数理解析研究所講究録
第1800巻 2012年 72-78

非線形Klein-Gordon型格子におけるDiscrete Breatherの安定性

NTTコミュニケーション科学基礎研究所　吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

概要

Discrete Breatherとは，非線形格子系における空間的に局在した周期振動解である．非調和結合を持つ1次元非線形Klein-Gordon型格子に関して，anti-continuous limit近傍において種々のDiscrete Breather解の存在を証明し，それらの線形安定性解析を行った．Discrete Breather解の線形安定性の波形に対する依存性を明らかにした．

1　はじめに

空間的離散性を有する非線形力学系において，空間的に局在した振動モードが存在し得ることが知られている．この局在モードの存在は，武野らにより最初に指摘され[1, 2], Discrete Breather (DB)，または，Intrinsic Localized Mode (ILM)と呼ばれている．DBは，現実の物理系における普遍的な励起構造の一つであると考えられており，実際に種々の系において実験的にも観測されている．例えば，ジョセフソン結合素子系[3, 4]，非線形光導波路アレイ[5]，カンチレバーアレイ[6, 7]等で定在型DBが観測されている．また，進行波型DBについても，雲母結晶においてその存在を示す実験結果が報告されている[8]．これまでに成されたDB研究の進展に関しては，例えば，解説記事[9]やレビュー論文[10, 11, 12, 13]を参照されたい．

定在型DBは，力学系の運動方程式の局在した時間周期解として定義される．数理的な観点からは，定在型DBを表す周期解の存在証明，および，安定性解析が基本的な問題である．これまでに，定在型DBを表す局在周期解の厳密な存在証明が，種々の手法により与えられている[14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]．最初の存在証明は，MacKayとAubryにより，各粒子がオンサイトポテンシャルを持ち，他の粒子と弱い相互作用をするような非線形格子系のクラスに対して与えられた[14]．これらの系において，anti-integrable limit，もしくは，anti-continuous limitと呼ばれる相互作用が無い極限では，系は各粒子がオンサイトポテンシャル中を独立に振動する振動子の集団となる．この極限では，1個の粒子だけが周期振動し他の粒子が静止しているような自明なDB解が存在する．MacKayとAubryは，時間反転対称な周期関数の空間で陰関数定理を用いて，自明なDB解が弱い相互作用が在る場合に延長可能であることを証明している．anti-continuous limitは有用な概念であり，他の格子系，例えば，非線形Schrödinger格子や2原子Fermi-Pasta-Ulam (FPU)格子[16]におけるDB解の存在証明にも応用されている．

定在型DB解の安定性については，これまでに，主としてanti-continuous limit近傍において調べられている．この極限においては，1粒子だけが励起している自明なDB解以外にも多数の

自明な周期解が存在し，それらの波形はコード列と呼ばれる整数の組によって表現されることが知られている [14]. anti-continuous limit で1粒子のみ励起している自明周期解，および，複数個の粒子が励起している自明周期解からの延長により得られる周期解は，それぞれ，single-site DB，multi-site DB と呼ばれる．近年，弱結合の非線形 Schrödinger 格子において，任意のコード列に付随する DB 解について，その線形安定性とコード列との間に簡単な関係が存在することが Pelinovsky らによって明らかにされた [21]. また，付随する同次ポテンシャル格子を経由した自明周期解の2段階延長による手法が提案され，2原子 FPU 格子に対して，任意のコード列に付随する DB 解の安定性定理が得られている [22].

重要な非線形格子系のクラスとして，オンサイトポテンシャルを持つ粒子が相互作用する系が挙げられる．非線形 Klein-Gordon 格子は，各粒子が非調和オンサイトポテンシャルを有し，かつ，再隣接粒子と調和ポテンシャルを介して相互作用する格子系である．この格子モデルは，上述のクラスに属する代表的なモデルであり，anti-continuous limit 近傍における DB 解の安定性について詳しく調べられている [23, 24, 25, 26]. 一方で，相互作用が非調和項のみのポテンシャルに置き換えられた非線形 Klein-Gordon 型格子も重要なモデルの一つである．このモデルは，指数関数より速く振幅が空間的に減衰する compactlike DB と呼ばれる局在モードを有することが知られている [27, 28, 29, 30, 31, 32]. この格子モデルにおいても，anti-continuous limit 近傍において，コード列により特徴付けられる多数の single-site もしくは multi-site (compactlike) DB 解が存在する．しかしながら，それらの周期解の安定性とコード列の関係は明らかにされていない．よって，本研究では，弱非調和結合を持つ非線形 Klein-Gordon 型格子に関して，任意のコード列に付随する DB 解に適用可能な安定性定理を与える．この定理は，DB 解の安定性と付随するコード列の関係を与える．以下では，2節で本研究で扱う格子モデルとその anti-continuous limit を説明し，3節で主結果を示す．

2 格子モデルと anti-continuous limit

本研究では，非調和結合を持つ1次元非線形 Klein-Gordon 型格子を考える．系のハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} p_n^2 + U(q_n) \right) + \varepsilon \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{k} (q_{n+1} - q_n)^k, \tag{1}$$

ここで，$q_n \in \mathbb{R}$，$p_n \in \mathbb{R}$ は，それぞれ，n 番目の粒子の座標と運動量を表す．$\varepsilon \in \mathbb{R}$ はパラメータであり，$k \geq 4$ は偶数とする．(1) 式において，左側の和は N 個のハミルトニアン振動子を表し，右側の和は最隣接粒子間に働く非調和相互作用ポテンシャルを表している．系 (1) の境界条件は，自由端条件である．また，極限 $\varepsilon = 0$ が，系 (1) の anti-continuous limit である．オンサイトポテンシャル U としては，以下の関数形を仮定する．

$$U(X) = \frac{1}{2} X^2 + \frac{\alpha}{k} X^k, \tag{2}$$

ここで，α はゼロでない実定数とする．変数 q_n, p_n, t のスケール変換により，一般性を失うことなく，定数 α は $\alpha = \pm 1$ とすることができる．U は，$\alpha = +1$ のときハードポテンシャル，$\alpha = -1$ のときソフトポテンシャルとなる．

ハミルトニアン (1) より導出される運動方程式は次式で与えられる．

$$\ddot{q}_n + q_n + \alpha q_n^{k-1} - \varepsilon \left(q_{n+1} - q_n\right)^{k-1} + \varepsilon \left(q_n - q_{n-1}\right)^{k-1} = 0 \tag{3}$$

系 (1) において，anti-continuous limit ($\varepsilon = 0$) の場合を考える．このとき，運動方程式は，各成分が互いに分離した以下のような方程式となる．

$$\ddot{q}_n + q_n + \alpha q_n^{k-1} = 0. \tag{4}$$

したがって，運動方程式には以下の形をした周期解が存在する．

$$q_n(t) = \sigma_n \varphi(t; a), \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

ここで，$\sigma_n \in \{-1, 0, 1\}$ であり，$\varphi(t; a)$ は初期条件 $\varphi(0; a) = a > 0$, $\dot{\varphi}(0; a) = 0$ を満たす以下の微分方程式の定数でない周期解を表す．

$$\ddot{\varphi} + \varphi + \alpha \varphi^{k-1} = 0 \tag{6}$$

(6) 式は，ポテンシャル $U(\varphi) = \varphi^2/2 + \alpha\varphi^k/k$ を持つ 1 自由度ハミルトン系の運動方程式と見なすことができる．$U(\varphi)$ は $\varphi = 0$ の近傍で下に凸なので, (6) 式は，ある値より小さな a に対して周期解を持つ．$\alpha = +1$ のときは，任意の $a > 0$ に対して周期解 $\varphi(t; a)$ が存在する．一方，$\alpha = -1$ のときは，$0 < a < a_0$ なる範囲の a に対し周期解 $\varphi(t; a)$ が存在する．ただし，$a_0 = |\alpha|^{-1/(k-2)}$ である．

周期解 $\varphi(t; a)$ の周期 T は，パラメータ a に連続的に依存する．$\alpha = +1$ の場合，T は a に関して狭義の単調減少関数であり，$\lim_{a\to 0} T(a) = 2\pi$ と $\lim_{a\to+\infty} T(a) = 0$ を満たす．一方，$\alpha = -1$ の場合，T は a に関して狭義の単調増加関数でり，$\lim_{a\to 0} T(a) = 2\pi$ と $\lim_{a\to a_0} T(a) = +\infty$ を満たす．T は a の狭義の単調関数であるため，逆関数 T^{-1} が存在する．$\alpha = +1$ の場合，任意の $T_1 \in (0, 2\pi)$ に対し，$T(a) = T_1$ なる $a \in (0, +\infty)$ が一意に定まる．$\alpha = -1$ の場合，任意の $T_2 \in (2\pi, +\infty)$ に対し，$T(a) = T_2$ なる $a \in (0, a_0)$ が一意に定まる．したがって，$\alpha = +1$ かつ $T \in (0, 2\pi)$，もしくは，$\alpha = -1$ かつ $T \in (2\pi, +\infty)$ のとき，T-周期解 $\varphi(t; a(T))$ が存在する．ただし，$a(T)$ は与えられた周期 T から定まる φ の初期変位を表す．上述のように $\alpha = +1$ かつ $T \in (0, 2\pi)$，もしくは，$\alpha = -1$ かつ $T \in (2\pi, +\infty)$ の条件下では，(6) 式の T-周期解 $\varphi(t; a(T))$ が存在するので，任意のコード列 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \{-1, 0, 1\}^N$ に対して, (5) 式で与えられるような系 (1) の T-周期解 $\Gamma(t; \sigma, T)$ が anti-continuous limit で存在する．すなわち，$\Gamma(t; \sigma, T)$ は，(5) 式で与えられる q_n と $p_n = \dot{q}_n$ を用いて，$\Gamma(t; \sigma, T) = (q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$ である．この $\Gamma(t; \sigma, T)$ を自明な周期解と呼ぶことにする．

コード列 σ が N に比して少数の非ゼロ成分からなるとき，対応する自明な周期解 $\Gamma(t; \sigma, T)$ は，空間的に局在した自明な single-site DB 解，もしくは，multi-site DB 解を表す．例えば，$\Gamma(t; \sigma, T)$ は，$\sigma = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ のとき自明な single-site DB 解，$\sigma = (\ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots)$ のときは自明

な two-site DB 解を表す．非自明な DB 解は，このような自明な DB 解を $\varepsilon \neq 0$ の場合に延長することにより得られる．本稿では，より一般的な任意のコード列 σ を扱い，対応する自明な周期解 $\Gamma(t;\sigma,T)$ からの延長により得られる非自明な周期解について，その存在と安定性に関する結果を述べる．

3 主結果

定理を述べるために，コード列 σ の関数をいくつか導入する．p を粒子数 N の約数とし，コード列の部分集合 $S_p^N \subseteq \{-1,0,1\}^N$ を以下のように定義する．

$$S_p^N = \{\,(\sigma_1,\ldots,\sigma_N);\ \sigma_{lp+i}=\sigma_i \text{ for even } l,\ \ \sigma_{lp+i}=\sigma_{p+1-i} \text{ for odd } l,\ \ i=1,\ldots,p\} \tag{7}$$

これは，特定の対称性を持つコード列からなる集合である．例として，$N=9$, $p=3$ の場合を考える．このとき，S_p^N は，$(c_1,c_2,c_3,c_3,c_2,c_1,c_1,c_2,c_3)$ のような形をしたコード列からなる集合である．ただし，$c_i\in\{-1,0,1\}$, $i=1,2,3$ である．以下 N を固定して考える．$\sigma\in\{-1,0,1\}^N$ が与えられたとき, $\sigma\in S_p^N$ となるような部分集合 S_p^N がいくつか存在する．任意の σ に対して，$\sigma\in S_N^N$ なので，そのような部分集合は少なくとも 1 つは存在する．与えられた σ の対称性を特徴付けるために，以下の関数 $s(\sigma)$ を定義する．$s(\sigma)$ を symmetry index と呼ぶことにする．

定義 1. $\sigma\in\{-1,0,1\}^N$ が与えられたとき，N の約数 p で，$\sigma\in S_p^N$，かつ，$p'<p$ なる N の任意の約数に対しては $\sigma\notin S_{p'}^N$ となるものが存在する．このとき，$s(\sigma)=p$ と定義する．

集合 $\mathcal{A}$ を，$\mathcal{A}=\{1,2,\ldots,N\}$ と定義する．さらに，$\mathcal{A}_\sigma$ を，コード列 σ の非ゼロ成分の添え字集合とする．すなわち，$\mathcal{A}_\sigma=\{n;\sigma_n\neq 0\}\subseteq\mathcal{A}$ と定義する．σ が m 個の非ゼロ成分を含み，$\mathcal{A}_\sigma=\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$, $n_1<n_2<\cdots<n_m$ であると仮定する．σ に含まれる非ゼロ成分 σ_{n_i} と $\sigma_{n_{i+1}}$ に対応する $\Gamma(t;\sigma,T)$ の隣接する 2 つの励起格子点を考える．これらの格子点ペアについて，$\sigma_{n_i}=\sigma_{n_{i+1}}$ のとき同位相であると言い，$\sigma_{n_i}=-\sigma_{n_{i+1}}$ のとき反位相であると言うことにする．

関数 $N_{\mathrm{I}}(\sigma)$ を次式で定義する．

$$N_{\mathrm{I}}(\sigma)=\begin{cases} 0 & \text{if } m=1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2}\left|\sigma_{n_i}+(-1)^{L_i}\sigma_{n_{i+1}}\right| & \text{if } m\geq 2,\end{cases} \tag{8}$$

ここで，$L_i=n_{i+1}-n_i$ は隣接する励起格子点の位置 n_{i+1} と n_i の間の距離を表す．この関数 $N_{\mathrm{I}}(\sigma)$ は，σ に含まれる隣接励起格子点ペアの内，次のタイプ (i) とタイプ (ii) のペア数を与える．それらは，(i) 距離 L_i が偶数の同位相ペア，および，(ii) 距離 L_i が奇数の反位相ペアである．したがって，単一格子点が励起される $m=1$ の場合，もしくは，$m\geq 2$ で σ にタイプ (i), (ii) のペアが含まれない場合に限り，$N_{\mathrm{I}}(\sigma)=0$ が成立する．

次に，関数 $N_{\mathrm{II}}(\sigma)$ を次式で定義する．

$$N_{\mathrm{II}}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} \left|\sigma_{n_i} + \sigma_{n_{i+1}}\right| & \text{if } m \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

これは σ に含まれる同位相の隣接励起格子点ペアを与える関数である．したがって，単一格子点が励起される $m=1$ の場合，もしくは，$m \geq 2$ で σ に含まれる全ての隣接励起格子点ペアが反位相である場合に限り，$N_{\mathrm{II}}(\sigma) = 0$ が成立する．

非自明な周期解の存在および安定性に関する定理は，以下のように述べられる．定理の証明については，文献 [33] を参照されたい．

定理 1. $\sigma \neq 0$，かつ，$s(\sigma) = p$ と仮定する．さらに，$\alpha = +1, T \in (0, 2\pi)$，または，$\alpha = -1, T \in (2\pi, +\infty)$ であり，$T \neq n\pi, n \in \mathbb{N}$ を満たすと仮定する．このとき，定数 $\varepsilon_c > 0$ が存在し，$\varepsilon \in (-\varepsilon_c, \varepsilon_c)$ のとき，系 (1) の T-周期解の族 $\Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$ で ε と t について解析的，かつ，$\Gamma_0(t; \sigma, T) = \Gamma(t; \sigma, T)$ を満たすものが存在する．$\Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$ は，$\alpha\varepsilon > 0$ ならば，$N_{\mathrm{I}}(\sigma) = 0$ の場合に限り線形安定であり，それ以外の場合は $N_{\mathrm{I}}(\sigma)$ 個の不安定特性乗数を有し線形不安定である．一方，$\alpha\varepsilon < 0$ ならば，$N_{\mathrm{II}}(\sigma) - N/p + 1 = 0$ の場合に限り線形安定であり，それ以外の場合は $N_{\mathrm{II}}(\sigma) - N/p + 1$ 個の不安定特性乗数を有し線形不安定である．

注 1. コード列 σ の symmetry index が $s(\sigma) = p$ である場合，σ には少なくとも $N/p - 1$ 個の同位相の隣接励起格子点ペアが含まれる．したがって，任意の σ に対して，$N_{\mathrm{II}}(\sigma) - N/p + 1 \geq 0$ が成り立つ．

参考文献

[1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, "Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals: stationary modes," Prog. Theor. Phys. Suppl. 94, 242–269 (1988).

[2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett. 61, 970–973 (1988).

[3] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array," Phys. Rev. Lett. 84, 741–744 (2000).

[4] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders," Phys. Rev. Lett. 84, 745–748 (2000).

[5] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays," Phys. Rev. Lett. 81, 3383-3386 (1998).

[6] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski, and H. G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array," Phys. Rev. Lett. 90, 044102 (2003).

[7] M. Kimura and T. Hikihara, "Coupled cantilever array with tunable on-site nonlinearity and observation of localized oscillations," Phys. Lett. A 373, 1257–1260 (2009).

[8] F. M. Russell and J. C. Eilbeck, "Evidence for moving breathers in a layered crystal insulator at 300 K," Europhysics Lett. 78, 10004 (2007).

[9] 武野 正三, "格子力学と非線形波動," 数理科学 9, 54–61 (1995).

[10] S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," Physica D 103, 201–250 (1997).

[11] S. Flach and C. Willis, "Discrete breathers," Phys. Rep. 295, 181–264 (1998).

[12] S. Aubry, "Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," Physica D 216, 1–30 (2006).

[13] S. Flach and A. V. Gorbach, "Discrete breathers - Advances in theory and applications," Phys. Rep. 467, 1–116 (2008).

[14] R. S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," Nonlinearity 7, 1623–1643 (1994).

[15] V. Koukouloyannis and S. Ichtiaroglou, "Existence of multibreathers in chains of coupled one-dimensional Hamiltonian oscillators," Phys. Rev. E 66, 066602 (2002).

[16] R. Livi, M. Spicci, and R. S. MacKay, "Breathers on a diatomic FPU chain," Nonlinearity 10, 1421–1434 (1997).

[17] S. Flach, "Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices," Phys. Rev. E 51, 1503–1507 (1995).

[18] S. Aubry, G. Kopidakis, and V. Kadelburg, "Variational proof for hard discrete breathers in some classes of Hamiltonian dynamical systems," Discrete and Continuous Dynamical Systems B 1, 271-298 (2001).

[19] G. James, "Centre Manifold reduction for quasilinear discrete systems," J. Nonlinear Sci. 13, 27–63 (2003).

[20] G. James and P. Noble, "Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices," Physica D 196, 124–171 (2004).

[21] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, "Stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices," Physica D 212, 1–19 (2005).

[22] K. Yoshimura, "Existence and stability of discrete breathers in diatomic Fermi-Pasta-Ulam type lattices," Nonlinearity 24, 293–317 (2011).

[23] J. F. R. Archilla, J. Cuevas, B. Sánchez-Rey, and A. Alvarez, "Demonstration of the stability or instability of multibreathers at low coupling," Physica D 180, 235–255 (2003).

[24] J. Cuevas, J. F. R. Archilla, F. R. Romero, "Effect of the introduction of impurities on the stability properties multibreathers at low coupling," Nonlinearity 18, 769-790 (2005).

[25] V. Koukouloyannis and P. G. Kevrekidis, "On the stability of multibreathers in Klein-Gordon chains," Nonlinearity 22, 2269-2285 (2009).

[26] D. Pelinovsky and A. Sakovich, "Multi-site breathers in Klein-Gordon lattices: stability, resonances, and bifurcations," arXiv:1111.2557 (2011).

[27] P. Tchofo Dinda and M. Remoissenet, "Breather compactons in nonlinear Klein-Gordon systems," Phys. Rev. E 60, 6218–6221 (1999).

[28] M. Eleftheriou, B. Dey, and G. P. Tsironis, "Compactlike breathers: Bridging the continuous with the anticontinuous limit," Phys. Rev. E 62, 7540–7543 (2000).

[29] B. Dey, M. Eleftheriou, S. Flach, and G. P. Tsironis, "Shape profile of compactlike discrete breathers in nonlinear dispersive lattice systems," Phys. Rev. E 65, 017601 (2001).

[30] J. C. Comte, "Exact discrete breather compactons in nonlinear Klein-Gordon lattices," Phys. Rev. E 65, 067601 (2002).

[31] A. V. Gorbach and S. Flach, "Compactlike discrete breathers in systems with nonlinear and nonlocal dispersive terms," Phys. Rev. E 72, 056607 (2005).

[32] P. Rosenau and S. Schochet, "Almost compact breathers in anharmonic lattices near the continuum limit," Phys. Rev. Lett. 94, 045503 (2005).

[33] K. Yoshimura, "Stability of discrete breathers in nonlinear Klein-Gordon type lattices with pure anharmonic couplings," (submitted for publication).