = \sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi_j}{2} \sinh \theta_j, \tag{20}$$

と表すとき, M_j と $L_j e^{i\varphi_j}$ は次のように与えられる.

$$M_j = \frac{\cosh \phi_{ji} - \cos 2\theta_{ji}}{\cos \phi_{jr} - \cos 2\theta_{ji}}, \tag{21}$$

$$L_1 e^{i\varphi_1} = \frac{\sin N_1 \cdot \sin N_2}{\sin D_1 \cdot \sin D_2}, \tag{22}$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} = \frac{\sin N_3 \cdot \sin N_4}{\sin D_3 \cdot \sin D_4}, \tag{23}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2} \{ \Lambda_1^+ - \Lambda_2^+ - i(\Theta_1^- - \Theta_2^-) \}, & N_2 &= \frac{1}{2} \{ -\Lambda_1^- + \Lambda_2^- + i(\Theta_1^+ - \Theta_2^+) \}, \\
N_3 &= \frac{1}{2} \{ \Lambda_1^+ + \Lambda_2^- - i(\Theta_1^- - \Theta_2^+) \}, & N_4 &= \frac{1}{2} \{ -\Lambda_1^- - \Lambda_2^+ + i(\Theta_1^+ - \Theta_2^-) \}, \\
D_1 &= \frac{1}{2} \{ \Lambda_1^+ - \Lambda_2^- - i(\Theta_1^- - \Theta_2^+) \}, & D_2 &= \frac{1}{2} \{ -\Lambda_1^- + \Lambda_2^+ + i(\Theta_1^+ - \Theta_2^-) \}, \\
D_3 &= \frac{1}{2} \{ \Lambda_1^+ + \Lambda_2^+ - i(\Theta_1^- - \Theta_2^-) \}, & D_4 &= \frac{1}{2} \{ -\Lambda_1^- - \Lambda_2^- + i(\Theta_1^+ - \Theta_2^+) \},
\end{aligned}$$

また,

$$\Lambda_j^+ = \theta_{ji} + \frac{\phi_{jr}}{2}, \quad \Lambda_j^- = \theta_{ji} - \frac{\phi_{jr}}{2}, \quad \Theta_j^+ = \theta_{jr} + \frac{\phi_{ji}}{2}, \quad \Theta_j^- = \theta_{jr} - \frac{\phi_{ji}}{2}.$$

周期ソリトンの存在条件は $\cos \phi_{jr} > \cos 2\theta_{ji}$ より,

$$\left\{ \begin{array}{l} n\pi + \frac{\phi_{jr}}{2} < \theta_{ji} < (n+1)\pi - \frac{\phi_{jr}}{2} \quad \text{for } 0 < \phi_{jr} < \pi, \\ n'\pi - \frac{\phi_{jr}}{2} < \theta_{ji} < (n'-1)\pi + \frac{\phi_{jr}}{2} \quad \text{for } \pi < \phi_{jr} < 2\pi, \end{array} \right. \tag{24}$$

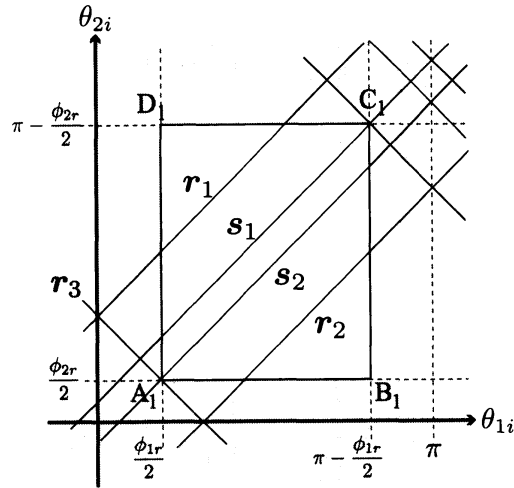


図 4: 2周期ソリトン解の第一条件に対するパラメータ空間の断面

と与えられる。特異な相互作用の条件は $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow \infty$ または $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow 0$ から次のように与えられる。

$$\theta_{2i} = \theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1r} + \phi_{2r}}{2} + 2n_1\pi, \quad (25a)$$

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \mp \frac{\phi_{1i} + \phi_{2i}}{2}, \quad (25b)$$

$$\theta_{2i} = -\theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1r} + \phi_{2r}}{2} + 2n_2\pi, \quad (26a)$$

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1i} - \phi_{2i}}{2}, \quad (26b)$$

$$\theta_{2i} = \theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1r} - \phi_{2r}}{2} + 2n_3\pi, \quad (27a)$$

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \mp \frac{\phi_{1i} - \phi_{2i}}{2}, \quad (27b)$$

$$\theta_{2i} = -\theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1r} - \phi_{2r}}{2} + 2n_4\pi, \quad (28a)$$

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1i} + \phi_{2i}}{2}, \quad (28b)$$

$$(n_1, n_2, n_3, n_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ここで、各連立方程式の中は符号同順で、付帯文字 (a) と (b) をもつ条件をそれぞれ第一条件、第二条件と以後呼ぶことにする。今、 $L_1 L_2$ が ∞ になる条件 (25) 式と (26) 式を共鳴条件、 $L_1 L_2$ が 0 になる条件 (27) 式と (28) 式を長距離相互作用の条件と仮に呼ぶことにする。各条件式は連立方程式のように見えるが、お互いのパラメータは入り混じっていないので、お互い独立な式で quasi-line soliton の条件は第一条件にかせられる。図 4 は第一条件に対するパラメータ空間を ϕ_{1r} と ϕ_{2r} を固

定して切った断面で、 ϕ_{1r} と ϕ_{2r} の値は共に 0 と $\pi/2$ の間で $\phi_{1r} > \phi_{2r}$ の仮定のもとに描かれている。四角の各枠内で 2 周期ソリトン解は正則で、コーナーの各点 $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ 上で解は 2-line-soliton 解になる。その少し内側に 2-quasi-line solitons の小さな領域が存在する。直線 r_1, r_2, \dots 上で共鳴第一条件、直線 s_1, s_2, \dots 上で長距離相互作用第一条件が満足される。大変興味があるのは、コーナー点 A_1, C_1, \dots 上で r 線と s 線が交わっていることである。このことは、共鳴第一条件と長距離相互作用第一条件が共にこの点の上で満足していることを意味する。対応する第二条件を満足していなければ、たとえ第一条件が共に満足していても特異な相互作用はおこらないが、第二条件を共に満足していると、この点の上で $L_1 L_2$ の値は $0/0$ になり、 $L_1 L_2$ の計算は慎重を要する。そこで、 A_1 点近傍のパラメータをもつ quasi-line solitons 間の相互作用を考えてみよう。 A_1 上で直線 r_3 と s_2 が交差している。 $n_2 = 0$ で上の符号をもつ共鳴第一条件 (26a) 式が r_3 上で満足され、 $n_3 = 0$ で下の符号をもつ長距離相互作用第一条件 (27a) 式が s_2 上で満足される。この 2 つの第一条件に対応する第二条件は上の符号をもつ (26b) 式と下の符号をもつ (27b) 式で、同じ式で $\Theta_1^+ - \Theta_2^+ = 0$ によって与えられる。

A_1 点近傍のパラメータをもつ $L_1^2 L_2^2$ の値は $\theta_{1i} = \phi_{1r}/2 + \varepsilon_1$ と $\theta_{2i} = \phi_{2r}/2 + \varepsilon_2$ ($O(\varepsilon_1) \sim O(\varepsilon_2) \sim O(\varepsilon)$) を (22) 式と (23) 式に代入することによって計算される。まず第二条件が満足されない場合、すなわち $|\Theta_1^+ - \Theta_2^+| \sim O(1)$ のとき、1 に比べて $O(\varepsilon)$ の値を無視する近似で $\sin N_2 \simeq \sin D_4$, $\sin N_3 \simeq \sin D_1$ と $\sin N_4 \simeq -\sin D_2^*$ が成り立つ。かくして、 $L_1^2 L_2^2$ の分子の $|\sin N_2|^2$, $|\sin N_3|^2$ と $|\sin N_4|^2$ は分母の $|\sin D_4|^2$, $|\sin D_1|^2$ と $|\sin D_2|^2$ で約分され、 $L_1^2 L_2^2$ の表現から Θ_1^+ と Θ_2^+ をもつ項が消える。このことは、 $L_1^2 L_2^2$ が波数の虚数成分に依らなくなることを意味し (β_j, δ_j は Θ_j^- に依らず、 Θ_j^+ と ϕ_{jr} で表されるので)、 $L_1^2 L_2^2$ は次のようになる [19],

$$L_1^2 L_2^2 = \frac{\cos(\phi_{1r} - \phi_{2r}) - \cosh(\Theta_1^- - \Theta_2^-)}{\cos(\phi_{1r} + \phi_{2r}) - \cosh(\Theta_1^- - \Theta_2^-)} + O(\varepsilon). \quad (29)$$

これは、波数 ($2\alpha_j, 2\gamma_j$), $\phi_{Lj} = 2\phi_{jr}$ と $\theta_{Lj} = \Theta_j^-$ ($j = 1, 2$) をもつ 2 つの line solitons 間の相互作用の係数と同じである。 $(\sqrt{M_1}/2)e^{\xi_1}$ と $(\sqrt{M_2}/2)e^{\xi_2}$ を $e^{\tilde{\xi}_1}$ と $e^{\tilde{\xi}_2}$ とし、 $M_1 \rightarrow \infty$, $M_2 \rightarrow \infty$ の極限をとり、 $1/\sqrt{M_1}$ 又は $1/\sqrt{M_2}$ を係数にもつ項を無視すると (16) 式は

$$f = 1 + e^{\tilde{\xi}_{L1}} + e^{\tilde{\xi}_{L2}} + L_L e^{\tilde{\xi}_{L1} + \tilde{\xi}_{L2}}, \quad (30)$$

になる。ここで、 $\tilde{\xi}_{Lj} = 2\tilde{\xi}_j$ で L_L は (29) 式で与えられる $L_1^2 L_2^2$ である ($L_L = L_1^2 L_2^2$)。これは 2 周期ソリトン解が、 A_1 点近傍で 2-line-soliton 解になることを意味する。

4 2 quasi-line solitons 間の長距離相互作用

quasi-line soliton はその中心から $O(\ln \sqrt{M})$ より大きな距離のところでは line soliton よりゆっくり減衰し、しかもその裾野は指数的に小さいが、波打って、周期ソリトンの特性を残している。 $\Theta_1^+ - \Theta_2^+ = O(\varepsilon)$ のとき、 A_1 点近傍で共鳴と長距離相互作用の両条件が近似的に満足される事になる。従って、2 quasi-line solitons 間の相互作用は 2 line-solitons 間の相互作用と異なる場合が存在するだろう。この節でそのような例を 2 つ示す。

まず,

$$\theta_{1i} = \frac{\phi_{1r}}{2} + \varepsilon_1, \quad \theta_{2i} = \frac{\phi_{2r}}{2} + \varepsilon_2, \quad \Theta_1^+ - \Theta_2^+ = \varepsilon_3, \quad (31)$$

の場合を考える。ここで、 $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, $0 < \varepsilon_2 \ll 1$, $|\varepsilon_3| \ll 1$ で $O(\varepsilon_1) \sim O(\varepsilon_2) \sim O(\varepsilon)$. (31) 式を (22) 式と (23) 式に代入すると、 $L_1 e^{i\varphi_1}$ と $L_2 e^{i\varphi_2}$ は

$$L_1 e^{i\varphi_1} \simeq - \frac{\sin \left[\frac{\phi_{1r} - \phi_{2r}}{2} - \frac{i}{2} (\Theta_1^- - \Theta_2^-) \right] \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i\varepsilon_3}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\phi_{1r} + i\phi_{1i}}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_{2r} + i\phi_{2i}}{2} \right)}, \quad (32)$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} \simeq \frac{\sin \left(\frac{\phi_{1r} + i\phi_{1i}}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_{2r} - i\phi_{2i}}{2} \right)}{\sin \left[\frac{\phi_{1r} + \phi_{2r}}{2} - \frac{i}{2} (\Theta_1^- - \Theta_2^-) \right] \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i\varepsilon_3}{2} \right)}, \quad (33)$$

と表される。かくして、 $L_1^2 L_2^2$ は次の様に与えられる [19],

$$L_1^2 L_2^2 = \frac{\cos(\phi_{1r} - \phi_{2r}) - \cosh(\Theta_1^- - \Theta_2^-)}{\cos(\phi_{1r} + \phi_{2r}) - \cosh(\Theta_1^- - \Theta_2^-)} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2}. \quad (34)$$

これは (29) 式で与えられる L_L と $[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2] / [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2]$ の積である。パラメータを $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \sim O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ 又は $|\varepsilon_3| \geq O(\varepsilon)$ のように選ぶとき、 $\{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2\} / \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2\}$ は $O(1)$ となり相互作用は波数 $(2\alpha_1, 2\gamma_1)$, $(2\alpha_2, 2\gamma_2)$, 位相 $(2\phi_{1r}, 2\phi_{2r})$ をもつ2つの line solitons の相互作用と同じである。しかし、 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$ で $|\varepsilon_3| / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$ の場合 (これはパラメータ空間で線 s_2 に近く、 A_1 より $O(\varepsilon_3)$ より大きく離れたパラメータをとることに対応する), L_L が $O(1)$ であっても $L_1^2 L_2^2$ は無限小になる。相互作用は長距離相互作用で、メッセンジャーは次式で与えられる周期ソリトンである。

$$f \simeq e^{2\tilde{\xi}_2} \left\{ 1 + \frac{2L_2}{\sqrt{M_1 M_2}} e^{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_1} \cos(\eta_1 - \eta_2 + \varphi_2) + e^{2(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2)} \right\}. \quad (35)$$

ここで、 $\tilde{\xi}_1 = (\sqrt{M_1}/2)e^{\xi_1}$, $\tilde{\xi}_2 = (\sqrt{M_2}/2)e^{\xi_2}$ で、 $L_2/\sqrt{M_1 M_2}$ は $O(1)$ であることを注意しておく。平行な2つの quasi-line solitons 間の周期ソリトンを介する長距離相互作用が図5に描かれている。第1 quasi-line soliton が第2 quasi-line soliton に近づくと、第1ソリトンは第2ソリトンと同じ波数 (β_2, δ_2) の小さな横方向の摂動をうける。その摂動は波数 $(\beta_1 - \beta_2, \delta_1 - \delta_2)$ をもつ周期ソリトンに発達して第1ソリトンから前方に放出され、第1ソリトンは第2ソリトンと同じソリトンに変わる。放出されたメッセンジャーは第2ソリトンに追い付き、第2ソリトンと共鳴相互作用して第2ソリトンは第1ソリトンと同じソリトンに変わり相互作用は完了する [19]。この相互作用は2つの line solitons が周期ソリトンを介して長距離相互作用しているように見えるが、このような相互作用は2-line-soliton 解にはない。ここで (34) 式より判るように、 ε_3 を固定して $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ と $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2\} / \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3^2\} \rightarrow 1$ で2周期ソリトン解は常に2-line-soliton 解になることを注意しておく。

次に、平行な2つの quasi-line solitons 間に成長減衰モード (growing-and-decaying (GD) mode) を介した長距離相互作用が存在するかどうか調べてみよう。line soliton と GD モード間に共鳴現

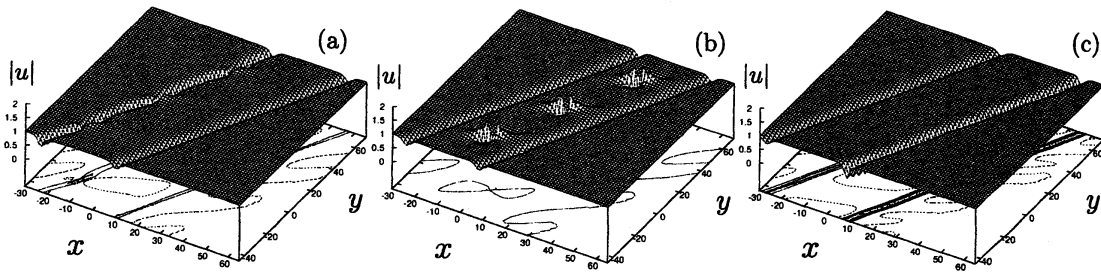


図 5: 平行な 2つの quasi-line solitons 間の周期ソリトンを介する長距離相互作用

象が存在するにもかかわらず, 2-line-soliton 解ではそのような相互作用は記述できない. そこで, $\phi_{1i} = \phi_{2i} = \phi_i$, $\theta_{1r} = \theta_{2r}$ そして θ_{1i} , θ_{2i} と ϕ_{1r} を次のようにとる.

$$\theta_{1i} = \frac{\phi_{1r}}{2} + \varepsilon_1, \quad \theta_{2i} = \frac{\phi_{2r}}{2} + \varepsilon_2, \quad \phi_{1r} = \pi - (\phi_{2r} + 2\varepsilon_4), \quad (36)$$

そして $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \Delta_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_4 - \varepsilon_2 = \Delta_2 \varepsilon_2$ ($|\Delta_1| \ll 1$, $|\Delta_2| \ll 1$) を仮定する. すると, $\alpha_1 - \alpha_2 = O(\Delta_1 \varepsilon_2)$, $\gamma_1 - \gamma_2 = O(\Delta_1 \varepsilon_2)$, $\beta_1 - \beta_2 = O(1)$ と $\delta_1 - \delta_2 = O(1)$ になることが判る. (36) 式を (22) 式と (23) 式に代入するとき, $L_1 e^{i\varphi_1}$ と $L_2 e^{i\varphi_2}$ は次のように近似される,

$$L_1 e^{i\varphi_1} \simeq \frac{\cos \phi_{2r}}{\sin \phi_{2r} + i \sinh \phi_i} \cdot \Delta_1 \varepsilon_2, \quad (37)$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} \simeq \frac{\sin(\phi_{2r} - i\phi_i)}{(2 - \Delta_1)\varepsilon_2}. \quad (38)$$

そして, $L_1^2 L_2^2$ は

$$L_1^2 L_2^2 = \cos^2 \phi_{2r} \cdot \frac{\Delta_1^2}{(2 - \Delta_1)^2} \simeq \cos^2 \phi_{2r} \cdot \frac{\Delta_1^2}{4} \ll 1, \quad (39)$$

となる. (36) 式を使うと, (18) 式と (19) 式より,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{2r}\right) = \frac{(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2}{2r u_0^2} + O(\varepsilon), \quad (40)$$

$$\Omega_{1r} - \Omega_{2r} = \{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2\} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{2r}\right) + O(\varepsilon), \quad (41)$$

の関係をうる [19]. これは, 波数 $(\beta_1 - \beta_2, \delta_1 - \delta_2)$, 位相 $\pi - 2\phi_{2r}$ の GD モードの分散関係である. これらは, 平行な 2つの quasi-line solitons 間に GD モードを介した長距離相互作用の存在を示している. 図 6 は GD モードを介した相互作用の模式図で, 波線 AB は GD モードを示す. AB の中点 M で $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ が $O(1)$ になるように $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$ の位相定数を $\hat{\xi}_1 = \sqrt{L_1 L_2} \tilde{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2 = \sqrt{L_1 L_2} \tilde{\xi}_2$ のように変える. すると, M 近傍で f は,

$$f = \frac{e^{2\hat{\xi}_1}}{L_1 L_2} \left[1 + \frac{2L_2}{\sqrt{M_1 M_2}} e^{\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2} \cos(\eta_1 - \eta_2 + \varphi_2) + e^{2(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2)} \right], \quad (42)$$

となる. ここで, $\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1 = (\Omega_{1r} - \Omega_{2r})t + \sigma$. これは GD モードの f である. 図 7 は平行な 2つの

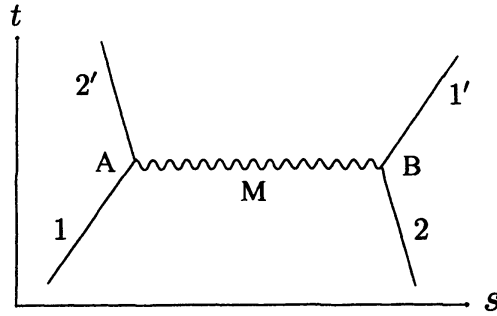


図 6: 平行な 2 つの quasi-line solitons 間の GD モードを介した相互作用の模式図

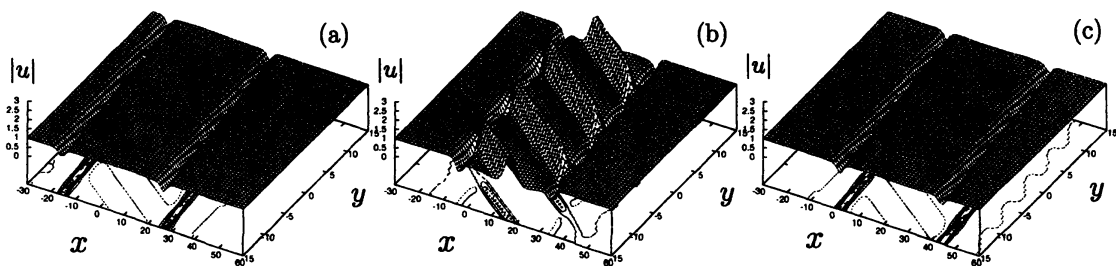


図 7: 平行な 2 つの quasi-line solitons 間の GD モードを介した長距離相互作用

quasi-line solitons 間の GD モードを介した典型的な長距離相互作用を示す [19]. 第 1 ソリトンが第 2 ソリトンに $\ln(L_1 L_2)/\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ の距離に近づくと, GD モードが 2 つのソリトン間で成長をはじめ, 2 つの quasi-line soliton は GD モードの成長, 減衰を通して波数の虚数成分を交換する. この相互作用も 2-line-soliton 解には存在しない.

5 KP I 方程式の quasi-line soliton

波数 $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ の KP I 方程式の周期ソリトン解は次のように与えられる [3],

$$u = 2 \frac{\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{D}\right) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{D}} \cosh \xi \cos \eta + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{D}} \sinh \xi \sin \eta}{\left(\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{D}} \cos \eta\right)^2}, \quad (43)$$

ここで,

$$\Omega_r = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - \frac{3}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\gamma^2 - \alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta), \quad (44)$$

$$\Omega_i = 3\alpha^2\beta - \beta^3 - \frac{3}{\alpha^2 + \beta^2}(2\alpha\gamma\delta - \beta\gamma^2 + \beta\delta^2), \quad (45)$$

$$D = \frac{Y^2 + \beta^2}{Y^2 - \alpha^2}. \quad (46)$$

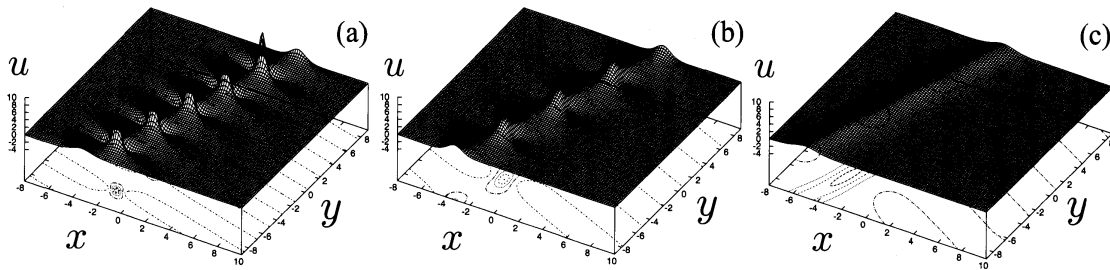


図 8: D の増加とともに周期ソリトンが line soliton に変わる. (a) $D = 1.5$; (b) $D = 3.2$; (c) $D = 123$.

存在条件は

$$Y^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} > \alpha^2, \quad (47)$$

で与えられる. (46) 式より, $Y^2 \rightarrow \alpha^2 + 0$ の極限で D が ∞ になることが判る. 条件 $Y^2 = \alpha^2$ のもとで (43) 式及び (44) 式は次のように書ける.

$$u = \frac{(2\alpha)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} (2\alpha x + 2\gamma y - \Omega_L t + \sigma_L) \quad (48)$$

$$2\Omega_r \rightarrow \Omega_L = (2\alpha)^3 - 3 \frac{(2\gamma)^2}{2\alpha}. \quad (49)$$

これは, $Y^2 \rightarrow \alpha^2 + 0$ で周期ソリトン解が line-soliton 解になることを意味している. 図 8 は周期ソリトン解の D をだんだん大きくしていったもので, DS I 方程式の場合と同様, D が 100 ぐらいで, 見たところ line soliton と区別がつかない. DS I 方程式の場合と同様に, KP I 方程式の 2 周期ソリトン解を使って 2 quasi-line solitons 間に周期ソリトンを介した長距離相互作用の存在を示すことができる [20].

6 まとめ

KP I 方程式及び DS I 方程式において, 周期ソリトン解のパラメーター空間で解の存在領域の境界 (解が正則から非正則になる境界) にパラメーター点が近づいてゆくと, 周期ソリトン解は line-soliton 解へと変わる. 境界上で波数の虚数成分は 0 でないので, line soliton は波数の虚数成分をかくれたパラメーターとして持っていると見ることができる. 波数の実数成分と虚数成分の間にある条件が満足されれば, 周期ソリトンは line soliton に変わる. このような見方をすれば, 周期ソリトンと line soliton が共鳴して何故に line soliton になるのかが理解できる. ここで, 境界近傍のパラメーターをもつ周期ソリトンを quasi-line soliton と呼ぶことにした. 図に描くと line soliton のように見える. しかし, 指数的に減衰したソリトンの裾野は少し波打って, 周期ソリトンの特性を残している. 我々はこのような 2 つの quasi-line solitons の相互作用を調べた. 図 9 は 2 周期ソリトンの共鳴相互作用の第一条件に関わるパラメーター空間, 図 4 の A_1 点近傍の拡大図である. A_1 を通る線 (a), (b) 上でそれぞれの周期ソリトンが line soliton になるので, A_1 点のパラメーターを持つ解は 2-line-soliton 解で

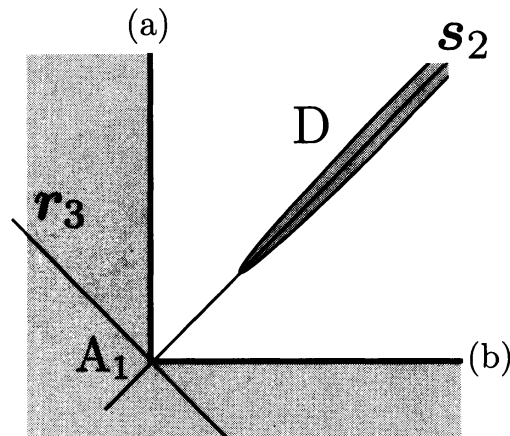


図 9: 図 4 の A_1 点近傍の拡大図.

ある. A_1 点の近傍で解の存在領域の内側のパラメータをもつ解は 2-quasi-line-soliton 解である. ここで注意したいのは, r_3 線と s_2 線が A_1 上で交わっていることである. すなわち, 共鳴と長距離相互作用の第一条件が共に A_1 点で満足していることである. この 2つの条件に対応する第二条件が同じであることは指摘した. もし第二条件がほぼ満足されているとき, 2つの quasi-line soliton の相互作用は A_1 点近傍でパラメータ敏感になる. すなわち, 少しのパラメータの変化に対して現象が著しく変わる. 特に, パラメータ点が s_2 線を横切るとき, 領域 D で 2つの quasi-line solitons 間に新しい長距離相互作用があらわれる. それは 2つの line solitons がメッセンジャーとして周期ソリトンを紹介して長距離相互作用しているように見える. このような相互作用は 2-line-soliton 解にはない. このようなことが起こるのは拡大しないとわからないが, quasi-line soliton の裾野が波打って周期ソリトンの特性を残しているためである.

参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [2] J. W. Miles: J. Fluid Mech. **79** (1977) 157; **79** (1977) 171.
- [3] M. Tajiri and Y. Murakami: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3029.
- [4] R. S. Johnson and S. Thompson: Phys. Lett. A **66** (1978) 279.
- [5] V. E. Zakharov: J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9** (1968) 190.
- [6] D. J. Benney and G. J. Roskes: Stud. Appl. Math. **48** (1969) 377.
- [7] A. Davey and K. Stewartson: Proc. R. Soc. London A **338** (1974) 101.
- [8] N. C. Freeman and A. Davey: Proc. R. Soc. London A **344** (1975) 427.
- [9] M. Tajiri and Y. Murakami: Phys. Lett. A **143** (1990) 217.

- [10] Y. Murakami and M. Tajiri: *Wave Motion* **14** (1991) 169.
- [11] M. Tajiri, Y. Fujimura and Y. Murakami: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 783.
- [12] Y. Murakami and M. Tajiri: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 791.
- [13] D. E. Pelinovsky and Y. A. Stepanyants: *JETP* **77** (1993) 602.
- [14] D. E. Pelinovskii and Y. A. Stepanyants: *JETP Lett.* **57** (1993) 24.
- [15] K. A. Gorshkov, D. E. Pelinovskii and Y. A. Stepanyants: *JETP* **77** (1993) 237.
- [16] Y. Watanabe and M. Tajiri: *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 705.
- [17] M. Tajiri, T. Arai and Y. Watanabe: *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 4051.
- [18] J. Satsuma and M. J. Ablowitz: *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1496.
- [19] M. Tajiri and T. Arai: *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 235204.
- [20] M. Tajiri and T. Arai: *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 335209.