

# 小規模格子中の非線形局在励起の走行モードの速度について

金沢大・自然 佐藤 政行 (Masayuki Sato)

高尾 裕一 (Yuichi Takao), 西村 聡逸 (Soichi Nishimura)

史 偉華 (Weihua Shi), 佐田 由梨奈 (Yurina Sada)

Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University

## 概要

ILM の走行モードにはスムーズな走行とカオス的な走行が存在し、それらの走行速度は格子系を励起する周波数に依存している。一次元系のカンチレバーアレイでの実験と時間発展シミュレーションの結果から走行速度と励起周波数の関係を解析する。

## 1 ILM

格子系が持つ非線形性と離散性により存在することができる空間的に局在した振動モードのことを非線形局在励起 Intrinsic Localized Mode (ILM) [1] または Discrete Breather (DB) [2] と呼ぶ。ILM には静止モードと走行モードが存在する。静止モードは非線形性による周波数シフトによりバンドの外の周波数域で存在することができる振動モードで、空間的に固定されている。格子の振幅を  $(\dots, 0, -1/2, 1, -1/2, 0, \dots)$  のように表せる S-T モード [1] と  $(\dots, 0, -1/2, 1, -1, 1/2, 0, \dots)$  のように表せる Page モード [3] がある。一方、走行モードはバンド内での振動モードで走行速度は格子系を励起する周波数に依存している。[4] ILM が現実的に存在する系としては Si 単結晶[5]や反強磁性体[6]などが知られているが、本研究では観測が比較的容易な一次元系のカンチレバーアレイ[7],[8]を用いて走行モードを観測し、実験結果と時間発展シミュレーションから走行速度と励起周波数の関係や走行モードの特性を詳しく解析する。

## 2 カンチレバーアレイ

ILM を観測する系として図 1 の左側に示すようなカンチレバーアレイを用いる。これは MEMS ( MicroElectroMechanical Systems ) 技術を用いて作られたマイクロサイズの系で、カンチレバーの一本の長さが  $50 \mu\text{m}$  程度と非常に小さいため、わずかなエネルギーで大きな振幅となり非線形性が強く現れる。実験で用いたカンチレバーアレイはカンチレバー同士が Overhung によって結合されており、長さが交互に異なるものとなっている。この系は減衰のある結合振動子系と見なすことができ運動方程式は次の式で表わされる。

$$\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i + \frac{m_i}{\tau} \dot{x}_i + k_{20} x_i + k_{40} x_i^3 + \sum_j k_{2l}^{(j)} (2x_i - x_{i+j} - x_{i-j}) \\
+ k_{4l} \left\{ (x_i - x_{i+1})^3 + (x_i - x_{i-1})^3 \right\} = m_i \alpha \cos(\Omega t)
\end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $x_i$ は*i*番目の格子の変位、 $m_i$ は質量、 $\tau$ は時定数、 $k_{20}, k_{40}$ はそれぞれ線形と非線形のオンサイト（自身の変位に対して働く力）のばね定数、 $k_{2l}, k_{4l}$ はそれぞれ線形と非線形のインターサイト（近接した格子との相対的な変位に対して働く力）のばね定数、 $\alpha$ はドライバーによる加速度で $\Omega$ は励起周波数を表す。実験ではドライバーとしてピエゾ素子を用い、カンチレバーアレイ全体を一様に励起する。分散関係は図1の右側のようになる。光学モードの $k=0$ モードがバンドの頂上となり、ILMの静止モードはバンドの頂上より少し上の周波数域で存在する。それに対して走行モードは音響モードの中心より少し上の周波数域で存在する。

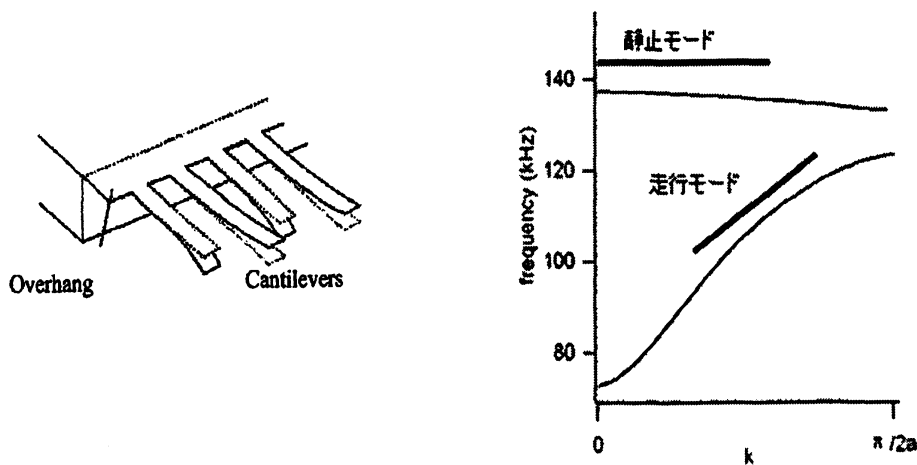


図1 カンチレバーアレイとその分散関係。

### 3 解析結果

#### 3.1 走行モード

図2, 図3はそれぞれ実験により観測したスムーズな走行モードとカンチレバーアレイの分散関係である。図2の(a), (b), (c)の走行モードは図3の水平な線で表わされる(a), (b), (c)の周波数で系を励起したときに観測されたものである。また、図2の走行モードの観測結果から得られた走行速度の値を傾きとして図3に表したものが斜線(a), (b), (c)である。(a), (b), (c)それぞれの水平な線と斜線との交点が分散曲線上にあることから、走行モードの走行速度は群速度とほぼ一致している。

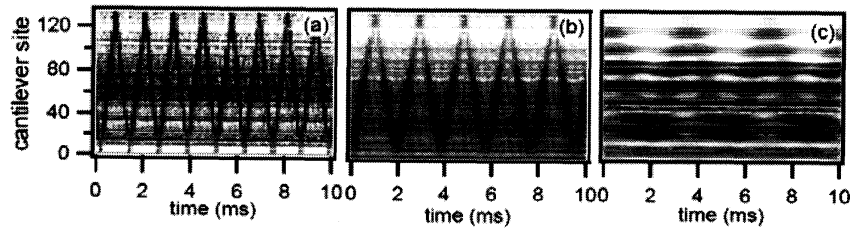


図2 カンチレバーアレイでの ILM の走行モード。ピエゾ素子による系の励起レベルは同じ(5V)で、周波数は(a)110.086kHz,(b)115.94kHz,(c)119.34kHz .

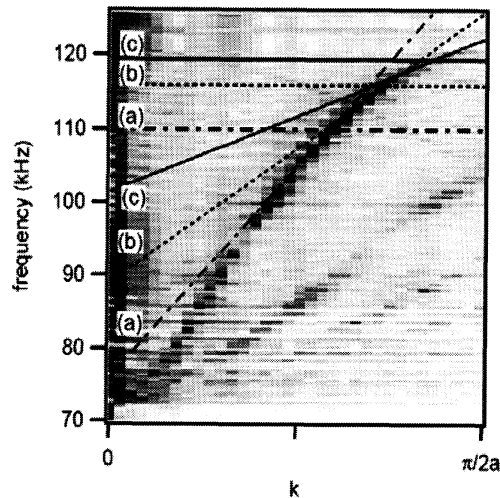


図3 実験により測定したカンチレバーアレイの分散関係と走行モードの速度。水平な線(a),(b),(c)は図2の走行モードの励起周波数を表し、斜線(a),(b),(c)は実験結果から求めた走行モードの速度を表す。

### 3.2 走行モードの速度分布図

走行モードにはスムーズな走行とカオス的な走行が存在し、それらの走行速度は系の励起周波数に依存している。走行速度と励起周波数の関係を時間発展シミュレーションにより調べた。得られた走行モードの速度分布が図4の(a)である。縦軸が系の励起周波数で横軸が走行モードが系を1往復する周波数(走行速度)となっている。この速度分布図は次のような方法により得られたものである。まず、走行モードが発生している状態で1番目の格子のエネルギーの時間変化を測定する。それをフーリエ変換すると走行モードが系を往復する周波数の位置にピークをもつスペクトルが得られるので、励起周波数ごとにそのスペクトルを測定し並べることで速度分布が得られる。図4(b)のようなスムーズな走行モードが発生しているとき速度分布には1つの大きなピークが見られ、(c)のようにカオス的な走行モードが発生しているときには2つの広がったピークが見られる。また、スムーズな走行モードとカオス的な走行モードの境界には走行モードがまったく生成されず Low

Energy State となる励起周波数域が存在する。Low Energy State は静止モードにも存在している。[9]

シミュレーションでは、速度スペクトルにスムーズな走行領域で1つの大きなピークが見られ、カオス的な走行領域で2つの広がったピークが見られる。このような走行モードの速度パターンは図5のように実験でも観測される。

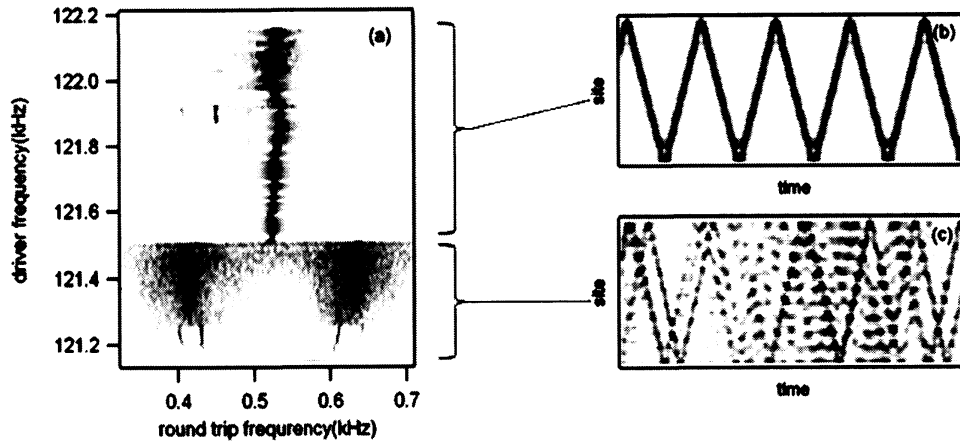


図4 (a)はシミュレーションにより得られた走行モードの速度分布。(b), (c)はそれぞれスムーズな走行モードとカオス的な走行モード。

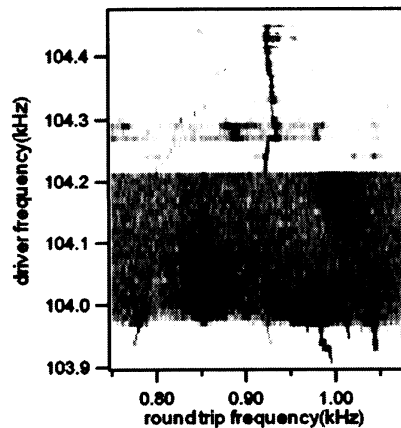


図5 実験により得られた走行モードの速度分布。

### 3.3 速度分布とノーマルモード

走行モードの速度はノーマルモードの周波数と群速度に深く関係している。ILMを観測するモデルとして用いたカンチレバーアレイは格子数が有限であるため、ノーマルモードは離散的な周波数をとる。また実験ではドライバーとしてピエゾ素子を用い系全体を一様に励起しているので、ドライバーとカップリングし励起されるアクティブなノーマルモードと、ドライバーとカップリングされず励起されないインアクティブなノーマルモードが

交互に存在する。

ノーマルモードは分散関係上で離散的に分布しているため、その群速度を求めるときは差分を用いる。式は次のようになる。

$$v_i = \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2\Delta k} \quad (2)$$

ここで、 $\omega_i$ は*i*番目のノーマルモードの周波数を表す。 $\Delta k = 2\pi/aN$ であり、*a*はカンチレバーの間隔、*N*はカンチレバーの数を表す。これを系の往復周波数に直すと次の式になる。

$$f_i = \frac{v_i}{2aN} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} \quad (3)$$

ノーマルモードの周波数と、群速度を往復周波数に換算した値を走行モードの速度分布図にプロットしたものが図6である。+印はアクティブなノーマルモード、○印はインアクティブなノーマルモードを表し、数字はモード番号を表す。この図から速度分布のいくつかの特徴が分かる。まず、スムーズな走行領域では1つのピークが見られカオス的な走行領域では2つのピークが見られるという走行モードの速度パターンは、アクティブなノーマルモード間の周波数域ごとに観測される。次に図6の励起周波数範囲に見られるスムーズな走行領域の1つの大きなピークは、上からそれぞれ43, 41, 39番目のアクティブなノーマルモードの群速度とほぼ一致している。最後に図6の中心にあるカオス的な走行領域に注目すると、2つの広がったピークはモード39と43の群速度とほぼ一致している。これらはキャリアモードとなっているモード41の1つ前と1つ後のアクティブなノーマルモードである。キャリアモードとはドライバーによって最も強く励起されているノーマルモードのことを言う。

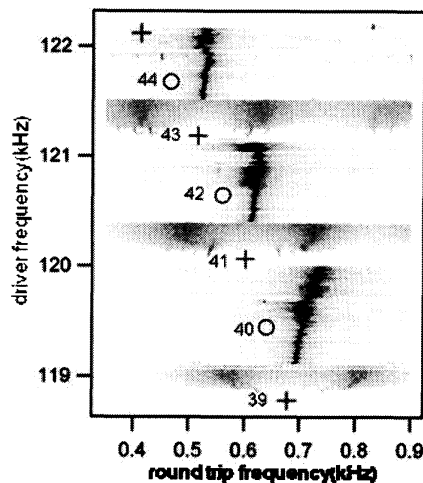


図6 シミュレーションにより得られた速度分布とノーマルモードの関係。  
+印はアクティブなノーマルモード、○印はインアクティブなノーマルモードを表し、数字はモード番号を表す。

### 3.4 カオス的な走行領域

カオス的な走行領域の速度分布には2つの興味深い特徴があり、それらについて考えてみる。まずは図7に示すようにカオス的な走行モードの周波数域の下部に見られるいくつかの細かい縦線について説明する。励起周波数を上げていくと変調不安定性により、まず図7のAとaが示す走行モードが生成される。Aの群速度はキャリアモードの1つ前のアクティブなノーマルモードの群速度と正確に一致している。aはキャリアモードに対してAと対称な位置にあることからキャリアモードとAの走行モードの四波混合効果より発生したものと考えられる。次に励起周波数を上げていくと同様にBとbが示す走行モードが生成する。Bの群速度はキャリアモードの1つ後のアクティブなノーマルモードの群速度と正確に一致しており、bはキャリアモードとBの四波混合効果より発生したものと考えられる。さらに励起周波数を上げていくと、いま発生したA, a, B, bの走行モード同士あるいはキャリアモードとの四波混合効果より等間隔で異なる群速度をもつ複数の走行モードが生成している状態となり最終的にカオス的な領域になる。

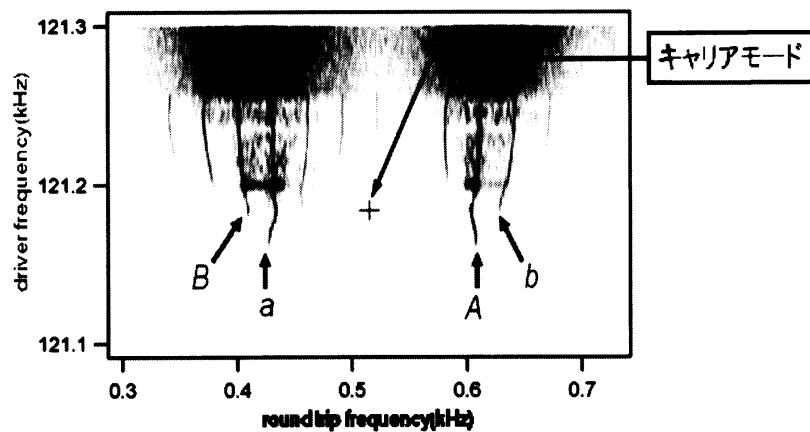


図7 不安定領域下部の速度分布。+印はキャリアモードを表す。A, Bはそれぞれキャリアモードの1つ前と1つ後のアクティブなノーマルモードの群速度位置に発生している走行モード。a, bはそれぞれAとキャリアモード、Bとキャリアモードの四波混合効果により発生した走行モード。

次に速度分布のピークが2つに分かれており中心が空洞になっていることについて説明する。ここで、はじめにスムーズな走行モードについて考える。k番目のノーマルモードをキャリアとするスムーズな走行モードが生成されている状態では、変調不安定性と四波混合効果よりキャリアモードを中心としていくつかのノーマルモードが励起されている。図8(a)のモデルのように励起された各ノーマルモードのうちの一部が波束を作り、スムーズな走行モードとなっている。この場合はキャリアモードがドライバーによって直接励起されていない状態である。それに対してカオス的な走行モードが生成している場合はキャリアモードがドライバーによって直接励起されている状態である。このときは図8(b)のモデル

のようにキャリアモード全てがドライバーに捕獲されていて、波束に参加できずキャリアモードを中心とする走行モードは生成されない。よってカオス的な走行領域では速度分布に2つのピークが現れ、中心が空洞になると考えられる。

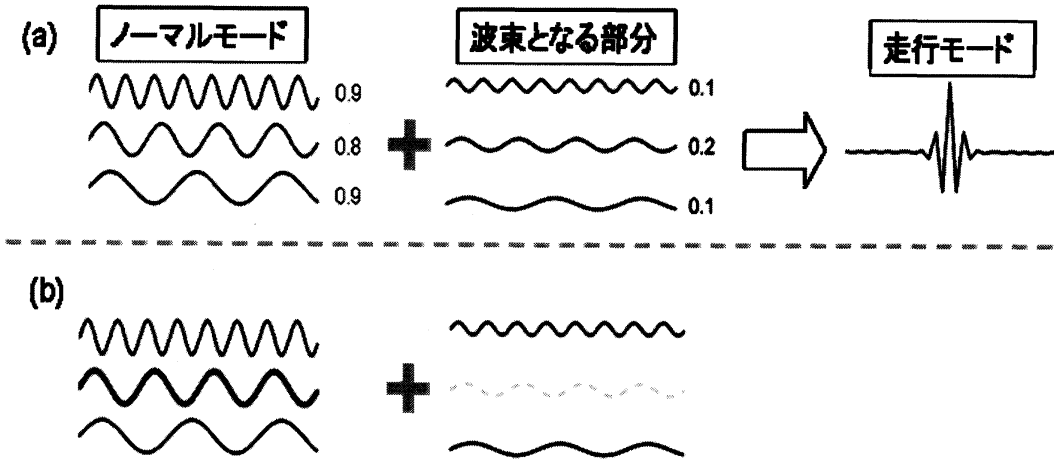


図8 ノーマルモードを形成する部分と波束となる部分のエネルギー配分のモデル。(a)はドライバーによってキャリアモードが直接励起されておらず、スムーズな走行となる場合で(b)はキャリアモードが直接励起されており、カオス的な走行となる場合である。

### 3.5 境界条件と励起方法が異なる系での走行モード

図6の速度分布に見られるようにスムーズな走行モードの周波数域はアクティブなノーマルモード間に存在している。ここで格子数を増やしていきノーマルモード間の周波数域を狭くしていった場合スムーズな走行モードは生成されるのか、という疑問が生じる。また、励起周波数を上げていくとある値でスムーズな走行は消えるが、これは次のアクティブモードが強く励起されることで走行の邪魔になっていると考えられる。そこで邪魔になるノーマルモードが励起されなければスムーズな走行モードの周波数域は広くなると考え、境界条件と励起方法を変えシミュレーションを行った。

図9は境界条件と励起方法を変えたときの走行モードであり、実線は系全体のエネルギーの時間変化を表す。(a)は今まで考えてきた(固定端, 一様励起)での走行モードで、ILMが系の端にきたときエネルギーが増加している。つまり、走行モードは系の端でドライバーからエネルギーを受け取っていることが分かる。よって境界条件を固定端から周期境界条件とした場合、一様励起ではエネルギーを受け取ることができない。そこで(周期境界条件, 点励起)としたときの走行モードが(b)である。破線は点励起している格子を表す。エネルギー変化をみるとILMが励起点を通過するときに増加していることから、走行モードは励起点でドライバーからエネルギーを受け取っていることが分かる。(c)はキ

キャリアとするノーマルモードのモード形状で励起した（周期境界条件，進行波励起）での走行モードである。エネルギー変化はほぼ見られないことから、走行モードは常にドライバーからエネルギーを受け取っている状態であることが分かる。(a), (b), (c) の条件に対するエネルギー授受方法と励起されるノーマルモードの選択性を表 1 にまとめた。

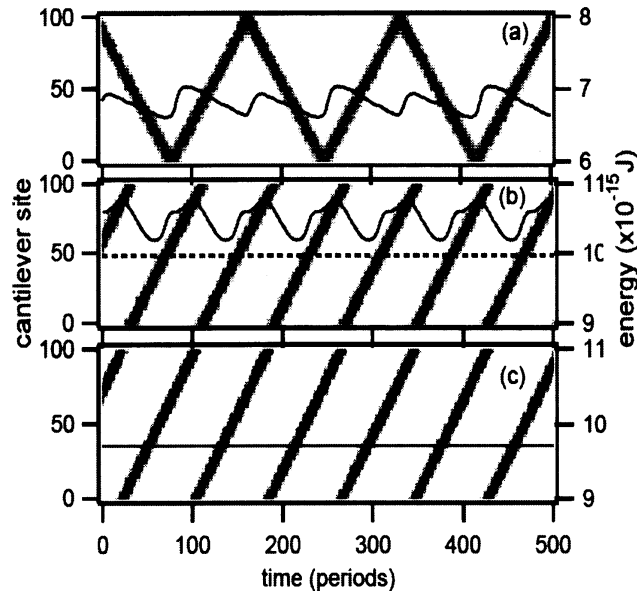


図 9 シミュレーションにより得られた走行モードと系のエネルギー変化。(a)は固定端で一様に励起した場合の走行モード。実線は系のエネルギーを表し、走行モードが端にきたとき増加している。(b)は周期境界条件で破線の位置で点励起したときの走行モード。エネルギーは走行モードが励起点を通過するとき増加している。(c)は周期境界条件で進行波励起したときの走行モード。エネルギーはほぼ一定となっている。

表 1 境界条件、励起方法の変化に対する走行モードのエネルギー授受方法とモード選択性

固定端 一様励起	格子の端	ノーマルモードの半分が励起可能
周期的境界条件 1点励起	1点	全モード励起可能
周期的境界条件 進行波励起	全体	一つのノーマルモードのみ励起可能



### 3.6 格子数を増やしたときの速度分布

キャリアとするノーマルモードを1つだけ励起することができる(周期境界条件, 進行波励起)で走行モードの速度分布を測定したものが図10である。数字はモード番号を表す。左のグラフから順に格子数100, 200, 400となっており、それぞれモード18, 35, 69をキャリアモードとしている。格子数が倍増するにつれノーマルモード間に1つずつ新しいノーマルモードが増えている。ここで格子数200と400の速度分布図に注目する。スムーズな走行モードの励起周波数域はそれぞれモード36とモード70, 71の周波数を通過しているがスムーズな走行モードが維持されていることが分かる。

走行の邪魔になるノーマルモードを励起しない方法として等間隔で点励起する方法もある。格子数100, 200, 400いずれも100点間隔で同位相で点励起することにより邪魔になると考えられるノーマルモードは励起されない。この方法で測定された走行モードの速度分布が図11である。

上記の2つの測定方法での結果より、邪魔になる走行モードが励起されなければ格子数を増やしたとしても、スムーズな走行モードが存在する励起周波数域は変わらないといえる。

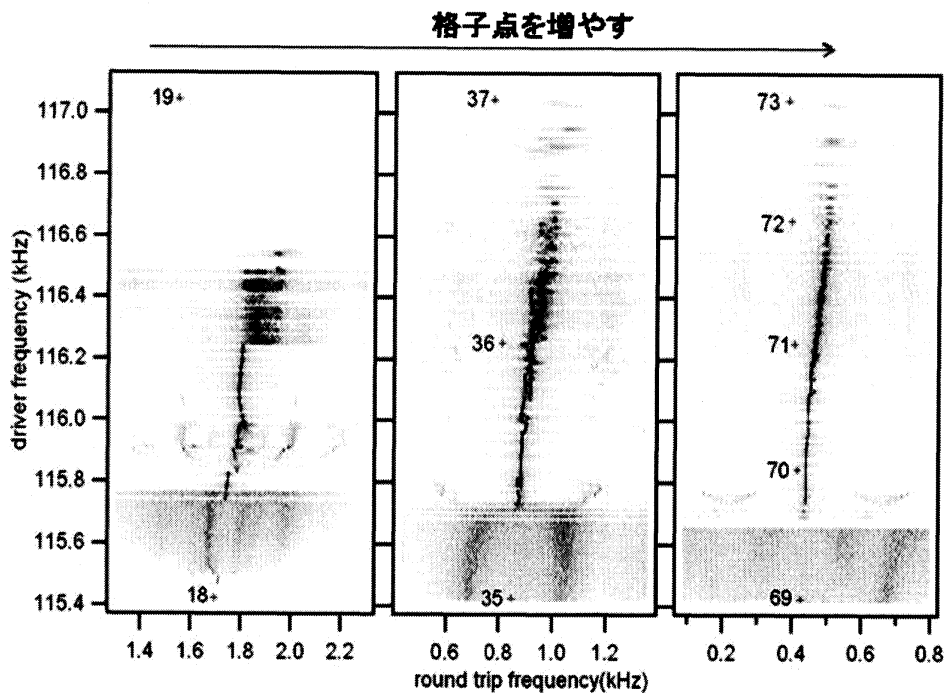


図10 周期境界条件で進行波励起したときの速度分布。格子数は左から100, 200, 400となっている。数字はモード番号を表す。

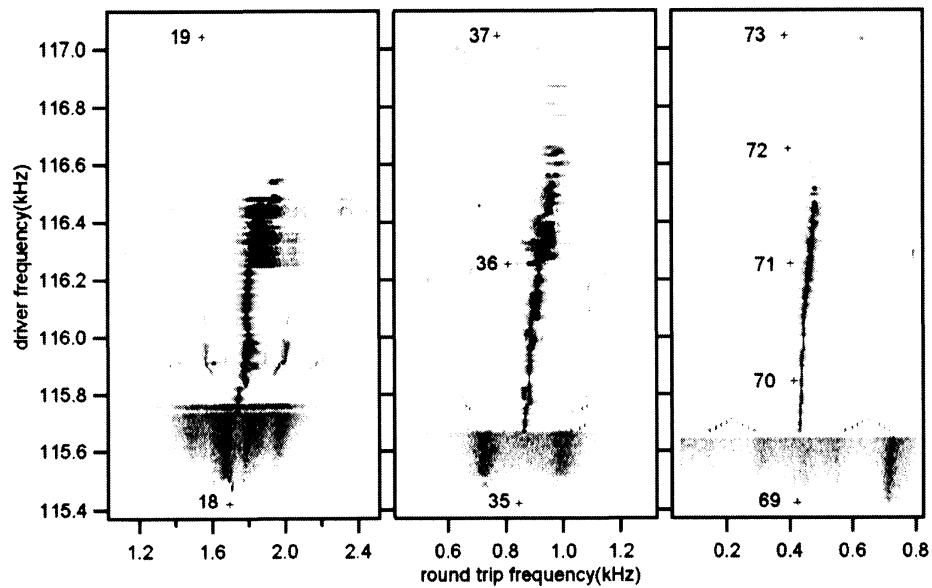


図 11 周期境界条件で点励起したときの速度分布。格子数は左から 100, 200, 400 となっているが、どの場合も 100 点間隔で点励起した。

## 4 まとめ

本研究では ILM の走行モードの性質を調べるため、一次元多自由度系のカンチレバーアレイを用いた実験と時間発展シミュレーションの結果から走行モードの速度分布を測定した。その結果、スムーズな走行モードの速度分布には 1 つの大きなピークが見られキャリアとなるノーマルモードの群速度と一致しており、カオス的な走行モードの速度分布にはキャリアとなるノーマルモードの両サイドに 2 つの広がったピークが見られた。また走行モードとノーマルモードが深く関係していることを確かめた。この結果は NOLTA, IEICE, (2012) [16]に記載される。

## 参考文献

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, “Intrinsic Localized Modes in Anharmonic Crystals,” *Phys. Rev. Lett.*, **61**, p. 970, (1988).
- [2] S. Flach and A. V. Gorbachb, “Discrete breathers - Advances in theory and applications,” *Phys.Reports*, **467**, p. 1, (2008).
- [3] J. B. Page, “Asymmetric solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems” *Phys. Rev. B.*, **41**, p. 7835, (1990).
- [4] S. R. Bickham, A. J. Sievers and S. Takeno, “Numerical measurements of the shape and dispersion relation for moving one-dimensional anharmonic localized modes,” *Phys. Rev. B*,

- 45, p. 10344, (1992).
- [5] N. K. Voulgarakis et al., “Computational investigation of intrinsic localization in crystalline Si” *Phys. Rev. B*, **69**, p. 113201, (2004).
- [6] R. Lai, A. J. Sievers, “ $(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$ : A physical system for the experimental investigation of intrinsic localized modes” *Phys. Rev. Lett.*, **81**, p. 1937, (1998).
- [7] M. Sato and A. J. Sievers, “Driven localized excitations in the acoustic spectrum of small nonlinear macroscopic and microscopic lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, **98**, p. 214101, (2007).
- [8] Y. S. Kivshar, “Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes” *Phys. Rev. E*, **48**, p. 3077, (1993).
- [9] Q. Chen, L. Huang, Y.-C. Lai, and D. Dietz, “Dynamical mechanism of intrinsic localized modes in microelectromechanical oscillator arrays,” *Chaos*, **19**, p. 013127, (2009).
- [10] M. Sato, B. E. Hubbard, and A. J. Sievers, “Colloquium: Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays,” *Rev. Mod. Phys.*, **78**, p. 137, (2006).
- [11] Y. S. Kivshar and M. Peyrard, “Modulational instabilities in discrete lattices,” *Phys. Rev. A*, **46**, p. 3198, (1992).
- [12] K. W. Sandusky and J. B. Page, “Interrelation between the stability of extended normal modes and the existence of intrinsic localized modes in nonlinear lattices with realistic potentials,” *Phys. Rev. B*, **50**, p. 866, (1994).
- [13] I. Daumont, T. Dauxois and M. Peyrard, “Modulational instability: first step towards energy localization in nonlinear lattices,” *Nonlinearity*, **10**, p. 617, (1997).
- [14] R. Lai and A. J. Sievers, “Modulational instability of nonlinear spin waves in easy-axis antiferromagnetic chains,” *Phys. Rev. B*, **57**, p. 3433, (1998).
- [15] M. Johansson, A.M. Morgante, S. Aubry, and G. Kopidakis, “Standing wave instabilities, breather formation and thermalization in a Hamiltonian anharmonic lattice,” *Eur. Phys. J. B*, **29**, p. 279, (2002).
- [16] M. Sato, N. Fujita, Y. Takao, S. Nishimura, W. Shi, Y. Sada, Y. Soga, and A. J. Sievers, “Precise velocity measurements for driven intrinsic localized modes in the acoustic spectrum of small cantilever arrays,” *NOLTA. IEICE*, (2012)