

# ハイゼンベルク群の等質空間の コンパクト Clifford-Klein 形の変形空間 (Deformation spaces of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of Heisenberg groups)

京都大学・数理解析研究所 吉野太郎 (Taro Yoshino)  
Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

## Abstract

T. Kobayashi introduced the deformation space of Clifford-Klein forms, which is a natural generalization of deformation spaces of geometric structures. Selberg-Weil's local rigidity theorem claims that the deformation space is discrete for Riemannian irreducible symmetric spaces  $M$  if the dimension  $d(M) \geq 3$ . In contrast to this theorem, local rigidity does not hold (even in higher dimensional case) in the non-Riemannian case. However, the explicit forms of such deformation spaces are obtained only for a few cases now. In this paper, we calculate explicitly the deformation spaces of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of Heisenberg groups.

## 1 導入

トーラス  $\mathbb{T}^2$  や、より一般のコンパクトリーマン面へは複素構造を幾通りにも定めることができる。空間  $M$  に対し、「 $M$  への複素構造の定め方全体」は「 $M$  の複素構造の変形空間」と呼ばれる。同様に空間  $M$  と幾何構造  $J$  (例えばリーマン構造, 擬リーマン構造, 複素構造など) に対して,  $M$  の  $J$  構造の変形空間を考えることができる。このような変形空間には幾何構造  $J$  を与えるパラメータから自然に位相構造が定まる。

セルバークによると, 既約なリーマン対称空間は 3 次元以上ならば局所剛性定理を満たす。すなわち, 変形空間が離散的であり, 幾何構造を「連続的に」変形することは出来ない。このような事情から, 従来の変形空間に関する議論は 2 次元の空間 (即ちコンパクトリーマン面) に限られていた。

一方, 小林は「 $J$  構造の変形空間」の一般化として「Clifford-Klein 形の変形空間」を定義し, セルバークの剛性定理が (非リーマンの場合も含んだ) より一般的な設定下で成り立つか, という問いを提起した。そして, 局所剛性的でない (すなわち連続変形可能な) 空間で, いくらでも高い次元の例を発見した。従って, このような変形空間を具体的に決定することは意味のあることだと思われる。

<sup>o</sup>2000 Mathematics Subject Classification. Primary 22E40; Secondary 58H15.

<sup>o</sup>This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

Received November 8, 2006. Revised January 10, 2007.

近年, 小林-Nasrin([7]) により, ある特別な非リーマン対称空間に対し, その Clifford-Klein 形の変形空間が具体的に計算された. しかし, 今のところその他の例で非リーマンな対称空間の Clifford-Klein 形の変形空間が具体的に決定できているものは無い.

そこで, この講演では ハイゼンベルク群の対称空間 (及び等質空間) のコンパクト Clifford-Klein 形の変形空間を具体的に求めたい. その証明においては, [7] で用いられた手法をやや一般化した上で用いている.

## 2 Clifford-Klein 形

この節では Clifford-Klein 形を定義し, 小林により提唱されたこの分野における重要な問題 (問題 4) を述べたい. まず, 次の事実から見ていこう.

**事実 1.** 離散群  $\Gamma$  が多様体  $M$  へ固定点自由かつ忠実に作用していると仮定する. このとき, 次は同値である.

- (i) 商写像  $\pi : M \rightarrow \Gamma \backslash M$  が被覆写像となり, 商空間  $\Gamma \backslash M$  が Hausdorff となる.
- (ii) 商写像  $\pi$  が被覆写像となり, さらに  $\pi$  が局所微分同相写像になるよう  $\Gamma \backslash M$  に多様体の構造が入る.
- (iii)  $\Gamma$  の  $M$  への作用が固有不連続である.

ここで, (iii)  $\Rightarrow$  (i), (ii) は忠実性の仮定なしに成り立つ. すなわち, 作用の固有不連続性は商空間が多様体の構造を持つことを保証する条件であると言える. ここで, 固有不連続性と不連続群の定義を思い出そう.

**定義 2.** 離散群  $\Gamma$  が多様体  $M$  に作用していると,  $M$  の部分集合  $S$  に対して,  $\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(S) \cap S \neq \emptyset\}$  と定める.

- (1) 任意のコンパクト集合  $S \subset M$  に対し  $\Gamma_S$  が有限集合であるとき,  $\Gamma$  の  $M$  への作用は固有不連続であるという.
- (2)  $\Gamma$  の  $M$  への作用が固定点自由かつ固有不連続であるとき,  $\Gamma$  を  $M$  の不連続群という.

Clifford-Klein 形とは, リー群の等質空間の不連続群による商空間であり, 正確には次のように定義される.

**定義 3.**  $G/H$  をリー群の等質空間とし, 離散部分群  $\Gamma \subset G$  が  $G/H$  の不連続群であると仮定する. このとき商多様体  $\Gamma \backslash G/H$  を  $G/H$  の Clifford-Klein 形という.

トラス ( $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{C}$ ) や, 種数 2 以上のコンパクトリーマン面 ( $\Gamma \backslash \mathcal{H} \simeq \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ ) はコンパクトな Clifford-Klein 形の典型的な例である.

次の問題は Clifford-Klein 形において重要な問題の一つである.

**問題 4 ([5, 問題 C']).** Clifford-Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  の変形空間  $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$  やモジュライ空間  $\mathcal{M}(\Gamma, G, H)$  を求めよ.

この講演では,  $G$  がハイゼンベルク群,  $H$  がその閉部分群,  $\Gamma = \mathbb{Z}^k$  の場合に問題 4 を解く.

### 3 変形空間とモジュライ空間

この節では, Clifford-Klein 形の変形空間  $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$  やモジュライ空間  $\mathcal{M}(\Gamma, G, H)$  の定義を簡単に復習したい (詳しくは [5, § 5] を参照). 大まかに言えば, これらの空間は Clifford-Klein 形の変形のパラメータ空間であり, 以下で定義するように,  $G$  内での  $\Gamma$  の変形を表すパラメータ空間  $R(\Gamma, G, H)$  から, Clifford-Klein 形の変形としては本質的でない分を潰した空間として定義される.

$\Gamma$  を抽象的な離散群とし,  $\Gamma$  から  $G$  への準同型写像全体のなす集合  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  に各点収束による位相を入れる. さらに,  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  の部分集合  $R(\Gamma, G, H)$  を次のように定義する ([3] の Remark 3 より).

$$R(\Gamma, G, H) := \{\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G) : \varphi \text{ は単射であり, } \varphi(\Gamma) \text{ は } G/H \text{ の不連続群}\}$$

このとき, Clifford-Klein 形の変形空間, モジュライ空間は次のように定義される.

(変形空間)  $g \in G$  と  $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  に対し, 準同型写像  $\varphi^g : \Gamma \rightarrow G$  を

$$\varphi^g(\gamma) := g^{-1}\varphi(\gamma)g$$

によって定める. このとき, 二つの Clifford-Klein 形  $\varphi^g(\Gamma)\backslash G/H$  と  $\varphi(\Gamma)\backslash G/H$  は写像

$$\varphi^g(\Gamma)xH \mapsto \varphi(\Gamma)gxH$$

によって, 自然に同型になる. Clifford-Klein 形の変形空間とは  $R(\Gamma, G, H)$  から, このような「本質的でない」分を省いた空間である. 即ち,  $G$  の  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  への右からの作用を

$$\text{Hom}(\Gamma, G) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma, G), \quad \varphi \mapsto \varphi^g$$

と定めると, この作用は  $R(\Gamma, G, H)$  を保つ. そこで, 次のように定義する.

定義 5 ([5]).  $\mathcal{T}(\Gamma, G, H) := R(\Gamma, G, H)/G$  を変形空間と呼ぶ.

(モジュライ空間) 写像  $\varphi, \varphi' \in R(\Gamma, G, H)$  が写像として異なっても, その像が一致する (即ち  $\varphi(\Gamma) = \varphi'(\Gamma)$  となる) なら Clifford-Klein 形として自然に同型である. その分を省くために,  $T \in \text{Aut}(\Gamma)$  と  $\phi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  に対し準同型写像  $T\phi : \Gamma \rightarrow G$  を

$$(T\phi)(\gamma) := \phi(T^{-1}\gamma)$$

と定める. これより定まる  $\text{Aut}(\Gamma)$  の作用は,  $R(\Gamma, G, H)$  を保ち, 先に定めた  $G$  の作用と可換であるため, 次のように定義できる.

定義 6 ([5]).  $\mathcal{M}(\Gamma, G, H) := \text{Aut}(\Gamma)\backslash\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$  をモジュライ空間と呼ぶ.

特に  $G$  が等質空間  $G/H$  の  $J$  不変自己同型全体に一致するときは, 上で定義した変形空間・モジュライ空間は,  $J$  構造の変形空間・モジュライ空間に一致している.

### 4 既知の結果

Clifford-Klein 形  $\Gamma\backslash G/H$  において, その変形空間  $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$  が離散的な場合, Clifford-Klein 形  $\Gamma\backslash G/H$  を ( $\Gamma$  を動かすことによって) 「連続的に」変形することはできない. このような Clifford-Klein 形は局所剛性的であると言われる. 逆に, 局所剛性的でないときは連続変形可能と言われる.

Clifford-Klein 形がいつ局所剛性的となるか, また局所剛性的とならないならその変形空間はどのような空間か, という問いは Clifford-Klein 形の研究において重要な問題である. まず, 既知の結果を見て行こう (詳しくは [5, § 5] を参照).

以下の二つの場合について, 連続変形可能となる必要十分条件が得られている.

定理 7.

- (1)  $G$  を非コンパクトな単純リー群とし,  $K$  を極大コンパクト部分群とする.  $G/K$  は 2 次元のとき, またそのときに限り, 連続変形可能なコンパクト Clifford-Klein 形を持つ ([9]).
- (2)  $(G, H) = (G' \times G', \text{diag} G')$  とし,  $G'$  を非コンパクトな単純リー群とする.  $G$  の離散部分群  $\Gamma$  として,  $\Gamma \subset G' \times 1$  なるものを考えると,  $G'$  が  $SO(n, 1)$  または  $SU(n, 1)$  に局所同型なとき, またそのときに限り  $G/H$  は連続変形可能な Clifford-Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  を持つ ([4]).

連続変形可能な Clifford-Klein 形に対し, その変形空間が研究されているのは現在のところ次の場合である.

- (1) コンパクトリーマン面  $M_g (g \geq 2)$   $\Gamma \backslash G/H = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ .
- (2) トーラス  $G/H = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}/\mathbb{C}^\times$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ .
- (3)  $G/H = G' \times G'$ ,  $G' = SL(2, \mathbb{R})$  ([1],[8]).
- (4)  $G/H = G' \times G'$ ,  $G' = SL(2, \mathbb{C})$  ([2]).
- (5)  $\Gamma = \mathbb{Z}^k$  で,  $G, H$  が以下の場合 ([7]).

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} I_k & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} I_k & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

これらの変形を幾何的に言い直すと, それぞれ, (1) はコンパクトリーマン面  $M_g (g \geq 2)$  の複素構造の変形, (2) はトーラス  $\mathbb{T}^2$  の複素構造の変形, (3) は 3 次元多様体上のローレンツ構造の変形, (4) は 3 次元複素多様体上の複素構造の変形に対応している.

## 5 主結果

この節では,  $G$  がハイゼンベルク群の場合に問題 4 に答える. まず, ハイゼンベルク群を定義しよう.

$A$  を  $V = \mathbb{R}^{2n}$  上の標準的な非退化交代形式とする. 即ち,  $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を  $v = (v_1, v_2)$ ,  $w = (w_1, w_2) \in V \simeq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$  に対して

$$A(v, w) := \langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle$$

と定める. ただし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbb{R}^n$  の標準的な内積とする. このとき,  $G := V \times \mathbb{R}$  の元  $g_1 = (v, s)$ ,  $g_2 = (w, t)$  に対し, 積を

$$g_1 g_2 := (v + w, s + t + \frac{1}{2}A(v, w)) \in G$$

と定めた群をハイゼンベルク群という。  $G \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$  は自然に多様体の構造を持ち、上で定めた積は滑らかであるから  $G$  は自然にリー群となる。また、  $G$  の中心  $C$  は  $\{0\} \times \mathbb{R}$  となる。

以下では、  $G$  の連結閉部分群  $H$  が  $G$  の中心  $C$  を含むという仮定の下で、コンパクトな Clifford-Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  の変形空間、モジュライ空間を求めたい。主定理を述べるために、  $H$  に符号  $(p, q)$  を定義しよう。  $V$  を自然に  $G$  の部分群とみなすと、

$$V_H := V \cap H$$

は  $V$  の部分空間となる。このとき、  $C \subset H$  の仮定から  $H = V_H \times \mathbb{R}$  と書くことができる。また

$$V_0 := \{v \in V : A(v, V_H) = 0\}$$

と定め、  $V_0$  の  $V_H$  での補空間を一つ選び  $V_1$  とすれば  $A$  は  $V_0$  上で恒等的に 0、  $V_1$  上で非退化となる。

**定義 8.**  $(p, q) := (\frac{1}{2} \dim V_1, \dim V_0)$  を  $H$  の符号と呼ぶ。

**注 9.**  $A$  は  $V_1$  上の非退化交代形式であるから、特に  $\dim V_1$  は偶数である。従って、符号は二つの自然数の組となる。

**命題 10.**  $G$  を  $2n+1$  次元のハイゼンベルク群とし、その連結閉部分群  $H$  が  $G$  の中心  $C$  を含むと仮定する。  $\Gamma \backslash G/H$  が  $G/H$  のコンパクト Clifford-Klein 形であるならば  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^k$  (ただし、  $k = \dim G - \dim H$ ) である。

**定理 11.** 命題 10 と同じ仮定の下  $(p, q)$  を  $H$  の符号とし  $r \in \mathbb{N}$  を  $p+q+r=n$  となるように選び、  $\Gamma := \mathbb{Z}^k$  ( $k = \dim G - \dim H$ ) とおく。  $G/H$  がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は  $p \geq r$  であり、このときコンパクト Clifford-Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  の変形空間、モジュライ空間は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Gamma, G, H) &= (Sp(p, \mathbb{R})/Sp(p-r, \mathbb{R})) \times \text{Sym}(\mathbb{R}^q) \times M(p, q; \mathbb{R})^2 \times GL(k, \mathbb{R}), \\ \mathcal{M}(\Gamma, G, H) &= (Sp(p, \mathbb{R})/Sp(p-r, \mathbb{R})) \times \text{Sym}(\mathbb{R}^q) \times M(p, q; \mathbb{R})^2 \times (SL(k, \mathbb{Z}) \backslash GL(k, \mathbb{R})) \end{aligned}$$

**例 12.** 特に、  $G/H$  が対称空間の場合は、  $V_H$  は非退化となり  $q=0$  となる。従って、変形空間は

$$\mathcal{T}(\Gamma, G, H) = (Sp(p, \mathbb{R})/Sp(p-r, \mathbb{R})) \times GL(2p, \mathbb{R})$$

となる。また、逆に  $V_H$  が全等方的なときは  $p=r=0$  となるので

$$\mathcal{T}(\Gamma, G, H) = \text{Sym}(\mathbb{R}^q) \times GL(q, \mathbb{R})$$

となる。

## 6 証明

この節では、命題 10 と定理 11 を証明する。まず、命題 10 の証明の為に次の事実を思い出そう。

**事実 13 ([10]).** 単連結かつ連結なベキ零リー群  $G$  の任意の部分群  $\Gamma$  は syndetic hull を持つ。即ち、  $\Gamma$  を余コンパクトに含む連結な閉部分群  $L$  が存在する。

これを用いて、命題 10 を証明しよう。

*Proof.* ハイゼンベルク群  $G = V \times \mathbb{R}$  は単連結かつ連結なベキ零リー群であるので、その任意の部分群は syndetic hull を持つ。いま、 $\Gamma$  の  $G/H$  への作用は固有不連続であるから、その syndetic hull  $L$  の  $G/H$  への作用は固有でなければならない。ここで  $H$  は  $G$  の中心  $C$  を含んでいたため、 $L$  の作用の固有性より連結閉部分群  $L$  は  $C$  を含んではいけない。ハイゼンベルク群  $G = V \times \mathbb{R}$  の連結な閉部分群で  $C$  を含まないものは可換群でなければならず、結局  $L$  はリー群として  $\mathbb{R}^d$  に同型である。さらに  $L \backslash G/H$  のコンパクト性から  $d = \dim G - \dim H$  が分かる。これより、その離散部分群  $\Gamma \subset L$  は  $\mathbb{Z}^k$  (但し  $k := \dim G - \dim H$ ) に同型であることが分かる。 ■

最後に、定理 11 を証明しよう。以下、条件  $p \geq r$  は特に仮定せずに、変形空間を求めて行く。この過程で  $p < r$  ならば変形空間が空集合であることが分かり、結果として  $G/H$  がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ為の必要十分条件が  $p \geq r$  であると言える。

変形空間とモジュライ空間を次の 4 つのステップに分けて計算しよう。

(Step 1) 【定理の証明は  $H = H_{p,q}$  の場合に行えば十分であることを言う】  
 $G$  の閉部分群  $H_{p,q}$  を次のように定義する。

$$H_{p,q} := V_{p,q} \times \mathbb{R}, \quad V_{p,q} := \left\{ \begin{pmatrix} p & * \\ q & * \\ r & 0 \\ p & * \\ q & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^r.$$

主定理の証明は、 $H = H_{p,q}$  の場合のみ行えばよいことを見ていこう。実際、 $T := Sp(n, \mathbb{R})$  とおけば、 $T$  の  $V$  への作用は標準的な非退化交代形式  $A$  を保つ。従って、 $T$  は以下のようにして  $G$  へ自己同型として作用する。

$$G \rightarrow G, \quad (v, s) \mapsto (t(v), s)$$

このとき、次が成り立つ。

補題 14. 定理 11 と同じ設定下において、部分群  $H$  は  $\text{mod } T$  で、 $H_{p,q}$  に等しい。

*Proof.* 非退化な交代形式に関する一般論から、 $V_H$  は適当な  $t \in Sp(n, \mathbb{R})$  によって、 $V_{p,q}$  に移されることが分かる。従って、この  $t$  により  $H$  は  $H_{p,q}$  に移される。 ■

変形空間やモジュライ空間は  $G$  の自己同型により  $H$  を動かしても同型なので、補題 14 より  $H = H_{p,q}$  の場合のみ定理を証明すれば十分である。

(Step 2) 【ある条件を満たす部分空間  $W \subset V$  全体を決定する問題に帰着させる】

一般に、連結かつ単連結なベキ零リー群  $G$  内で離散部分群  $\Gamma$  を変形することを考えよう。 $\Gamma$  の syndetic hull  $L$  を取れば、「 $G$  内での  $\Gamma$  の変形」は「 $G$  内での  $L$  の変形」と「 $L$  内での  $\Gamma$  の変形」の直積に分解することができる。

特に、定理 11 の設定下では「 $L \simeq \mathbb{R}^k$  内での  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^k$  の変形」は  $GL(k, \mathbb{R})$  に他ならない。従って、変形空間を求める上で必要な計算は「 $G$  内での  $L$  の変形」の部分に限られる。

このような方針に基づいて空間  $U$  を

$$U := \{W \subset V \text{ 部分空間} : \dim W = k, W \cap V_{p,q} = \{0\}, A|_W \equiv 0\}$$

と定めよう. 実は,  $U$  は「 $G$  内での  $L$  の変形」に相当する部分であり, 実際, 次の補題が成り立つ.

**補題 15.**

$$\begin{aligned} T(\mathbb{Z}^k, G, H) &\simeq U \times GL(k, \mathbb{R}), \\ M(\mathbb{Z}^k, G, H) &\simeq U \times (SL(k, \mathbb{R}) \setminus GL(k, \mathbb{R})) \end{aligned}$$

この補題は, 離散群  $\Gamma$  の変形問題を, その syndetic hull  $L$  の変形問題に置き換えるものであり, 同様の手法は [7] でも使われている.

この証明の為に, 固有不連続性の概念を, 離散的とは限らない一般の群へと拡張したい. そこで次の定義を思い出そう.

**定義 16.** リー群  $L$  が多様体  $M$  に作用していると,  $M$  の部分集合  $S$  に対して,  $L_S := \{l \in L : l(S) \cap S \neq \emptyset\}$  と定める.

- (1) 任意のコンパクト集合  $S \subset M$  に対し  $L_S$  がコンパクトであるとき,  $L$  の  $M$  への作用は固有であるという.
- (2) 任意の点  $p \in M$  に対し  $L_{\{p\}}$  がコンパクトであるとき,  $L$  の  $M$  への作用は (CI) 条件を満たすという.

定義 2 と定義 16 を見比べれば分かるように, 固有性は固有不連続性の自然な一般化である. また, 離散群  $\Gamma$  の作用が固有不連続であることは, その syndetic hull  $L$  の作用が固有であることと同値である. そのため, 補題 15 の証明のためには  $L$  の作用の固有性が判定できれば良い. 一方, 固有な作用は常に (CI) 条件を満たし, また, 一般に (CI) 条件は固有性よりも判定し易い条件である. 従って, 適当な仮定の下で作用の固有性を (CI) 条件に帰着させることが出来れば議論を簡単にできる. 実際, 次が成り立つ.

**補題 17.**  $G$  を連結かつ単連結なベキ零リー群とし,  $L, H$  をその連結閉部分群とする.  $L \setminus G/H$  がコンパクトならば次は同値.

- (i)  $L$  の  $G/H$  への作用は固有.
- (ii)  $L$  の  $G/H$  への作用は (CI) 条件を満たす.
- (iii)  $L \cap H = \{e\}$ .

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) と (ii)  $\Rightarrow$  (iii) は明らかなので (iii)  $\Rightarrow$  (i) を示せば良い.  $(L, G, H)$  が補題の仮定を満たすとき  $L \setminus G/H$  はユークリッド空間に同相であり, さらにコンパクト性より  $L \setminus G/H \simeq \mathbb{R}^0$  が分かる. これより  $G = LH$  であり, 勝手なコンパクト集合  $S \subset G$  は適当なコンパクト集合  $S_L \subset L$  と  $S_H \subset H$  により  $S \subset S_L S_H$  と書くことができる. このとき,

$$SHS^{-1} \cap L \subset S_L S_H H S_H^{-1} S_L^{-1} \cap L \subset S_L (H \cap L) S_L^{-1}$$

と書け, (iii) から (i) が従う. ■

これを使って補題 15 を示そう.

*Proof.* 変形空間が  $U \times GL(k, \mathbb{R})$  で与えられることは以下の等式を順に示すことで確かめられる。

$$\begin{aligned} & \{\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) : \varphi \text{ は単射であり,} \\ & \quad \varphi(\mathbb{Z}^k) \text{ の作用は固定点自由かつ固有不連続}\} / \text{Ad}(G), \\ & \simeq \{\varphi' \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, G) : \varphi' \text{ は単射であり,} \\ & \quad \varphi'(\mathbb{R}^k) \text{ の作用は固定点自由かつ固有}\} / \text{Ad}(G), \\ & \simeq \{\varphi'' \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, V) : \varphi'' \text{ は単射であり,} \\ & \quad \varphi''(\mathbb{R}^k) \text{ の作用は固定点自由かつ固有}\}, \\ & \simeq U \times GL(k, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\varphi$  は自然数倍の作用や和と可換であるため、線形に拡張することで  $\varphi'$  が得られる。逆に  $\varphi'$  が与えられれば、 $\mathbb{Z}^k$  に制限することで  $\varphi$  を得る。これより一つ目の等式が分かる。

いま、2行目の集合に含まれる  $\varphi' \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, G)$  を  $\varphi'(x) = (\varphi'_1(x), \varphi'_2(x)) \in G = V \times \mathbb{R}$  と書いたとする。Image  $\varphi'$  は  $G$  の中心  $C$  を含まないので、適当な線形写像  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  によって、 $\varphi'_2(x) = \phi(\varphi'_1(x))$  と書けなければいけない。一方、 $\text{Ad}(w, 0)(v, \phi(v)) = (v, \phi(v) + A(w, v))$  であるから、 $A$  の非退化性より、適当な  $w \in V$  を選べば、 $\text{Ad}(w, 0)(v, \phi(v)) = (v, 0)$  とできる。即ち、 $\phi' \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, G)$  は適当な  $w \in V$  によって、 $\text{Ad}(w, 0)\phi' \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, V)$  とすることができる。また、このようにできる  $w \in V$  は一意に定まるので、二つ目の等号が分かる。

最後に三つ目の等号を示す。 $W := \text{Image}(\varphi'')$  と置くことにより、 $\varphi''$  全体の取りうる範囲は、 $W$  の取りうる範囲と  $GL(k, \mathbb{R})$  の直積となることが分かる。従って、 $\varphi''$  が満たすべき条件と  $W$  が満たすべき条件を比較すれば良い。まず、 $\varphi''$  が単射であることと、 $\dim W = k$  は同値である。また、 $\mathbb{R}^k$  が可換群であることから、 $\varphi''$  が準同型であることと  $A|_W \equiv 0$  が同値となる。さらに、 $\varphi''(\mathbb{R}^k)$  の作用が固有であることは、補題 17 より  $W \cap V_{p,q} = \{0\}$  と同値である。従って三つ目の等号も示された。

また、上の式において、 $GL(k, \mathbb{R})$  は syndetic hull 内での  $\Gamma$  の変形を表しているのので、モジュライ空間は  $U \times (SL(k, \mathbb{R}) \backslash GL(k, \mathbb{R}))$  で与えられる。

これにより、補題が証明できた。 ■

**(Step 3)** 【ある行列が対称行列になる条件を決定する問題に帰着させる】

以下、(Step 2) で定義した集合  $U$  を決定しよう。まず、

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \\ r & * \\ p & 0 \\ q & * \\ r & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^r$$

とおくと、 $N$  は  $H = H_{p,q}$  の補空間である。従って、線形空間の直和分解  $V = H \oplus N$  に対応して自然な全射

$$\varpi_N : V \rightarrow N$$

が定まる。このとき、次が言える。



**Claim.**  $W \cap V_{p,q} = \{0\} \iff \varpi_N|_W$  が全単射.

実際、 $N$  も  $W$  も  $V_{p,q}$  の補空間なので、特に次元が等しく、従って単射ならば自動的に全射である。一方、 $\ker \varpi_N = V_{p,q}$  より  $\ker(\varpi_N|_W) = W \cap V_{p,q}$  であるから Claim が分かる。

そこで、

$$\iota_W : W \rightarrow V$$

を自然な埋め込み写像としたとき、Claim より、 $W \in X$  に対して、線形写像  $\Phi : N \rightarrow V$  を

$$\Phi := \iota_W \circ (\varpi_N|_W)^{-1}$$

によって定めることができる。 $\Phi$  の行列表示を

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ I & & \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

とする。このとき条件  $A|_W \equiv 0$  は

$$A(\Phi(x), \Phi(y)) = \langle T_1 x, T_2 y \rangle - \langle T_2 x, T_1 y \rangle = 0$$

と同値であり、さらにこれは  ${}^t T_1 T_2$  が対称行列になることと同値である。すなわち、

$$U \simeq \{ \Phi : N \rightarrow V : \Phi \text{ は (6.1) で与えられ、} {}^t T_1 T_2 \text{ は対称行列} \}$$

となる。以上から、結局

$${}^t T_1 T_2 = \begin{pmatrix} {}^t A_1 C_1 & {}^t A_1 C_2 + {}^t B_1 & {}^t A_1 C_3 + I \\ {}^t A_2 C_1 & {}^t A_2 C_2 + {}^t B_2 & {}^t A_2 C_3 \\ {}^t A_3 C_1 & {}^t A_3 C_2 + {}^t B_3 & {}^t A_3 C_3 \end{pmatrix}$$

が対称行列となる条件を考えれば良い。

**(Step 4) 【変形空間とモジュライ空間を決定する】**

最後に  ${}^t T_1 T_2$  が対称行列となる条件を求めよう。まず、

$$Y := \begin{pmatrix} A_3 & A_1 \\ C_3 & C_1 \end{pmatrix} \in M(2p, 2r; \mathbb{R}),$$

$$J_m := \begin{pmatrix} & -I_m \\ I_m & \end{pmatrix} \in M(m, \mathbb{R})$$

とおく。簡単なブロック計算から行列  ${}^t T_1 T_2$  が対称行列であるためには

$${}^t Y J_p Y = J_r \quad (6.2)$$

が必要条件である事が分かる。逆に、(6.2) が満たされるときは、 $A_2, C_2 \in M(p, q; \mathbb{R})$  と  $Z \in \text{Sym}(\mathbb{R}^q)$  を任意に選び、

$$B_1 := {}^t A_2 C_1 - {}^t C_2 A_1$$

$$B_2 := Z - {}^t C_2 A_2$$

$$B_3 := {}^t A_2 C_3 - {}^t C_2 A_3$$

と置けば,  ${}^tT_1T_2$  は対称行列となる. 従って

$$U' := \{Y \in M(2p, 2r; \mathbb{R}) : {}^tYJ_pY = J_r\}$$

とおけば, 以下のようになることが分かる.

$$U \simeq U' \times \text{Sym}(\mathbb{R}^q) \times M(p, q; \mathbb{R})^2$$

あとは  $U'$  を決定すればよい. まず,  $p < r$  ならば  $U' = \emptyset$  である. 実際, (6.2)において, 左辺のランクは高々  $2p$  であり, 右辺のランクは  $2r$  である. 従って,  $p < r$  ならば (6.2) が満たされることは無い.  $U'$  が空集合なので, とくに変形空間, モジュライ空間も空集合である.

一方,  $p \geq r$  のときは, 次の Claim が成り立つ.

**Claim.**  $U \simeq Sp(p, \mathbb{R})/Sp(p-r, \mathbb{R})$ .

この Claim は  $Sp(p, \mathbb{R})$  が  $U$  に推移的に作用し固定部分群が  $Sp(p-r, \mathbb{R})$  になることから分かる.

この Claim により,  $p \geq r$  のときは

$$U \simeq Sp(p, \mathbb{R})/Sp(p-r, \mathbb{R}) \times \text{Sym}(\mathbb{R}^q) \times M(p, q; \mathbb{R})^2$$

となり, 補題 15 とあわせると, 定理 11 の証明が完了する. ■

## References

- [1] W. M. GOLDMAN *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry **19** (1984), 233–240.
- [2] É. GHYS *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $SL(2, \mathbb{C})$* , J. Reine angew. Math. **468** (1995), 113–138.
- [3] T. KOBAYASHI *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geometry and Physics **12** (1993), 133–144.
- [4] T. KOBAYASHI *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 394–408.
- [5] T. KOBAYASHI *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, Springer (2001), 723–747; 邦訳 “非リーマン等質空間の不連続群論” 『数学の最先端 21 世紀への挑戦』 Vol. 1, (2002), 18–73.
- [6] T. KOBAYASHI “非リーマン等質空間の不連続群について”, 数学 **57** (2005), 267–281; An English translation by M. Reid is to appear in Sugaku Exposition, Amer. Math. Soc., math. DG/0603319.
- [7] T. KOBAYASHI AND S. NASRIN *Deformation of properly discontinuous actions of  $\mathbb{Z}^k$  on  $\mathbb{R}^{k+1}$* , Internat. J. Math. **17** (2006), 1175–1193.
- [8] F. SALEIN *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial*, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), 525–530.

- [9] A. WEIL *Remarks on the cohomology of groups*, Ann. Math. **80** (1964), 149–157.
- [10] T. YOSHINO *Criterion of proper actions for 3-step nilpotent Lie groups*, International Journal of Mathematics, (accepted).

E-mail address: yoshino@kurims.kyoto-u.ac.jp

