システム/制御/情報，Vol. 56, No. 9, pp. 468–473, 2012

「『ディジタル制御の理論と応用の新展開』特集号」　　解　説

サンプル値制御理論とそのディジタル信号処理への応用

山本　裕*・永原　正章*

1. はじめに

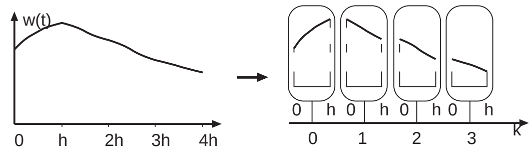
音声や画像，映像など本来アナログの情報を離散化し，ディジタルデータとして扱うことは，近年ではきわめて当たり前の技術となっており，むしろアナログのままデータを扱うことのほうがまれとなっている．音楽プレーヤーや携帯電話，ボイスレコーダなどの音楽・音声用機器から，ディジタルカメラやディジタルテレビなどの画像・映像用機器まで，我々の身の周りには，実に多くのディジタル機器であふれている．これほどまでに普及したディジタル機器であるが，その土台となるディジタル信号処理技術は，果たして完成したものだろうか．まだまだ改良の余地がある，というのが我々の見解である．例えば，最近のディジタルテレビ放送を見ていると，情報圧縮にともなうノイズ，特にブロック歪みやモスキートノイズと呼ばれるディジタル映像特有のノイズ [3] が目に付くことが多い．本文 **3.** で詳しく述べるが，これらは Shannon のサンプリング定理にもとづく信号処理理論 [13,15,14] の欠点が現れたものである．

これら Shannon のサンプリング定理にもとづく信号処理の問題点を解決するために，筆者らは，サンプル値制御理論を用いた全く新しい信号処理理論を提案し，シミュレーションおよび実験によりその有効性を示してきた [7,22,24,11,18,12,5,4,10,25,26]．本解説記事では，まず **2.** にて，土台となるサンプル値制御理論，特にリフティングについての簡単な解説を述べた後，**3.** にて，信号復元問題という信号処理における基本問題の一つをサンプル値 H^∞ 最適化問題として定式化する．その問題に対して，**4.** では，高速サンプリングを用いた解法を示し，**5.** にて，本手法と従来手法（Shannon の定理のもとづく方法）を比較するための数値例を示す．

2. サンプル値制御理論

ここでは，サンプル値制御理論の基礎であるリフティングについて解説し，リフティングにもとづいてサンプル値制御系の伝達関数および周波数応答を定義する．また，それにもとづいて，サンプル値制御系の H^∞ ノルムを導入する．

* 京都大学　情報学研究科
Key Words: sampled-data control, H^∞ optimization, digital filters



第 1 図　リフティング：連続時間信号 $w(t)$ が関数空間に値を持つ離散時間信号へと変換される．

サンプル値制御系には連続時間信号と離散時間信号が混在するため，システム全体は周期時変系となり，古典的な意味での伝達関数や周波数応答[1]は定義できない．この問題を解決するのがリフティングと呼ばれる手法であり，第一筆者らによって 1990 年代初頭に開発された [19,1,20,21,2]．リフティングを用いれば，連続時間の線形時不変系を等価的に離散時間系として表現でき，これにより，サンプル値系全体も線形時不変系として表現できることになる．したがって，サンプル値系の伝達関数や周波数応答がリフティングを介して定義され，H^∞ 制御の概念もサンプル値系に対して自然に拡張することができる．

まず，連続時間信号に対するリフティングを定義しよう．連続時間信号 $\{w(t)\}_{t\geq 0}$ に対して，次で定義される写像 $\mathcal{L}$ を**リフティング**と呼ぶ：

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}w)[k] &:= \mathbf{w}[k]\\ &:= \{w(kh+\theta)\}_{\theta\in[0,h)}, \quad k=0,1,2,\ldots \end{aligned}\tag{1}$$

すなわち，リフティング $\mathcal{L}$ は連続時間信号 $\{w(t)\}_{t\geq 0}$ を小区間 $[0,h)$ 上の関数 $\mathbf{w}[k]$ の列 $\{\mathbf{w}[k]\}_{k=0}^{\infty}$ に変換する（第 1 図を参照せよ）．リフティングの定義により，明らかに

$$\|w\|^2_{L^2[0,\infty)} = \sum_{k=0}^{\infty}\|\mathbf{w}[k]\|^2_{L^2[0,h)}$$

が成り立つので，リフティング $\mathcal{L}$ は Hilbert 空間 $L^2[0,\infty)$ とリフトされた関数列の Hilbert 空間 $\ell^2_{L^2[0,h)}$ との間の等距離同型写像を与える．

このリフティングを用いれば，連続時間の線形時不変

[1] 古典的な意味での伝達関数（周波数応答）は，線形時不変システムのインパルス応答の Laplace 変換（Fourier 変換）として定義される．

系を離散時間（無限次元）線形時不変系として等価的に表現できる．次の線形系を考えよう：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t), \quad t \in [0,\infty).$$

ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は入力, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ は出力である．入力 u を $[0,\infty)$ 上の局所 2 乗可積分関数，すなわち $u \in L^2_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ とする．

リフティングを用いて，この連続時間系をサンプリング周期 $h>0$ の離散時間系として表現してみる．まず時刻 $t = kh$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ において，状態が $x[k] := x(kh)$ であったとし，この時点から，h 秒後までに入力 $u(t)$ がシステムに入力したとすると，その間の状態と出力は

$$x(kh+h) = e^{Ah}x(kh) + \int_0^h e^{A(h-\tau)}Bu(kh+\tau)d\tau,$$
$$y(kh+\theta) = Ce^{A\theta}x(kh) + \int_0^\theta e^{A(\theta-\tau)}Bu(kh+\tau)d\tau,$$
$$k = 0,1,2,\ldots, \quad \theta \in [0,h)$$

で与えられる．(1) 式 のリフティングを入力 u と出力 y に適用し，上の方程式を書き換えれば，次の離散時間系が得られる [2,21]：

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \mathcal{A}x[k] + \mathcal{B}\mathbf{u}[k], \\ \mathbf{y}[k] &= \mathcal{C}x[k] + \mathcal{D}\mathbf{u}[k], \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $x[k] = x(kh)$, $\mathbf{u}[k] = (\mathcal{L}u)[k]$, $\mathbf{y}[k] = (\mathcal{L}y)[k]$ であり，また

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathcal{A}x := e^{Ah}x, \\ &\mathcal{B} : L^2[0,h) \to \mathbb{R}^n : \mathcal{B}u := \int_0^h e^{A(h-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \\ &\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \to L^2[0,h) : (\mathcal{C}x)(\theta) := Ce^{A\theta}x, \ \theta \in [0,h), \\ &\mathcal{D} : L^2[0,h) \to L^2[0,h) : \\ &\qquad (\mathcal{D}u)(\theta) := \int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \ \theta \in [0,h) \end{aligned} \tag{3}$$

である．ここで，各作用素 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ はステップ k に依存せず，したがって，(2) 式 の離散時間系は時不変であることがわかる．したがって，(2) 式 のシステムを離散時間の制御器やフィルタに直接接続することができ，そうして得られるサンプル値系は，サンプル点間の応答を犠牲にすることなく，等価的に線形時不変離散時間系として表現されることになる．

さらに，作用素 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を用いて，(2) 式のシステムの**伝達関数（作用素）** $\mathcal{G}(z)$ が次のように定義される：

$$\mathcal{G}(z) := \mathcal{D} + \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}.$$

ここで，複素数 $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(e^{\mathcal{A}h})$ を固定すると[1]，$\mathcal{G}(z)$ は $L^2[0,h)$ 上の線形作用素となることに注意せよ．この伝達関数を用いて，(2) 式のシステムの**周波数応答（作用素）**は $\mathcal{G}(e^{j\omega h})$ で定義され，周波数 ω での周波数応答の**ゲイン**は

$$\|\mathcal{G}(e^{j\omega h})\| := \sup_{v \in L^2[0,h),\ v \neq 0} \frac{\left\|\mathcal{G}\left(e^{j\omega h}\right)v\right\|_{L^2[0,h)}}{\|v\|_{L^2[0,h)}}$$

として定義される．さらに，(2) 式のシステムの H^∞ **ノルム**は

$$\|\mathcal{G}\|_\infty := \sup_{\omega \in [0,2\pi/h)} \|\mathcal{G}(e^{j\omega h})\|$$

で定義される．これが，サンプル値系の H^∞ ノルムである．さらにこの H^∞ ノルムは，システム $\mathcal{G}$ の L^2 誘導ノルム

$$\|\mathcal{G}\| := \sup_{u \in L^2, u \neq 0} \frac{\|\mathcal{G}u\|_2}{\|u\|_2}$$

に一致することが知られている [2].

3. H^∞ 信号復元問題

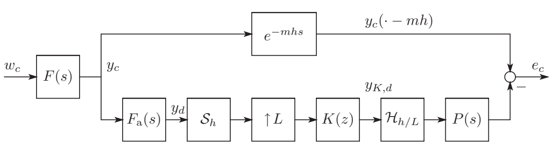
この節では，前節で導入したサンプル値系の H^∞ ノルムを用いた信号復元問題の定式化について述べる．信号復元問題とは，ある連続時間信号のサンプル値から元の信号を復元する問題であり，この問題の解として，Shannon の**サンプリング定理** [13,14] は有名である．しかし，Shannon のサンプリング定理は，元の連続時間信号がある周波数以上の周波数成分を持たない（すなわち，その信号の Fourier 変換の台が有界）という仮定（これを**完全帯域制限仮定**と呼ぶ）をおいて成り立つものである．しかし，現実の信号を考えると，この完全帯域制限の仮定はほとんどの場合，成り立たない．このような考察から，Unser らは，整合性の原理 (consistency principle) を導入し，斜交射影 (oblique projection) の手法を用いて，サンプリング定理をより広いクラスの信号へと拡張した [15,16]．これを**一般化サンプリング定理**と呼ぶ．しかし，この方法には，次の 2 つの問題点がある [25]：

- 想定内の信号に対しては完全な信号復元（すなわち復元誤差がゼロ）が可能であるが，その範囲を超えた信号に対しては，復元誤差が大幅に拡大する．
- 復元過程が一般に因果的ではない．

いっぽう，筆者らは，上記の Unser らの方法とは本質的に異なる手法，すなわち，サンプル値 H^∞ 制御理論にもとづいた信号復元手法を提案している [7,11,25,26]．以下，この信号復元問題の定式化を行なおう．

第 2 図のブロック線図を考える．連続時間の外生信号 $w_c \in L^2$ がローパスフィルタ $F(s)$ を通り，高周波成分がカットされ信号 y_c が得られる．この y_c が復元すべき連続時間信号であると考える．ここでローパスフィルタ $F(s)$ は，厳密にプロパーかつ安定と仮定する．これよ

[1] $\sigma(e^{\mathcal{A}h})$ は行列 $e^{\mathcal{A}h}$ のすべての固有値の集合を表す



第 2 図　フィルタ設計のための誤差系

り，信号 y_c は一般にいくらでも大きい周波数成分を含むことになり，上で述べた Shannon のサンプリング定理や一般化サンプリング定理で想定している信号よりも広いクラスの信号を想定している．具体的には，我々は以下の信号空間（L^2 の部分空間）を考える：

$$FL^2 := \left\{ y_c \in L^2 : y_c = Fw_c,\ w_c \in L^2 \right\}. \tag{4}$$

この空間 FL^2 は，Shannon の定理における完全帯域制限信号の空間

$$BL := \left\{ y_c \in L^2 : \mathrm{supp}\ \hat{y}_c \subset (-\pi/h, \pi/h) \right\},$$

よりも真に大きい，すなわち，$BL \subsetneq FL^2$ であることが示される [10]．フィルタ $F(s)$ をどう選ぶかは信号復元において重要な問題であるが，指針としてシステム同定とモデリングの二種類の方法がある：

- 想定している様々な信号の Fourier 変換を求め，それらの各周波数での平均値または最大値から周波数分布を求める．
- 音の発生源がある特定の楽器などの場合は，その物理モデルから $F(s)$ を求める．

なお，$F(s)$ として，カットオフ周波数が Nyquist 周波数 $\Omega_0 > 0$ の理想的なローパスフィルタ，すなわち

$$F_{\mathrm{ideal}}(j\omega) = \begin{cases} 1, \text{ if } & \omega < \Omega_0, \\ 0, \text{ if } & \omega \geq \Omega_0 \end{cases}$$

を選べば，Shannon のサンプリング定理に対応する．

$F(s)$ によって生成された連続時間信号 y_c は，アンチエリアシングフィルタ $F_{\mathrm{a}}(s)$ によってフィルタリングされ，サンプリング周期 $h > 0$ の理想サンプラ $\mathcal{S}_h$ によって離散時間信号 y_d へと変換される．次にアップサンプラ $\uparrow L$ によって，$y_d[n]$ と $y_d[n+1]$ の間に 0 が $L-1$ 個挿入され，周波数が L 倍された信号が得られる．このアップサンプルされた信号は，ディジタルフィルタ $K(z)$ で補間処理され，新たな信号 $y_{K,d}$ が得られる．この信号 $y_{K,d}$ は，ゼロ次ホールド $\mathcal{H}_{h/L}$ で連続時間信号に変換され，ローパスフィルタ $P(s)$ を通って，最終的なアナログ信号 $\tilde{y}_c$ が得られる．

このアナログ信号 $\tilde{y}_c$ と元のアナログ信号 y_c との誤差をなるべく小さくすることが信号復元問題の目的である．通常の信号処理では，フィードバック制御と異なり，処理時間にある程度遅れが生じても，特に大きな問題とはならない．そこで，信号処理に遅れを導入することで，復元精度の向上をはかる[1]．すなわち，復元信号 $\tilde{y}_c$ と元信号が mh だけ遅れた $y_c(\cdot - mh)$ との誤差を小さくするようなディジタルフィルタ $K(z)$ の設計として定式化する（第 2 図を参照せよ）．この遅れのパラメータ m が大きければ大きいほど，復元性能が良くなると考えられるが，実際には，ある m 以上でほとんど性能は変わらないことが，数値実験により確かめられる．詳しくは，参考文献 [26] を参照せよ．

以上をまとめると，信号復元の問題は，復元誤差

$$e_c := y_c(\cdot - mh) - \tilde{y}_c$$

をなるべく小さくするようなディジタルフィルタ $K(z)$ を求める問題として定式化できる．第 2 図の入力 w_c から復元誤差 e_c までの誤差系を T_{ew} とおく．評価関数として，このシステムの L^2 誘導ノルム，すなわちサンプル値系 T_{ew} の H^∞ ノルム

$$\|T_{wc}\|_\infty := \sup_{w_c \in L^2, w_c \neq 0} \frac{\|T_{wc} w_c\|_2}{\|w_c\|_2}$$

を採用する．すなわち，我々の信号復元問題は以下の問題として定式化される：

【問題 1】　実数 $\gamma > 0$ が与えられたとき，

$$J := \|T_{ew}\|_\infty = \sup_{w_c \in L^2[0,\infty)} \frac{\|T_{ew} w_c\|_2}{\|w_c\|_2} < \gamma \tag{5}$$

を達成する安定な離散時間系 $K(z)$ を（もし存在すれば）求めよ．□

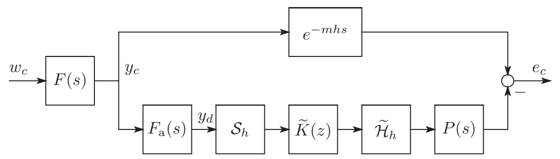
(5) 式の評価関数は，(4) 式で定義した信号空間 FL^2 のすべての信号のうち，誤差 $e_c = T_{ew} w_c$ の L^2 ノルムを最も大きくする信号，すなわち最悪の入力に対して，誤差を最小化する問題である．どのような信号が元信号としてサンプルされるかは未知であるので，このような最悪ケースの設計が適している．また，第 2 図 の誤差系を見ると，ここで定式化した信号復元問題は，信号空間 FL^2 を仮定したうえで，純粋なむだ時間 e^{-mhs} を近似する問題であるとも捉えることができる．

4. 高速サンプリングによる解法

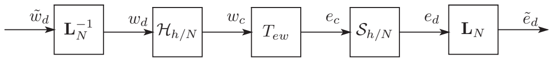
本節では，上記の H^∞ 信号復元問題の解（サンプル値 H^∞ 最適フィルタ）の数値計算法について述べる．計算法については，等価離散時間系による方法 [9] と高速サンプリングによる方法 [6,23] があるが，ここでは後者について解説する．

高速サンプリング法では，連続時間の入出力信号 w_c と e_c に対し，サンプリング周期が h/N（N は 2 以上の整数）の高速サンプラと高速ホールドを仮想的に導入

[1] Shannon のサンプリング定理や一般化サンプリング定理にもとづく信号復元では，一般に復元系は非因果的となる．これは,「信号処理の遅れが無限大となる」とも解釈できる．



第 3 図　単一レート系への変換



第 4 図　FSFH (Fast-sampling/Fast-hold) 変換

し，第 2 図のサンプル値系を近似的に離散時間系として表現する方法である．近似の精度は，N が大きければ大きいほど良くなることが知られているが [23]，実際には，それほど N は大きくなくとも（例えば，$N\sim 5L$ 程度で），処理結果が良好なディジタルフィルタが得られることが，数値シミュレーションにより確認されている．

まず，第 2 図 の誤差系のディジタルの部分，すなわち，信号 y_d から $y_{K,d}$ までの部分を見てみると，アップサンプラ $\uparrow L$ があるために，マルチレート系となっている．まず初めに，この部分をポリフェーズ分解 [17] の手法により単一レート系へと変換する．離散時間信号に対する**ポリフェーズ分解** (polyphase decomposition) $\mathbf{L}_L$ と逆分解 $\mathbf{L}_L^{-1}$ を次式で定義する[1]：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_L &:= (\downarrow L)\begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{L-1}\end{bmatrix}^\top,\\
\mathbf{L}_L^{-1} &:= \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-L+1}\end{bmatrix}(\uparrow L).
\end{aligned} \tag{6}
$$

この分解を用いれば $K(z)(\uparrow L)$ の部分は

$$
\begin{aligned}
K(z)(\uparrow L) &= \mathbf{L}_L^{-1}\widetilde{K}(z),\\
\widetilde{K}(z) &:= \mathbf{L}_L K(z)\mathbf{L}_L^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^\top
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる．得られるフィルタ $\widetilde{K}(z)$ は，1 入力 L 出力の線形時不変系である．次に周期 h の一般化ホールド $\widetilde{\mathcal{H}}_h := \mathcal{H}_{h/L}\mathbf{L}_L^{-1}$ を定義すると，次の等式が得られる：

$$
\mathcal{H}_{h/L}K(z)(\uparrow L)\mathcal{S}_h = \widetilde{\mathcal{H}}_h\widetilde{K}(z)\mathcal{S}_h.
$$

以上より，第 2 図のマルチレート系は第 3 図の単一レート系へと等価的に変換されたことになる．

次に，第 3 図の誤差系 T_{ew} に対して，高速サンプリング法を適用する．高速サンプラ $\mathcal{S}_{h/N}$ と高速ホールド $\mathcal{H}_{h/N}$ を系の入出力に接続し，さらに (6) 式のポリフェーズ分解 $\mathbf{L}_N$ を適用する．第 4 図 にこの操作を示す．第 4 図 の $\tilde{w}_d$ から $\tilde{e}_d$ へのシステムをシステム T_{ew} の高速サンプリング／高速ホールド変換（fast-sampling/fast-hold transformation，FSFH 変換）と呼び，$\mathbf{FSFH}(T_{ew},h,N)$ で表現する．この $\mathbf{FSFH}(T_{ew},h,N)$ の公式を導出する前に，連続時間線形時不変系の FSFH　変換を導出してみよう．まず，連続時間系 $D+C(sI-A)^{-1}B$ または，離散時間系 $D+C(zI-A)^{-1}B$ に対して，次の記法を導入する：

$$
\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D\end{array}\right] := \begin{cases} D+C(sI-A)^{-1}B\ （連続時間系）,\\ D+C(zI-A)^{-1}B\ （離散時間系）.\end{cases}
$$

次に ステップ不変離散化 [2] を $\mathbf{c2d}$ であらわす．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c2d}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D\end{array}\right], h\right) &:= \mathcal{S}_h\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D\end{array}\right]\mathcal{H}_h\\
&= \left[\begin{array}{c|c} e^{Ah} & \int_0^h e^{At}Bdt\\ \hline C & D\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

またシステムのポリフェーズ分解（離散時間リフティング）を $\mathbf{lift}$ であらわす．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{lift}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D\end{array}\right], N\right) &:= \mathbf{L}_N\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D\end{array}\right]\mathbf{L}_N^{-1}\\
&= \left[\begin{array}{c|cccc} A^N & A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B\\ \hline C & D & 0 & \dots & 0\\ CA & CB & D & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & D\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

このとき，連続時間線形時不変系 F に対して，サンプリング周期 h，分割数 N の FSFH 変換は

$$
\mathbf{FSFH}(F,h,N) := \mathbf{lift}\big(\mathbf{c2d}(F,h/N),N\big)
$$

で与えられる．

上記の FSFH 変換をサンプル値の誤差系 T_{ew} に適用すれば，近似離散時間系が次のように得られる：

【定理 1】 FSFH 変換の分割数を $N=Ll$（l は自然数）とし，離散時間線形時不変系 T_N を次式で定義する：

$$
T_N(z) = z^{-m}F_N(z) - P_N(z)H\widetilde{K}(z)S\widetilde{F}_N(z).
$$

ここで，

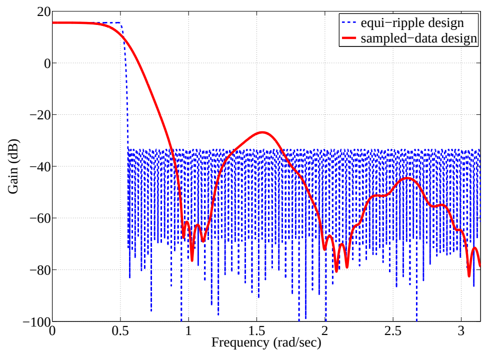
$$
\begin{aligned}
&F_N := \mathbf{FSFH}(F,h,N),\ P_N := \mathbf{FSFH}(P,h,N),\\
&\widetilde{F}_N := \mathbf{FSFH}(FF_\mathrm{a},h,N),\\
&\quad H := \mathrm{diag}\{I_l\}\in\mathbb{R}^{N\times L},\ I_l := [1,1,\dots,1]^\top\in\mathbb{R}^l,\\
&\quad S := [1,0,\dots,0]\in\mathbb{R}^{1\times N}.
\end{aligned}
$$

このとき，任意に固定された $\widetilde{K}$ と $\omega\in[0,2\pi/h)$ に対して，$\lim_{N\to\infty}\|T_N(e^{j\omega h})\| = \|T_{ew}(e^{j\omega h})\|$ が成り立つ．この収束は $\omega\in[0,2\pi/h)$ に関して一様であり，さらに，$\widetilde{K}$ の属する集合がコンパクトであれば，収束は $\widetilde{K}$ に関しても一様である．□

証明は，参考文献 [25] の Theorem 1 を参照せよ．

$\widetilde{K}$ についての $\|T_N\|_\infty$ の一様収束性より，(5) 式の設

[1] この分解は，制御の分野では，**離散時間リフティング** (discrete-time lifting) として知られている [2]．



第 5 図　ボードゲイン線図：サンプル値設計（実線）と等リップル設計（破線）

計問題は，近似的に $\|T_N\|_\infty<\gamma$ で表すことができる．これは離散時間 H^∞ 最適化問題であり，その解 $\widetilde{K}(z)$ は，数値計算ソフトウェア，例えば，MATLAB の Robust Control Toolbox[8] などを用いれば，容易に求めることができる．最適フィルタ $\widetilde{K}(z)$ が求まれば，補間フィルタ $K(z)$ は次の公式により得られる：

$$K(z)=\left[\,1\ \ z^{-1}\ \ \dots\ \ z^{-L+1}\,\right]\widetilde{K}(z^L).$$

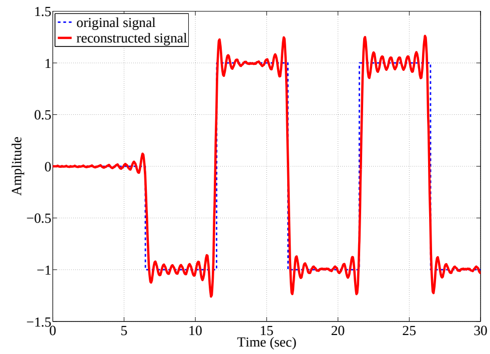
5.　数値例題

本節では，サンプル値 H^∞ 最適化によるフィルタ設計法と従来法である Parks-McClellan の手法にもとづく等リップルフィルタ設計法 [17] を比較する．

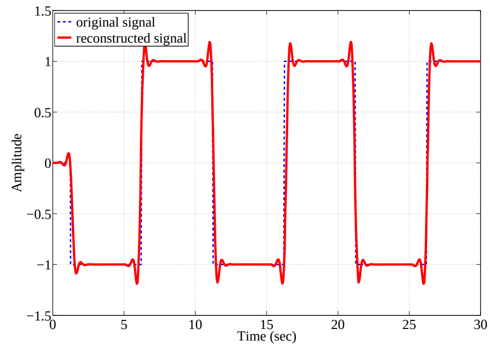
アップサンプラの定数を $L=6$，サンプリング周期を $h=1$，時間遅れの定数を $m=4$ とし，連続時間システム $F(s)$，$F_{\mathrm{a}}(s)$ および $P(s)$ をそれぞれ

$$F(s)=\frac{1}{(10s+1)(s+1)},$$
$$F_{\mathrm{a}}(s)=\frac{1}{0.01s+1},\quad P(s)=\frac{1}{0.05s+1}$$

とする．これらの定数のもと，分割比を $N=4$ として FSFH 変換により離散化し，最適フィルタ $K(z)$ を MATLAB Control System Toolbox の `hinfsyn` により求める．また比較対象である等リップルフィルタは 256 タップの FIR フィルタとする．得られたディジタルフィルタのゲイン線図を第 5 図に示す．このゲイン線図から，等リップルフィルタは，カットオフ周波数 $\pi/6$ (rad/sec) 付近でゲインが急峻に減衰することがわかる．いっぽう，我々のフィルタは比較的緩やかな減衰である．Shannon のサンプリング定理にもとづく信号処理理論では，カットオフ周波数での減衰は急峻であればあるほど良いとされているので，そのような観点から見ると，等リップルフィルタのほうが優れていると思われるかもしれない．しかし，等リップルフィルタの欠点は，矩形波を再現してみればよくわかる．第 6 図 に等リップルフィルタにより再現した矩形波を示す．この応答には，リンギング



第 6 図　等リップルフィルタによる矩形波の復元



第 7 図　サンプル値 H^∞ 最適フィルタによる矩形波の復元

と呼ばれるノイズがはっきりと示されている．このリンギングは，例えば音楽再生においてたいへん耳障りな雑音として知覚され，また画像処理においては，このリンギングは「モスキートノイズ」とも呼ばれ，高圧縮画像などによく見られる現象である．これらは，数理的には，周波数領域のゲインを急峻に打ち切ったことによる，時間領域での Gibbs 現象である．いっぽう，第 7 図 にサンプル値制御理論にもとづいて設計されたフィルタにより再現された矩形波を示す．リンギングはほとんど存在せず，良好な信号復元を示す．

6.　おわりに

本解説では，まずサンプル値制御理論の基礎概念を説明した後，そのディジタル信号処理への応用として信号復元問題をとりあげ，その問題設定と高速サンプリングによる解法を示した．サンプル値制御理論は信号処理系の設計においてたいへん有用な理論であり，本解説で示したほかにも様々な応用がある．詳しくは，参考文献 [25] をご参照いただきたい．

謝辞

サンプル値制御理論にもとづく信号処理の研究の初期段階では，故藤岡久也氏との共同研究 [22,24] が重要な役割を果たしました．心より故人のご冥福をお祈りいたします．

参 考 文 献

[1] B. Bamieh and J. B. Pearson: "A general framework for linear periodic systems with applications to H_∞ sampled-data control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 4, pp. 418–435 (1992)

[2] T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)

[3] 映像情報メディア学会編：MPEG, 総合マルチメディア選書，オーム社 (1996)

[4] 藤山，蚊野，岩崎，海部，山本：サンプル値制御理論を用いた圧縮オーディオ向け高域補正技術，システム制御情報学会論文誌，Vol. 20, No. 1, pp. 31–38 (2007)

[5] K. Kashima, Y. Yamamoto and M. Nagahara: "Optimal wavelet expansion via sampled-data control theory," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 2, pp. 79–82 (2004)

[6] J. P. Keller and B. D. O. Anderson: "A new approach to the discretization of continuous-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 2 pp. 214–223 (1992)

[7] P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto: "Delayed signal reconstruction using sampled-data control," *Proc. 35th IEEE CDC*, pp. 1259–1263 (1996)

[8] Matheworks, *Robust Control Toolbox*, http://www.mathworks.com/products/robust/

[9] L. Mirkin and G. Tadmor, "Yet another H^∞ discretization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 5, pp. 891–894 (2003)

[10] M. Nagahara, M. Ogura, and Y. Yamamoto: "H^∞ design of periodically nonuniform interpolation and decimation for non-band-limited signals," *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 4, No. 5, pp. 341–348 (2011)

[11] 永原，山本：インターポレータのサンプル値 H^∞ 設計，システム制御情報学会論文誌，Vol. 14, No. 10, pp. 483–489 (2001)

[12] 永原，山本：ディジタル通信システムのサンプル値 H^∞ 設計，システム制御情報学会論文誌，Vol. 16, No. 1, pp. 38–43 (2003)

[13] C. E. Shannon: "Communication in the presense of noise," *Proc. IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21 (1949)

[14] M. Unser: "Sampling—50 years after Shannon," *Proc. of the IEEE*, Vol. 88, No. 4, pp. 569–587 (2000)

[15] M. Unser and A. Aldroubi: "A general sampling theory for nonideal acquisition devices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 42, No. 11, pp. 2915–2925 (1994)

[16] M. Unser and T. Blu: "Cardinal exponential splines: part I—theory and filtering algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438 (2005)

[17] P. P. Vaidyanathan: *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1993)

[18] 若佐，安福，永原，山本：切除平面法によるインターポレータのサンプル値設計，計測自動制御学会論文集，Vol. 38, No. 5, pp. 462–468 (2002)

[19] Y. Yamamoto: "New approach to sampled-data control systems—a function space method," *Proc. 29th IEEE CDC*, pp. 1882–1887 (1990)

[20] Y. Yamamoto, "A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 4, pp. 703–713 (1994)

[21] Y. Yamamoto, "Digital control," *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, Vol. 5, pp. 445–457 (1999)

[22] Y. Yamamoto, H. Fujioka and P. P. Khargonekar: "Signal reconstruction via sampled-data control with multirate filter banks," *Proc. 36th IEEE CDC*, pp. 3395–3400 (1997)

[23] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: "Approximation of frequency response for sampled-data control systems," *Automatica*, Vol. 35, No. 4, pp. 729–734 (1999)

[24] Y. Yamamoto, M. Nagahara and H. Fujioka, "Multirate signal reconstruction and filter design via sampled-data H^∞ control," *Proc. 14th MTNS* (2000)

[25] Y. Yamamoto, M. Nagahara, and P. P. Khargonekar: "Signal reconstruction via H^∞ sampled-data control theory—Beyond the Shannon paradigm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 60, No. 2, pp. 613–625 (2012)

[26] Y. Yamamoto, M. Nagahara, and P. P. Khargonekar: "A brief overview of signal reconstruction via sampled-data H^∞ optimization," *Applied and Computational Mathematics*, Vol. 11, No. 1, pp. 3–18 (2012)

著 者 略 歴

やま もと　ゆたか
山本　裕 (正会員)

1978年フロリダ大学 Ph. D. 1998年より京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻教授．専門は制御理論，およびディジタル信号処理．IEEE Control Systems Society (CSS) の Vice President, システム制御情報学会の会長などを歴任．G. S. Axelby Outstanding Paper Award, 文部科学大臣表彰，など受賞多数．IEEE および SICE のフェロー．2012年より IEEE CSS の President-elect.

なが はら　まさ あき
永原　正章 (正会員)

2003年3月京都大学大学院情報学研究科博士課程修了．同年4月同大学助手，2007年4月同大学助教となり現在に至る．ディジタル信号処理，サンプル値制御，ネットワーク化制御などの研究に従事．IEEE, SICE, IEICE などの会員.