

ラッセルの置き換え理論と二つのパラドクス

伊藤 遼

1. はじめに

よく知られているように、ラッセル (Bertrand Russell) は、論理学から数学を導出するという論理主義の立場を展開した。置き換え理論 (substitutional theory) とは、ラッセルがその実現のために考案した論理体系の一つである。しかし、置き換え理論には、二つのパラドクスが生じることが分かっている。その二つのパラドクスは、それぞれ「 p_0/a_0 パラドクス」と「付録 B のパラドクス」などと呼ばれる。

本稿は、置き換え理論に生じるこの二つのパラドクスの原因が、置き換え理論を支える根本的なアイデアにあることを指摘するものである。以下ではまず、その根本的なアイデアを説明した上で、Landini (1998) の業績をもとに、置き換え理論の公理系を紹介する (2 章)。次に、二つのパラドクスの導出をみた上で (3 章)、それらの原因を分析する (4 章)。こうした分析を通して明らかになるのは、Landini (1998) が診断する以上に、置き換え理論は深刻な問題を抱えている、ということである。

2. 置き換え理論の概要

二つのパラドクスをみる前にまずは、置き換え理論の基本的なアイデアを確認し、その上で、以下の議論を具体的にするために、それを形式化した体系を紹介しよう。

2.1 基本的なアイデア

置き換え理論の基本的な出発点は、命題に現れる対象 (存在者) を他の対象によって置き換えるという操作により命題関数を再現する、というアイデアにある。まずもって、置き換えという操作は“ $p/a; x!q$ ”のような記号列で表わされる。この記号列は「 p に現れる a をすべて x に置き換えた結果、 q が得られる」ということを意図している。例えば「 \dots は人間である」という命題関数を考えよう。この命題関数は、引数としてプラトンという対象をとれば「プラトンは人間である」という命題を出力する。この命題関数を置き換えという操作によって再現するには、例えば、「ソクラテスは人間である」という命題とソクラテスという対象を持ち出せばよい。この命題を p 、ソクラテスを a 、そしてプラトンを x で表すとすると、“ $p/a; x!q$ ”という操作により得られる q は「プラトンは人間である」という命題を表す。置き換えという操作がつねに一意的な結果を持つと考えれば、“ $p/a; x$ ”という表現を“ $p/a; x!q$ ”なる q の確定記述とみなすことができる。このとき“ p/a ”という記号列は命題関数を、 x はその引数

を表現していることになる。このように、命題関数を表す“ p/a ”のような記号列はマトリクス (matrix) と呼ばれる。

置き換え理論が持つアドバンテージは、まさにこうしたアイデアによりもたらされる。置き換え理論では、ラッセル・パラドクスを導くような、命題関数の自己適用が生じ得ない。というのも、例えば、 p/a の引数となるのは a と置き換え可能なもの、すなわち、対象に限られるため、“ $p/a; p/a$ ”のような表現は、統語論的に認められないからである。この意味で、置き換え理論における、こうした関数の引数に関する制約、つまり、タイプの制約とは、置き換えという操作の性質から導かれる統語論的な制約であって、アド・ホックなものではない。こうして、置き換え理論は、タイプ理論を実現すると同時にその正当化も与える、というアドバンテージを持つ⁽¹⁾。

2.2 置き換え理論の形式化

次に、置き換え理論がいかなる論理体系なのか、具体的にみる。とは言え、今のところ、置き換え理論に関するラッセルの草稿のほとんどは、未公刊のままラッセル・アーカイブに眠っている。そこで本稿では、Landini (1998) がアーカイブの草稿をもとに再構成した形式体系 (以下、ST と呼ぶ) を扱うこととしよう。

まずは ST の言語をみる。以下では、簡単のため Landini (1998) の表記を適宜改めて紹介する。ST の原始記号は次の通りである。

(P1) 個体変項： $a, b, c, \dots, p, q, r, \dots, a^\circ, b^\circ, c^\circ, \dots, a^{\circ\circ}, \dots, a^{\circ\circ\circ}, \dots, a^{\circ\circ\circ\dots}, \dots$

(P2) 括弧・記号類：“()”, “{ }”, “[]”, “/”, “!”, “;”, “.”

(P3) 二項関係：“ \supset ”

個体変項に対するメタな変項として“ μ, ν, \dots ”が用いられる。また“ \supset ”は含意を表す記号である。続いて、ST の項が次のように再帰的に定義される。

(T1) 個体変項は、ST の項である。

(T2) もし A が ST の論理式ならば、 $\{A\}$ は ST の項である。

(T3) ST の項は、これら以外にはない。

このようにして定義された、ST の項に対するメタな変項として“ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ”が用いられる。ST の論理式は、次のように定義される。

(F1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が ST の項ならば、 $\alpha \supset \beta$ と $\alpha/\beta; \gamma! \delta$ は ST の論理式である。

(F2) A が自由変項 μ を含む ST の論理式ならば、 $(\mu)A\mu$ は ST の論理式である。

(F3) ST の論理式は、これら以外にはない。

このように定義された論理式に対するメタな変項として“ A, B, C, \dots ”が用いられる。そして、こうした定義から分かる重要なことは、ST において“ $\{ \}$ ”が果たす特別な役

割である。(T2)から明らかのように“{}”は、論理式をとって、対象としての命題を返すメタな関数として機能する⁽²⁾。

次に、STの推論規則をみよう。まずもって、論理結合子の定義である。STでは、否定の論理結合子“~”が次のようにして定義できる。

$$\text{df}(\sim) \quad \sim \alpha = \text{df} (\mu)(\alpha \supset \mu)$$

この定義はそのまま矛盾律に対応している。というのも、項の定義からして、個体変項のドメインにはすべての命題が含まれるため、矛盾した命題からはいかなる命題も導出可能となるからである。その他、連言“&”や同値“≡”、存在量化子“(∃..)”などは、含意と否定および(F2)で与えられた全称量化子“()”により定義される。しかし、項と論理式の相互依存的な定義から、推論規則についてはひと工夫が必要になる。推論規則とは、一般に、論理式から論理式を導出するものであって、項を導出するものではないからである。例えば“⊃”の除去規則は次のようになる。

$$\text{(mp)} \quad \{A\} \supset \{B\}, A \vdash B$$

他の論理結合子についても同様の工夫がなされる。こうしてSTにおいても、ふつうの古典述語論理と同様の推論が可能になる。

2.3 置き換え理論の公理と定理

次に、STの公理や定理のうち、置き換え理論の特徴を反映する重要なものをいくつか紹介しよう。まずもって、命題とそれに現れる対象のペアにより命題関数を再現するという基本的なアイデアが実現されるためには、置き換えという操作の結果がつねに一意的に存在することが必要となる。このことを規定するのが次の公理である。

$$\text{(A}_{15}\text{)} \quad (p)(a)(x)(\exists q)(p/a; x!q \ \& \ (r)(p/a; x!r \ . \supset \ . r = q))$$

さらに、命題とそれに現れる対象のペアを使って理論を展開するならば、その「現れる」という関係も定義しておく方がよい。それは次のように定義できる。

$$\text{df}(in) \quad \alpha \text{ in } \beta = \text{df} \sim \{(\mu)(\beta/\alpha; \mu! \beta)\}$$

この定義は、 α が β に「現れる」という場合を「現れない」場合の否定として定めている。「現れない」場合とは、 β に現れるはずの α を何に置き換えても、その結果がもとの β であるような場合である。

次に、置き換え理論の基本的なアイデアである、マトリクスを、命題関数を表す表現、すなわち、述語として用いることに関する定義や定理をみよう。まずは、不完全記号であるマトリクスを扱うために、記述に関する定義が必要になる⁽³⁾。

$$\text{df}(\text{desc.}A)^1 \quad [p/a; x]A(p/a; x) = \text{df} (\exists q)(p/a; x!q \ \&. (y)(p/a; x!y \ \supset. y = q) \ :&: Aq)$$

ここで“ $[p/a; x]$ ”は記述のスコープを表示するものであるが、以下ではスコープが最小の場合には省略する。この定義に従えば、“ $A(p/a; x)$ ”が成り立つということは、“ $p/a; x!q$ ”なる一意的な q について“ Aq ”が成り立つことだ、ということになる。そして“ $p/a; x!q$ ”なる q の一意性は、 (A_{15}) によりすでに保証されている。また、置き換えに関するいくつかの公理から、マトリクスについての包括原理が得られる。

$$*(T_{4.6}) \quad (\exists \mu^\circ)(\exists \nu^\circ)(\nu^\circ \text{ in } \mu^\circ \ \&. (\mu)(\mu^\circ/\nu^\circ; \mu!A))$$

ただし、 μ° と ν° は A で自由でなく μ は A で自由。

このスキーマは、任意の開いた論理式 A に対して、それに対応するマトリクスが存在することを保証する。

また、二つのパラドクスの導出においては、本稿で後にみるように、命題の同一性に関する公理や定理もまた重要となる。まずは同一性の定義をみよう。

$$\text{df}(=) \quad \alpha = \beta = \text{df} (p)(a)(q)(r)(p/a; \alpha!q \ \& \ p/a; \beta!r \ \supset. q \supset r)$$

このように定義された同一性は、STが扱う対象すべてに適用されるのであり、したがって、命題にも適用される。また、命題の同一性に関して次の公理型が置かれる。

$$*(A_{20}) \quad \{(\mu)A\mu\} = \{(\mu)B\mu\} \ \supset. (\mu)(\{A\mu\} = \{B\mu\})$$

他の論理結合子に関しては、同様の結果が定理として得られる。

$$(T_{4.14}) \quad (p)(q)(\{\sim p\} = \{\sim q\} \ \supset. p = q)$$

$$(T_{4.17})_b \quad (p)(a)(r)(c)(\{p \supset a\} = \{r \supset c\} \ \supset: p = r \ \&. a = c)$$

$$(T_{4.19})_b \quad (b)(q)(p)(a)(r)(c)(\{p/a; b!q\} = \{r/c; b!q\} \ \supset: p = r \ \&. a = c)$$

これらの公理や定理は、同じ二つの命題はその構成要素からして同じであるということを保証するものだと言える。

このように形式化されたSTでは、2.1節でみた置き換え理論のアイデアが実現される。しかも、STは、そのアイデアのもと、ラッセル・パラドクスなどの集合論的パラドクスを避けつつ、ペアノ公理を導出できるということが分かっている⁽⁴⁾。

3. ふたつのパラドクスの導出

それでは、本稿の本題である二つのパラドクスについてみよう。まずはその双方で用いられるところの対角線論法を紹介した上で、それぞれの導出をみる。

3.1 p_0/a_0 パラドクス

まずもって、対角線論法とは、一般に、クラス X の基数 $|X|$ とそのべきクラス $\mathcal{P}(X)$ の基数 $|\mathcal{P}(X)|$ について $|\mathcal{P}(X)| \not\leq |X|$ を示す議論である。それによると、 $|\mathcal{P}(X)| \leq |X|$ が成り立つこと、すなわち、 $\mathcal{P}(X)$ から X への単射が存在することを仮定すると、矛盾が導かれる。一般に、関数 $f: C \rightarrow D$ が単射であるとは、次が成り立つことである。

$$(1) \quad \forall x, y \in C (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

ここで、集合 X について、単射 $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ が存在すると仮定しよう。対角線論法は、こうした仮定のもと、次のような自由変数 x を含む述語を考えることから始まる。

$$(2) \quad \exists U \in \mathcal{P}(X) (x = f(U) \wedge x \notin U)$$

この述語によって、 $\mathcal{P}(X)$ の要素 W を次のように定めることができる。

$$(3) \quad W := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{P}(X) (x = f(U) \wedge x \notin U)\}$$

この W に関数 f を適用することにより、 X の要素 $f(W)$ が得られる。そして、この $f(W)$ について、“ $f(W) \in W \leftrightarrow f(W) \notin W$ ” という双条件が成り立つ。この双条件からはすぐに矛盾が導出される。こうして、 $\mathcal{P}(X)$ から X への単射が存在するという仮定、すなわち $|\mathcal{P}(X)| \leq |X|$ という仮定が誤りであることが導かれる。

それでは、実際に ST において、 p_0/a_0 パラドクスを導出してみよう。 p_0/a_0 パラドクスは、Landini (1989) によって報告された、ラッセルが置き換え理論を放棄した直接の理由とみられるパラドクスである。ある書簡において、ラッセルは、このパラドクスが「置き換え理論を台無しにした」と述べている。このパラドクスの導出は (2) にあたる、次のような述語を考えることから始まる。

$$(4) \quad (\exists r)(\exists c)(x = \{r/c; b!q\} \& \sim \{r/c; x\})$$

これが ST の論理式であることは、2.2 節でみた定義と $\text{df}(\text{desc.A})^1$ により確かめられる。すると、*(T_{4.6}) により、次を満たす対象のペア p と a が存在することになる。

$$(5) \quad (x)(p/a; x! \{(\exists r)(\exists c)(x = \{r/c; b!q\} \& \sim \{r/c; x\})\})$$

これと $\text{df}(\text{desc.A})^1$ 、 $\text{df}(=)$ から、われわれは次を導出できる。

$$(6) \quad (x)(p/a; x \equiv (\exists r)(\exists c)(x = \{r/c; b!q\} \& \sim \{r/c; x\}))$$

ここで $\{p/a; b!q\}$ は ST の項である。そこで “ $p/a; \{p/a; b!q\}$ ” が成り立つかどうかを考えよう。まずはそれが成り立つと仮定する。すると (6) より、次が成り立つ。

$$(7) \quad (\exists r)(\exists c)(\{p/a; b!q\} = \{r/c; b!q\} \& \sim \{r/c; \{p/a; b!q\}\})$$

このような r と s をとると、(7) における $\&$ の左辺から次が得られる。

$$(8) \quad \{p/a; b!q\} = \{r/c; b!q\}$$

これと $(T_{4.19})_b$ から、“ $p = r$ ” と “ $a = c$ ” が得られる。すると “ $\sim \{r/c; \{p/a; b!q\}\}$ ” がいま成り立つので、“ $\sim \{p/a; \{p/a; b!q\}\}$ ” もまた成り立つことになる。そこで、逆に “ $\sim \{p/a; \{p/a; b!q\}\}$ ” と仮定しよう。“ $\{p/a; b!q\} = \{p/a; b!q\}$ ” は明らかなので、このとき、次の連言が成り立つことになる。

$$(9) \quad \{p/a; b!q\} = \{p/a; b!q\} \& \sim \{p/a; \{p/a; b!q\}\}$$

これに現れる p と a について存在汎化を行うと、次が得られる。

$$(10) \quad (\exists r)(\exists c)(\{p/a; b!q\} = \{r/c; b!q\} \& \sim \{r/c; \{p/a; b!q\}\})$$

すると、この結果と (6) とにより “ $p/a; \{p/a; b!q\}$ ” が成り立つことになる。こうして “ $p/a; \{p/a; b!q\} \equiv \sim \{p/a; \{p/a; b!q\}\}$ ” が導出される。このように導かれるパラドクスが p_0/a_0 パラドクスである。この名前は、ラッセルがこのパラドクスを記した書簡のなかで、上の p と a にあたる文字として p_0 と a_0 を用いていたことによる。

3.2 付録 B のパラドクス

次に、ST に現れるもう一つのパラドクス、付録 B のパラドクスをみよう。このパラドクスはもともと、ラッセルが『数学の諸原理』(1903) の付録 B において論じたものである。

先に述べたように、このパラドクスもまた対角線論法により導かれる。まずは、先ほどと同じように、(2) にあたる次のような述語を考えよう。

$$(11) \quad (\exists r)(\exists c)(x = \{(z)(r/c; z \supset z)\} \& \sim \{r/c; x\})$$

項 $\{(z)(r/c; z \supset z)\}$ は「述語 r/c を満たす命題はすべて成り立つ」という命題を表すと理解できる。この開放文が ST の論理式であることは、2.2 節の定義と $\text{df}(\text{desc.A})^1$ により容易に確かめられる。すると、 $*(T_{4.6})$ と $\text{df}(\text{desc.A})^1$ により、先ほどと同様にして、次を満たす対象のペア p と a が存在することが分かる。

$$(12) \quad (x)(p/a; x \equiv (\exists r)(\exists c)(x = \{(z)(r/c; z \supset z)\} \& \sim \{r/c; x\}))$$

ここで $\{(z)(p/a; z \supset z)\}$ が ST の項であることは確かめられる。そこで、先ほどと同様に “ $p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}$ ” が成り立つと仮定しよう。すると (12) より、次が得られる。

$$(13) \quad (\exists r)(\exists c)(\{(z)(p/a; z \supset z)\} = \{(z)(r/c; z \supset z)\} \& \sim \{r/c; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\})$$

そして、このような r と s をとると、(13) における $\&$ の左辺から次が得られる。

$$(14) \quad \{(z)(p/a; z \supset z)\} = \{(z)(r/c; z \supset z)\}$$

これに対して、 $*(A_{20})$ を適用することで、次が成り立つことが分かる。

$$(15) \quad (z)(\{p/a; z \supset z\} = \{r/c; z \supset z\})$$

さらに、これに現れる z に対して普遍例化を行うことで、次が得られる。

$$(16) \quad \{p/a; z \supset z\} = \{r/c; z \supset z\}$$

この等式に対して、さらに、 $\text{df}(\text{desc.A})^1$ や $*(A_{20})$ 、 $(T_{4.14})$ 、 $(T_{4.17})_b$ 、 $(T_{4.19})_b$ を適用することで、“ $p = r$ ” と “ $a = c$ ” が得られる。すると (13) の “ $\sim \{r/c; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\}$ ” から “ $\sim \{p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\}$ ” が成り立つ。逆に “ $\sim \{p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\}$ ” と仮定しよう。“ $\{(z)(p/a; z \supset z)\} = \{(z)(p/a; z \supset z)\}$ ” は明らかなので、次が成り立つ。

$$(17) \quad \{(z)(p/a; z \supset z)\} = \{(z)(p/a; z \supset z)\} \& \sim \{p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\}$$

この結果に対して存在汎化を行えば、次が得られる。

$$(18) \quad (\exists r)(\exists c)(\{(z)(p/a; z \supset z)\} = \{(z)(r/c; z \supset z)\} \& \sim \{r/c; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\})$$

(12) よりこれは “ $p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}$ ” が成り立つことと同値である。こうして、先ほどと同様に “ $p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\} \equiv \sim \{p/a; \{(z)(p/a; z \supset z)\}\}$ ” が導出される。

4. 二つのパラドクスの原因

次に、二つのパラドクスの原因について考察しよう。双方の導出をそれぞれ分析することで、それらの原因が置き換え理論の本質的な点に由来することが分かる。

4.1 p_0/a_0 パラドクスの原因

二つのパラドクスは、ともに対角線論法を使って導出される。このことを踏まえれば、これらの原因を、なんらかのクラス X についての、 $\mathcal{P}(X)$ から X への単射が存在するという事態に求めることは自然である。まずは p_0/a_0 パラドクスからみよう。

まずもって、“ $\{\dots/\dots; b!q\}$ ” という表現は、対象のペア (α, β) をとって対象 $\{\alpha/\beta; b!q\}$ を返すメタな関数だと考えられる。ST の定項が表す対象全体のクラス、すなわち、ST の対象領域を D と呼ぶこととすると、これは $D \times D$ から D への関数だということになる。そして、この関数は単射である。 $(T_{4.19})_b$ が主張することは、この関数について 3.1 節の (1) が成り立つということだからである。とは言え、こうした関数の存在は、ふつうなんら問題ではない。というのも、 D が無限クラスならば $|D| = |D \times D|$ は成り立つはずであり、しかもいま D は無限クラスだからである。ST は、 D が無限クラスであること、言い換えれば、対象が無限に存在することを証明できる。したがって、問題となるのは、なぜ $D \times D$ から D への単射の存在から、対角線論法により矛盾が生じるのか、ということである。

ここで、項のペアにより述語を再現するという置き換え理論の基本的なアイデアについて考えよう。このアイデアが実現されるには、対象のペアの総数は対象に対する述語の総数と同じかそれより多いことが要請される。実際、ST では、この要請は $*(T_{4.6})$ により実現される。そして、もし対象に対する述語が意味するものを D の部分クラスとみなすことができるならば、言い換えれば、もし一階一変数述語の意味領域を $\mathcal{P}(D)$ と同一視できるならば、先の要請が満たされるとき、 $|\mathcal{P}(D)| \leq |D \times D|$ が成り立つと考えられる⁽⁵⁾。すると、これと $|D| < |\mathcal{P}(D)|$ とから $|D| < |D \times D|$ が成り立つことになる。このとき、“ $\{\dots/\dots; b!q\}$ ” という表現に限らず、 $D \times D$ から D への単射として働く表現があればいつでも、対角線論法により矛盾が導かれるはずである。実際、 p_0/a_0 パラドクスはいくつもの亜種を持つ。例えば、“ $\{\dots \supset \dots\}$ ” という表現を $D \times D$ から D への関数とみなせば、これは $(T_{4.17})_b$ により単射になるが、これを使って ST で矛盾を導くことができる (Landini, 1998)。

このようにみると、 p_0/a_0 パラドクスとは、項のペアによって述語を再現するという置き換え理論のアイデアのために、その対象領域に要請される事態、すなわち、ST で言うところの $|D| < |D \times D|$ という事態が原因となって生じるものだと言える。ラッ

セルは、対角線論法についてよく理解していた。ラッセル・パラドクスは、対角線論法の研究から発見されたからである。ところが、置き換え理論を構想した当時のラッセルは、 $|X| < |X \times X|$ が一般に成り立つと考えていた (Russell, 1906, p.180)。しかし、先に見たように X が無限クラスである場合、このことは成り立たないのである。

4.2 付録 B のパラドクスの原因

次に、付録 B のパラドクスの原因を探ろう。3.2 節におけるその導出をみると、問題の単射として働いているのは、“ $\{(z)(\dots/\dots; z \subset z)\}$ ” という表現であることが分かる。そして、この表現は、対象のペア (α, β) をとって対象 $\{(z)(\alpha/\beta; z \subset z)\}$ を返す関数だと考えられる以上、 $|D| < |D \times D|$ という状況下で矛盾を導く表現の一つである。このようにみると、付録 B のパラドクスは、 p_0/a_0 パラドクスの単なる亜種であるように思われる。

しかし、付録 B のパラドクスの原因は、 p_0/a_0 パラドクスのそれと同じではない。このことは、付録 B のパラドクスが、もともと置き換え理論が考案される前にラッセルが問題視していたパラドクスである、ということからして明らかである。このパラドクスの原因は置き換え理論に固有のものではない。むしろ、その原因は、当時のラッセルが保持していた、命題はなんらかの意味で存在する対象であるという考え方にある。そして、付録 B のパラドクスは、もともと、そうした命題の捉え方から生じる矛盾として問題視されたのである。

命題はすべて、それ自体でなんらかの対象であるとしよう。このとき「述語 φ を満たす命題 p はすべて成り立つ」という命題、すなわち “ $\forall p(\varphi(p) \rightarrow p)$ ” を考える。まずもって、こうした命題を考えること自体、すでに命題を対象として扱うことを前提している。命題に対する量化を行っているからである。さらに、命題を対象として扱うということは、命題に対する「同一性」を考えるということでもある。われわれは命題の「同一性」に関する共通理解を持つわけではないが、少なくとも、「同一」な命題はその構成要素からして「同一」である、と考えることは自然である。そうでなければ、命題の「同一性」は、ライプニッツ法則が成り立たないような「同一性」であることになってしまうからである。もし二つの「同一」な命題が「同一」でない構成要素を含むならば、そのような構成要素 a について「 a を含む」という、その一方のみが持つ性質が存在することになる。そして、こうした構成要素に関する命題の同一性条件を受け入れるならば、次が成り立つことになる。

$$(19) \quad (\forall p(\varphi(p) \rightarrow p) = \forall p(\varphi'(p) \rightarrow p)) \rightarrow (\varphi = \varphi')$$

このとき、先ほどと同様に、一階一変数述語の意味領域を対象全体のクラス X のべき

クラス $\mathcal{P}(X)$ だと考えるならば、“ $\forall p(\phi(p) \rightarrow p)$ ” は $\mathcal{P}(X)$ から X への単射であることになる。そして、先にみたように、こうした単射の存在からは、対角線論法によりただちに矛盾が導かれる。

こうした付録 B のパラドクスの導出を、ST において表現すると 3.2 節のようになる。“ $\forall p(\varphi(p) \rightarrow p)$ ” という命題は “ $\{(z)(\dots/\dots; z \supset z)\}$ ” で表現されている。そして、この表現は、実際、述語 α/β をとって命題 $\{(z)(\alpha/\beta; z \supset z)\}$ を返す単射とみなせる。“ $\{(z)(\alpha/\beta; z \supset z)\} = \{(z)(\alpha'/\beta'; z \supset z)\}$ ” から “ $\alpha = \alpha' \ \& \ \beta = \beta'$ ” が導出されるからである。こうして、ST においても “ $\{(z)(\dots/\dots; z \supset z)\}$ ” という表現により、付録 B のパラドクスが導かれることになる。

このように、付録 B のパラドクスは、置き換え理論においては見かけ上 p_0/a_0 パラドクスと類似するものの、その本質的な原因は、命題を、とりわけ、量化を含む命題、すなわち、一般命題を対象として扱うことにある。そして、付録 B のパラドクスもまた、いくつもの亜種を持つことが知られている。Church (1984) は、ラッセルの定式化よりもシンプルに、命題 “ $\forall p(\varphi(p))$ ” を考えても矛盾が生じることを指摘している。実際、ST においても、表現 “ $\{(z)(\dots/\dots; z)\}$ ” を考えると矛盾が導出できる。

4.3 置き換え理論と命題の存在論

4.1 節の議論が正しいとすれば、 p_0/a_0 パラドクスの原因が対象のペアによって命題関数を再現するという置き換え理論の根本的なアイデアにある、ということは間違いない。それでは、付録 B のパラドクスはどうだろうか。

ラッセルは、3.1 節で触れた書簡にあるように、 p_0/a_0 パラドクスを置き換え理論にとって致命的なものとみた。そして、その一方で、付録 B のパラドクスは、1903 年の時点で、すでに「解決された」とされる⁽⁶⁾。そこではラッセルは、4.2 節の (19) にあたる想定を誤りとみなすこと、言い換えれば、命題の構成要素に関する同一性条件を放棄することでパラドクスを回避している。また Landini (1998) もまたラッセルと同じような立場をとる。しかし、以下では、付録 B のパラドクスもまた、置き換え理論にとって致命的であると論じる。もし置き換え理論にとって、一般命題を対象として扱うことが容易には避けられないことだとすれば、そのことを原因とする付録 B のパラドクスは致命的であることになる。

まずもって、自然数を高階のクラスとして定義するためには、置き換え理論は命題関数に対する量化を扱うことができなければならない。置き換え理論では、例えば、一階一変数の命題関数は、命題とそれに現れる対象とのペアによって再現される。したがって、一階の命題関数に対する量化は、命題と対象のそれぞれに対する量化によ

て再現されることになる。それゆえ、命題に対する量化を行うという意味で、置き換え理論は命題を対象として扱うことは避けられない。さらに、数学を展開するためには、量化を含む表現が不可欠である。したがって、命題とそれに現れる対象のペアによって量化を含む命題関数を再現するために、置き換え理論は、一般命題を対象として扱うことになる。

ところで、付録Bのパラドクスにはいくつかの対策が考えられる。一つは、ラッセルがそうしたように、命題の構成要素に関する同一性条件を否定することである。しかし、この場合、4.2節で述べたように、置き換え理論が扱うところの対象について、ライプニッツ法則が成り立たないことになってしまう⁽⁷⁾。また、量化を含む命題と量化を含まない命題との区別、つまり、一般命題と単称命題との区別を置き、後者のみを対象とするという対策も考えられる。しかし、一見もっともらしいこのアプローチも、置き換え理論では採用し難い。一般命題を対象領域から排除すると、量化を含む述語が置き換えという操作によって再現できなくなるからである。このことを回避する方法の一つの方法は、Landini (1998) がシミュレートするように、いかなる量化を含む述語にもそれと外延が等しい一階の述語、すなわち、マトリクスが存在すると主張する「還元公理」を置くことである。しかし、こうした公理を認めるならば、2.1節でみた、タイプ理論をアド・ホックでない仕方を実現するという置き換え理論のアドバンテージは帳消しになる。そうした公理を置くことはアド・ホックに思われるからである。もう一つ考えられる対策は、量子子の適用に応じた階層、すなわち、オーダーの階層を置くことである⁽⁸⁾。オーダー n の量化を含む命題はオーダー n の量化のドメインには含まれないと定めれば、3.2節の(12)から(13)へのステップが不可能になる。しかし、オーダーの導入もまた置き換え理論が持つアドバンテージを損なう。置き換え理論は、オーダーの階層に対する何の正当化も与えられない上に、この場合も還元公理が必要になるからである。

このように、付録Bのパラドクスの原因もまた、命題とそれに現れる対象のペアによる命題関数の再現という、根本的なアイデアに関わる。そして、それゆえ、このパラドクスをブロックするような修正にはどれも、それなりの代償が伴うのである。

5. 終わりに

置き換え理論には二つのパラドクスが生じる。本稿の分析が正しいとすれば、二つのパラドクスの原因はそのどちらも、置き換え理論を支える基本的なアイデアにある。それゆえ、これら二つのパラドクスは、置き換え理論の根本的な修正を要求する。そして、そうした修正を受け入れるならば、例えば4.3節でみたように、置き換え理論

が持つアドバンテージはおそらく失われてしまう。したがって、Landini (1998) が期待するような、適切な修正を施された置き換え理論による論理主義プログラムの救出は難しいということになる。

ところで、本稿で行ったような分析の仕方は、一階一変数の述語の意味領域は対象領域のべき集合であるという前提に依拠する。こうした前提をとらずに、パラドクスを分析することは可能である (cf. 津留, 2003)。本稿では、こうした前提をオープンなままにせざるを得ない。このことをお断りして、本稿を閉じることにしよう。

註

- (1) 置き換え理論が持つもう一つのアドバンテージは、タイプの制約を置きつつも無限個の対象の存在を証明できる、という点である。本文で詳しく扱うことはできないが、このアドバンテージもまた、4.3 節で論じる、命題を対象として扱うことによってもたらされている。
- (2) “{}” には、項を作るオペレータとしての働きだけでなく、論理結合子のスコープを表示する働きがある。本稿以下では、Landini (1998) にならい、特に必要でない限り “{}” を省略し、代わりにドットを使用することで論理結合子のスコープを示す。ドットは、それが多く付された論理結合子ほど結合が弱くなると理解すればよい。
- (3) 本稿の $df(desc.A)^1$ は、Landini (1998) の $df(desc)^1$ と $df(desc.a)^1$ をまとめたものである。
- (4) もちろん、その導出というのは、本文以下でみる ST の矛盾に訴えるものではない。
- (5) $|D^0| \leq |D \times D|$ が成り立つと考えることもできる。マトリクスが再現するところの命題関数とは、対象をとって命題を返す関数だからである。むしろ、 $2 \leq |D|$ は明らかに成り立つ。
- (6) 1903 年 5 月 24 日付けフレーゲ宛書簡。
- (7) このことに関連して、一点指摘しておこう。ST において、付録 B のパラドクスの導出に必要な公理 $*(A_{20})$ は、他の定理の導出において特に役割を持たない。このことから、付録 B のパラドクスは、公理 $*(A_{20})$ を ST から取り除くのみで解決できるような、置き換え理論にとってそれほど致命的でないパラドクスのように思われるかもしれない。しかし、このような解決策はアド・ホックなものであるよう思われる。というのも、公理 $*(A_{20})$ が要請することは、命題の構成要素に関する、他の同一性条件と同じく自然なものだからである。
- (8) 興味深いことに、Landini (1998) は、オーダーの階層を加えた ST では、付録 B のパラドクスのみならず p_0/a_0 パラドクスもまたブロックされることを示した。本稿で扱うことはできないが、このこともまた対象領域という観点から説明できる。

文献

- Church, A. (1984). ‘Russell’s Theory of the Identity of Propositions,’ *Philosophia Naturalis*, 21, 513-522.
- Landini, G. (1989). ‘New Evidence Concerning Russell’s Substitutional Theory of Classes,’ *Russell*, 9, 26-42.
- (1998). *Russell’s Hidden Substitutional Theory*, Oxford: Oxford University Press.
- Russell, B. (1906). ‘On The Substitutional Theory of Classes and Relations,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 165-189.
- 津留竜馬 (2003). 「概念記法は何故矛盾したのか」, 『思想』, 第 954 号, 141-158 頁.

[京都大学大学院博士課程・哲学／日本学術振興会特別研究員]