RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B16 (2010), 173–192

Two-dimensional inverse problems for Schrödinger equations with a complex coefficient

By

Michiyuki Watanabe*

Abstract

We consider the stationary Schrödinger equation with a complex potential in two dimensions. In this paper, we give a reconstruction scheme to identify the small complex potential from the corresponding scattering amplitude at a fixed energy.

§1. 序論

§1.1. 摩擦項を持つ波動方程式

$b(x)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の実数値連続関数で，遠方で十分早く減衰しているものとする．このとき，波動方程式

$$w_{tt} - \Delta w + b(x) w_t = 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \tag{1.1}$$

は波動方程式

$$w_{0tt} - \Delta w_0 = 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

の摂動とみることができる．従って，この 2 つの方程式の間の散乱問題を考えることができる．

波動方程式の散乱問題は次の書き換えによりシュレーディンガー方程式の場合に帰着される．(1.1) の解 $w(t) = w(x,t)$ に対し

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta}\, w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix}$$

Received March 31, 2009. Revised August 6, 2009.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 35R30, 35P25, 35J10
Key Words: Inverse problems, Schrödinger equations, Scattering amplitude, Dirichlet-to-Neumann map.
Supported by JAPAN SUPPORT
*Faculty of Education, Niigata University.

とおけば $\boldsymbol{v}(t)$ は方程式

$$\frac{1}{i}\boldsymbol{v}_t = \mathcal{H}\boldsymbol{v} = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V}^b)\boldsymbol{v}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\Delta} \\ -\sqrt{-\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V}^b = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b(x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

を満たす．この方程式 (1.2) を $[L^2]^2 = L^2 \times L^2$ における発展方程式とみなし，シュレーディンガー方程式の散乱理論を適用することを考える．しかし，$\mathcal{V}^b$ は（$\mathcal{H}$ は）自己共役ではないため，散乱理論においてよく知られた自己共役の場合に対する結果をそのまま使うことができない．ここに波動方程式 (1.1) の散乱問題の難しさがある．

多次元 ($n \geq 3$) における散乱問題は，望月（[19], [20], [21], [22]）により $|b(x)|$ が十分小さい場合について，波動作用素

$$\mathcal{W}_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it\mathcal{H}} e^{it\mathcal{H}_0},$$
$$\mathcal{W}_\pm^{-1} = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it\mathcal{H}_0} e^{it\mathcal{H}}$$

の存在が示され，散乱作用素 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{S} = \mathcal{W}_+^{-1}\mathcal{W}_-$ と定義でき，$[L^2]^2$ 上の全単射となることが証明された．さらに，エネルギー λ に対する S 行列 $\hat{S}(\lambda)$ が

$$\hat{S}(\lambda) := \mathcal{F}_0(\lambda)\mathcal{S}\mathcal{F}_0^*(\lambda) = I - 2\pi i \mathcal{A}(\lambda),$$
$$\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda)\{\mathcal{V}^b - \mathcal{V}^b(\mathcal{H} - \lambda - i0)^{-1}\mathcal{V}^b\}\mathcal{F}_0^*(\lambda)$$

で与えられることも示された．ここで $\mathcal{F}_0(\lambda)$ は

$$\mathcal{F}_0(\lambda) = \begin{cases} F_0(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} & \text{for } \lambda > 0, \\ F_0(-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} & \text{for } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$[F_0(\lambda)f](\omega) = \frac{\lambda^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\lambda\omega\cdot x} f(x)\, dx, \quad (\lambda, \omega) \in \mathbf{R}_+ \times S^{n-1}$$

である．望月（[19], [22]）では，多次元逆問題における Faddeev の理論を応用し，$|b(x)|$ が十分小さく，遠方で指数減衰している $b(x)$ ならば，対応する S 行列 $\hat{S}(\lambda)$ （λ は一つの与えられたエネルギー）から $b(x)$ を一意に再構成できることを証明した．

2 次元における散乱問題は，中澤（[26], [27]），門脇-中澤-渡辺 [14] らにより波動作用素 $\mathcal{W}_\pm$，$\mathcal{W}_\pm^{-1}$ の存在証明を $|b(x)|$ の小ささの仮定を緩める方向で研究が進んでいる．2 次元逆問題については，散乱振幅から $b(x)$ を一意的に決定できることがわかっている（[30]）．ここで，(1.1) に対する散乱振幅について触れておく．

時間周期的な解 $w(t) = e^{i\sqrt{E}t}u(x)$ を考える．(1.1) に代入すると $u = u(x)$ は

$$-\Delta u + i\sqrt{E}b(x)u = Eu \tag{1.4}$$

を満たす．$V_E(x) = i\sqrt{E}b(x)$ とおけば，方程式 (1.4) は複素ポテンシャル $V_E(x)$ を持つ定常シュレーディンガー方程式とみなすことができる．シュレーディンガー方程式の場合と同様にして，方程式 (1.4) に対する散乱振幅を次のように定義する．方程式 (1.4) の解で次のような漸近挙動をするものを考える：

$$u(x, E, \omega) = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + \frac{e^{i\sqrt{E}|x|}}{|x|^{(n-1)/2}}A(E, \theta, \omega) + o(|x|^{-(n-1)/2}), \tag{1.5}$$

$|x| \to \infty$．右辺第一項は ω 方向から入射された平面波を表し，右辺第二項は $\theta = x/|x|$ 方向に散乱される球面波を表している．球面波の振幅 $A(E, \theta, \omega)$ を**散乱振幅**と呼ぶ．

自己共役なシュレーディンガー作用素の場合でよく知られていることだが，S 行列は積分作用素で書かれ，その積分核は散乱振幅に等しい．同様のことが波動方程式 (1.1) の場合にも成立する．実際

$$V^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ib(x) \end{pmatrix}$$

であるから作用素の行列 $\mathcal{A}(\lambda)$ の成分は，$R_0(z)$ を $-\Delta$ のレゾルベントとすると，

$$A^b(\lambda) = F_0(\lambda)\Big[ib + \lambda b\big\{1 + i\lambda R_0((\lambda + i0)^2)b\big\}^{-1}R_0((\lambda + i0)^2)b\Big]F_0(\lambda)^*$$

となり，これは (1.4)，(1.5) を満たす解（$\lambda = \sqrt{E}$ とせよ）で書かれる（望月 [19]）．つまり，散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ が与えられれば，$\mathcal{A}(E)$ を構成できる．

先に述べたように，波動方程式 (1.1) に対する散乱および散乱の逆問題は，$|b(x)|$ が小さい摩擦係数 $b(x)$ に対してのみ結果がある．逆問題については，多次元の場合に望月が Faddeev の理論を応用して再構成の手順をあたえているが，2 次元の場合は一意性の結果のみで，再構成の手順についてはわかっていない．

このノートでは，波動方程式 (1.1) に対する散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ から $b(x)$ を決定する逆問題を 2 次元の場合で考察する．一意性はわかっている（[30]）ので，再構成の問題について考える．

§ 1.2.　主結果

主結果について述べる．$b(x)$ は次の A-1 または A-2 を満たすものとする．

A-1 $b(x)$ は実数値関数で $b \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ かつ $b(x) \geq 0$ (or $b(x) \leq 0$)．さらに，ある $\delta_0 > 0$ と多重指数 β に対し

$$|\partial^\beta b(x)| \leq C_\beta e^{-\delta_0|x|}$$

が成立する．

A-2 $b \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，すなわちコンパクト台をもつ実数値 C^∞ 関数.

Theorem 1.1. $b(x)$ は仮定 *A-1* か *A-2* を満たすとする．任意に $E \in (0,\infty)$ を固定する．このとき $\omega \in S^1$ に対し (1.4)，(1.5) を満たす解 $u(x,E,\omega) \in L^{2,-s}(\mathbf{R}^n)$ （$s > 1/2$）が唯一つ存在する．さらに $A(E,\theta,\omega)$ は

$$A(E,\theta,\omega) = C(E)\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x} b(x)u(x,E,\omega)dx, \tag{1.6}$$

$$C(E) = (2\pi)^{-n/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}E^{(n-1)/4}e^{-(n-1)\pi i/4} \tag{1.7}$$

と書ける.

Remark. 望月（[19], [22]）及び中澤 ([26], [27]) では，(1.1) に対する波動作用素の存在と完全性を証明するのに $|b(x)|$ の小ささを仮定した．この定理 1.1 は，波動方程式 (1.1) に対する散乱振幅を構成することに関しては，$|b(x)|$ の小ささの仮定は必要ないことを主張している．また，[30] では, 十分小さいエネルギー $E > 0$ に対してのみ解を構成したが，エネルギー E の小ささの制限もこの定理で改善できた.

定理 1.1 の証明は [31] を参照してほしい.

次に，逆問題に関する結果を述べる．$n = 2$ とする．$\Omega = B_R := \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| \le R\}$ とし，$W^{m,p}$ を L^p における通常のソボレフ空間とする.

Theorem 1.2. $b(x)$ は仮定 *A-2* を満たすとする．さらに $\operatorname{supp} b \subset \Omega$ とし，ある $p > 2$ に対し

$$\|b\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le M$$

と仮定する．このとき，ある正の定数 $N = N(p,\Omega,M)$ が存在し，任意に固定した $E \in (0, N)$ に対する散乱振幅 $A(E,\theta,\omega)$ から $b(x)$ を唯一つ求めることができる.

Remark. $|b(x)|$ の大きさ M の制限はないことに注意．多次元逆問題では，$|b(x)|$ が十分小さい場合に，S 行列から $b(x)$ を一意的に再構成できることが証明されているが（望月 [19], [22]），この定理は低エネルギーに対する散乱振幅からであれば（そのエネルギーの大きさは $b(x)$ のサイズと台によって決まるが），任意の大きさの $b(x)$ を一意的に再構成できることを主張している.

エネルギーを一つ固定した場合の散乱の逆問題では，2 次元以上で統一的に問題を解くのは非常に難しく，現在のところ，多次元と 2 次元の場合それぞれ独立に考察する必要がある．これは波動方程式 (1.1) に対する散乱の逆問題に限った話ではなく，シュレーディンガー方程式に対する散乱の逆問題が持つ特徴の一つである．また，2 次元逆問題では，実数値係数の再構成法はそのままでは複素数値係数の場合に通用しない．次節以降

で，散乱の逆問題の特徴と 2 次元逆問題における実数値係数の再構成法を紹介し，複素数値係数の場合の困難点および一つの解決策を述べようと思う．

§ 1.3. 逆問題の特徴

定常シュレーディンガー方程式の散乱の逆問題とは，以下のような問題であった．$q(x)$ は遠方で十分早く減衰しているものとし，$E > 0$ とする．

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = Eu(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.8}$$

を満たすもので，次のような漸近挙動をする解について考える．

$$u(x) = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}}A(E,\,\theta,\,\omega) + o(r^{-(n-1)/2}), \quad r = |x| \to \infty. \tag{1.9}$$

ここで，$\omega \in S^{n-1}$，$\theta = x/|x|$ であり，$A(E,\theta,\omega)$ を散乱振幅と呼んだ．散乱の逆問題とは

E を一つ固定する．$A(E,\theta,\omega)$ から $q(x)$ を再構成せよ．

という問題である．特に以下の問題について考える：

- **一意性の問題**：散乱振幅 $A(E,\theta,\omega)$ は $q(x)$ を一意的に決めるのか？
- **再構成の問題**：もし一意的に決まるのであれば，$q(x)$ を $A(E,\theta,\omega)$ を用いて計算せよ．

適当な条件の下で，散乱振幅は次のように表現される：

$$A(E,\,\theta,\,\omega) = C(E)\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x}q(x)u(x)\,dx,$$
$$C(E) = -(2\pi)^{-n/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-(n-3)\pi i/4}E^{(n-3)/4}.$$

ここで $u(x)$ は考えている方程式の解である．散乱振幅の表現式から散乱の逆問題は以下の特徴を有することがわかる．

散乱の逆問題の特徴

(1) 非線形の問題である．

(2) E を固定すると，次元によって問題の構造が変わる．

(3) E を固定，$\operatorname{supp} q(x) \subset \Omega$(滑らかな境界を持つ有界領域) なら，**境界値逆問題**に帰着できる．ここで，境界値逆問題とは，以下のような問題である．境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

を考える．ここで，$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし，V は複素数値関数で $V \in L^p(\Omega)$ $(p > 2)$ とする．もし 0 が $-\Delta + V$ in Ω の Dirichlet 固有値でないならば，境界値問題 (1.10) は適当に f を与えると解 u が唯一つ定まる．この解に対し，**Dirichlet-Neumann 写像（DN 写像）**を次のように定義する：

$$\Lambda_V : \ f \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}.$$

ここで，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．境界値逆問題とは，

境界値逆問題：DN 写像 Λ_V から V を決定せよ

である．散乱の逆問題と同様に，一意性の問題と再構成の問題が考えられる．

- 一意性の問題：DN 写像 Λ_V は V を一意的に決めるのか？
- 再構成の問題：もし一意的に決まるのであれば，V を Λ_V を用いて計算せよ．

さて，散乱の逆問題の特徴（１）,（２）,（３）ついて，簡単に解説する．

(1) 散乱の逆問題において，既知関数は $A(E, \theta, \omega)$ であり，未知関数は $q(x)$ である．また，解 $u(x)$ は $q(x)$ に依存するのでもちろん未知関数である．従って散乱振幅の表現式を未知関数 $q(x)$ に関する方程式とみると，非線形であることがわかる．

(2) E を固定すると，空間 3 次元以上の場合は，散乱の逆問題は優決定（overdetermined）の問題である．例えば 3 次元の場合，既知関数である散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ は $\theta \in S^2, \omega \in S^2$ であるから 4 変数の関数であり，未知関数 $q(x)$ は 3 変数の関数である．一方 2 次元の場合は，散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ と $q(x)$ は共に 2 変数の関数である．

(3) $E > 0$ を任意に一つ固定する．$V = q - E$ とおく．$\{A(E, \theta, \omega) \,|\, \theta \in S^{n-1}, \omega \in S^{n-1}\}$ から DN 写像 Λ_V を計算する公式がある．証明は Isakov-Nachman [9] および Nachman（[23]，[25]）にあるが，ここでは池畠 [7, pp.38-44] で述べられている（$n = 3$ の場合についての）計算の方法を述べる．

$R_0 > 0$ とし，w を $|x| > R_0$ におけるヘルムホルツ方程式の**外向き解（outgoing solution）**とする．すなわち w は

$$(\Delta + k^2) w = 0 \qquad \text{in } |x| > R_0, \tag{1.11}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) w = o(r^{-1}), \quad r = |x| \to \infty \tag{RC}$$

を満たすものとする．このとき w は

$$w(r\omega) = \frac{e^{ikr}}{r} F_0(\omega) + O(r^{-2}), \quad \omega = \frac{x}{r},\ r \to \infty$$

という漸近形を持つ．関数 $F_0(\omega) : S^2 \to \mathbf{C}$ を **far-field pattern** と呼ぶ．さらに，w の $|x| > R_0$ における値が次の公式により，far-field pattern から計算できる：

$$w(x) = k \sum_{l \geq 0} i^{l+1} \sum_{|m| \leq l} b_l^m H_l^{(1)}(k|x|) Y_l^m(\omega),$$

$$b_l^m = \int_{S^2} F_0(\theta) Y_l^m(\theta)\, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots ; |m| \leq n).$$

ここで，$H_l^{(1)}$ は第 1 種 Hankel 関数であり $Y_l^m(\omega)$ は球面調和関数である．以上のことは Colton-Kress [5, pp.72-74] にある．

散乱振幅について思い出そう．

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = Eu(x), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

を満たすもので $u = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + v$ という形の解を考え，v の $r = |x| \to \infty$ での漸近形が $A(E, \theta, \omega)\dfrac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}}$ $(\theta = x/r)$ となるものに対し，$A(E, \theta, \omega)$ を散乱振幅と呼んだ．今，$\Omega = B_R$ とし，$\operatorname{supp} q(x) \subset \Omega$ と仮定する．このとき v は

$$\begin{cases} (\Delta + E)v = 0 & \text{in } \mathbf{R}^3 \setminus \Omega, \\ v = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + u & \text{on } \partial\Omega, \\ v = A(E, \theta, \omega)\dfrac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}} + o(r^{-(n-1)/2}) & r \to \infty \end{cases}$$

を満たす．3 番目の条件は簡単な計算により (RC) と同じであることがわかる．($n = 3$ とせよ.) 従って，散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ は v に対する far-field pattern であり，先ほど述べたように v の $|x| > R$ での値が，従って $u = u(x, E, \omega)$ の $|x| > R$ での値が $A(E, \theta, \omega)$ から計算できることがわかる．

$G_E(x, y)$ をレゾルベント $R(E) = (-\Delta + q - E - i0)^{-1}$ の積分核とする．$R_0 > 0$ を $\operatorname{supp} q \subset B_{R_0} \subset B_R$ を満たすようにとり，$R_0 < |y|$ を満たす y を固定する．このときどんな $\omega \in S^2$ に対しても $r \to \infty$ のとき

$$G_E(r\omega, y) = \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r}\frac{u(y, E, -\omega)}{4\pi} + O(r^{-2}) \tag{1.12}$$

が成り立つ．池畠 [7, p.40] では，物体による散乱の場合で公式 (1.12) を導いているが，ポテンシャル散乱でも同様の考え方で公式 (1.12) が得られる．このことは以下の点 (i)，(ii)，(iii) に注意すればよい．

(i) $g_k(x)$ をレゾルベント $(-\Delta - k^2 - i0)^{-1}$ の積分核，すなわち

$$g_k(x) = \frac{i}{4}\left(\frac{|k|}{2\pi|x|}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(|k|\,|x|)$$

とする．Hankel 関数の漸近展開公式

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-(2\nu+1)\pi/4)} + O(|z|^{-1}), \qquad |z| \to \infty$$

から $x = r\omega$ とおき，$r = |x| \to \infty$ で

$$\begin{aligned} g_k(x) &= D(k)\frac{e^{i|k|r}}{r^{(n-1)/2}} + O(r^{-(n+1)/2}), \\ g_k(x-y) &= D(k)\frac{e^{i|k|r}}{r^{(n-1)/2}} e^{-i|k|\omega\cdot y} + O(r^{-(n+1)/2}), \\ D(k) &= \frac{i}{2}|k|^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-i(n-1)\pi/4} \end{aligned}$$

となる．

(ii) $G_k(x,y)$ は積分方程式

$$G_k(x,y) = g_k(x-y) - \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x-z)q(z)G_k(z,y)\,dz \tag{1.13}$$

を満たす.

(iii) $g_k(x)$ の漸近展開式と $G_k(x,y)$ の積分方程式，および

$$\begin{aligned} G_k(x,y) &= G_k(y,x), \\ u(x,E,\omega) &= e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} - R(E)[qe^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}] \end{aligned}$$

から $0 < k = \sqrt{E}$ として，$r \to \infty$ で

$$\begin{aligned} G_k(r\omega,y) &= D(k)\frac{e^{ikr}}{r^{(n-1)/2}}\left(e^{-ik\omega\cdot y} - \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ik\omega\cdot z}q(z)G_k(z,y)\,dz\right) \\ &\quad + O(r^{-(n+1)/2}) \\ &= D(k)\frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}}u(y,E,-\omega) + O(r^{-(n+1)/2}) \end{aligned}$$

を得る．

$G_E(r\omega,y)$ は $R_0 < |y| < R$，$|x| > R$ でヘルムホルツ方程式を満たし，(1.12) により (RC) も満たしていることがわかる．従って，$R_0 < |y| < R$，$|x| > R$ における $G_E(x,y)$ の値が $u(y,E,-\omega)$ から計算でき，$u(y,E,-\omega)$ の $|y| > R_0$ における値が $A(E,\theta,-\omega)$ から計算できたので，$G_E(x,y)$ の $R_0 < |y| < R$, $|x| > R$ における値が $A(E,\theta,-\omega)$ から計算できることになる．その極限として，$|x| = |y| = R$ における $G_E(x,y)$ の値が求められる．

$G_E(x,y)$ から DN 写像 Λ_{q-E} は次の手順により計算できる．$G_E(x,y)$ と $g_k(x)$ を用い，与えられた境界上 $\partial\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = R\}$ の関数 f に対し積分方程式

$$\int_{\partial\Omega} G_E(x,y)h_1(y)\,d\sigma(y) = f(x),$$
$$\int_{\partial\Omega} g_k(x-y)h_2(y)\,d\sigma(y) = f(x)$$

を解き $\partial\Omega$ 上の関数 h_1，h_2 を求める．DN 写像は次の公式により計算される（Nachman [25, p.567]）．

$$\Lambda_{q-E}f = \Lambda_{-E}f + h_1 + h_2.$$

以上のことから，$A(E,\theta,\omega)$ から Λ_{q-E} を計算できることがわかった．

逆に，Λ_V から $A(E,\theta,\omega)$ を計算することもできるのである．$qu = (\Delta + E)u$ と $\Delta e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x} = -Ee^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x}$ に注意して，Green の公式から

$$\begin{aligned} A(E;\theta,\omega) &= C(E)\int_{\Omega} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x}(\Delta + E)u(x)\,dx \\ &= C(E)\int_{\partial\Omega} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x}\left\{\frac{\partial u}{\partial\nu} + (i\sqrt{E}\theta\cdot\nu)u\right\}d\sigma \end{aligned}$$

となる．従って，散乱振幅 $A(E,\theta,\omega)$ は $u\big|_{\partial\Omega} = f$ と $\frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega} = \Lambda_V f$ から計算できることがわかる．

特徴の (3) により，散乱の逆問題と境界値逆問題はある意味同値であることがわかる．従って，散乱の逆問題の特徴はそのまま境界値逆問題にもいえることである．特に，特徴の (2) により，2 次元境界値逆問題（散乱の逆問題）は多次元の場合と違った難しさがある．

定理 1.2 の証明は散乱の逆問題の特徴（3）により境界値逆問題に帰着して行う．次節で 2 次元の境界値逆問題について述べる．

§ 1.4. $\overline{\partial}$-method

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし，V は複素数値関数で $V \in L^p(\Omega)$ $(p > 2)$ とする．境界値問題

$$\text{(1.14)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + Vu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を考える．もし 0 が Ω における $-\Delta + V$ の Dirichlet 固有値でないならば，境界値問題 (1.14) は $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ に対し唯一つの解 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ を持つ（ただし，$\alpha = 1 - 2/p$ とおいた）．Dirichlet-Neumann 写像（DN 写像）とは

$$\Lambda_V : C^{1,\alpha}(\partial\Omega) \to C^{\alpha}(\partial\Omega),$$
$$f \mapsto \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}$$

であった．ここで，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり，C^{α} と $C^{m,\alpha}$（$0<\alpha<1$, $m \in \mathbf{N}$）は通常の Hölder 空間である．境界値逆問題とは，次のような問題であった．

境界値逆問題：DN 写像 Λ_V から V を決定せよ．

多次元逆問題については，一意性が Sylvester-Uhlmann [29] によって証明され，再構成の問題が Nachman [25] によって解かれた．多次元逆問題については池畠-中村 [8] や磯崎（[11]，[12]）に詳しくある．

2 次元逆問題については，非負値 $L^p(\Omega)$ $(p>1)$ 関数 $V(x)$ の一意性と再構成の問題が Isakov-Nachman [9] によって解かれた．複素数値関数の場合は，L^p ノルムが小さい V に対して一意性が成り立つことを Kang [15] 及び Kang-Uhlmann [16] が証明した．その後任意の大きさの複素数値 L^p 関数 V に対する一意性の問題を Bukhgeim [3] が解決した．

一方，導電場の方程式 $\nabla \cdot \gamma \nabla v = 0$ に対する 2 次元境界値逆問題については多くの研究結果があり，Astala-Päivärinta [1] が $\gamma \in L^{\infty}$ に対する一意性と再構成の問題を解いた．なお，導電場の方程式は γ が十分滑らかである場合 $v = \gamma^{-1/2}u$ と変換することで，$-\Delta u + V_c u = 0$, $V_c = \gamma^{-1/2}\Delta\gamma^{1/2}$ の形に書き換えることができることを注意しておく．以後 V_c のことを conductivity 型ポテンシャルと呼ぶことにする．

2 次元逆問題では，V が実数値関数で $V(x)>0$ かまたは特殊な形である conductivity 型 $V(x) = V_c(x)$ の場合には再構成の問題に対する解答があるが，複素数値関数の再構成の問題についてははっきりしていない．Bukhgeim [3] は特殊な境界データからであれば滑らかな複素数値関数 V を再構成できることを示しているが，Bukhgeim の境界データと DN 写像との関係はよくわかっていない．このような状況の中で著者は，複素数値関数 V の再構成の問題に関する一つの答えを [31] の中で与えた．それは次のようなものである．

Theorem 1.3. $p>2$ と Ω だけに依存して決まる定数 M があって，複素数値関数 $V \in W^{1,p}(\Omega)$（$W^{m,p}$ は L^p における通常のソボレフ空間）は $\|V\|_{W^{1,p}} \le M$ を満たしているとする．このとき，対応する *DN* 写像 Λ_V から V を再構成できる．

定理 1.3 から定理 1.2 が従うことをみるのはやさしい．実際，$V(x) = \sqrt{E}(ib(x) - \sqrt{E})$ とおと，E が小さくなれば $|V|$ も小さくなる．前節で述べたように $A(E,\theta,\omega)$ から Λ_V が計算でき，定理 1.3 より $V(x)$ が求まる．従って $b(x)$ は次の公式により計算される．

$$b(x) = \frac{V(x)+E}{\sqrt{E}i}.$$

2 次元境界値逆問題の再構成の問題に関して，V が実数値の場合と複素数値の場合とでは何が違うのか？以下このことについて述べようと思う．Nachman [24] は導電場の方程式 $\nabla \cdot \gamma \nabla v = 0$ に対する 2 次元境界値逆問題について，γ を求める 1 つの再構成手続きを与えた．その方法（$\overline{\partial}$-method と呼ばれている）について簡単に説明する．

N-1. 考え方の出発点は，散乱の逆問題において散乱振幅の高エネルギー極限がポテンシャルのフーリエ変換を決める：$A(E,\theta,\omega) \to \hat{q}$，$E \to \infty$ という事実を境界値逆問題に応用することである．

N-2. 境界値逆問題ではエネルギーのような動かすパラメータがない．そこで，次のような複素パラメータ $k \in \mathbf{C}$ を持つ特殊な解（**複素幾何光学解 CGO-solution**）を利用する：

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x,k) + V(x)\psi(x,k) = 0, & \text{in } \mathbf{R}^2, \\ e^{-ikz}\psi(x,k) \longrightarrow 1, & |k| \to \infty. \end{cases}$$

ここで，$x = (x_1, x_2)$，$z = x_1 + ix_2$ とした．この解 $\psi(x,k)$ から関数 $\tilde{A}(\xi,k)$ を以下のように作ると

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\xi,k) &:= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i(x\cdot\xi + zk)}\Delta\psi(x,k)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i(x\cdot\xi+zk)}V(x)\psi(x,k)\,dx \\ &\longrightarrow \int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}V(x)\,dx, \quad |k| \to \infty \end{aligned}$$

となる．すなわち，CGO-solution $\psi(x,k)$ から $\tilde{A}(\xi,k)$ を作り，$|k| \to \infty$ とすることで $\hat{V}(\xi)$ が得られることになる．では，DN 写像 Λ_V からどのようにして CGO-solution を構成するか？

N-3. $k = k_1 + ik_2$ に対し $\overline{\partial}_k = \frac{1}{2}(\partial_{k_1} + i\partial_{k_2})$ とおく．$\psi(x,k)$ を CGO-solution とする．$V(x)$ が実数値関数のとき，$\mu(x,k) := e^{-ikz}\psi(x,k)$ は以下の方程式（**$\overline{\partial}$ 方程式**）を満たす：

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_k\mu(x,k) &= T(x,k)\overline{\mu(x,k)}, \qquad x \in \mathbf{R}^2,\ k \in \mathbf{C}, \\ T(x,k) &= \frac{1}{4\pi\bar{k}}e^{-i(kz+\bar{k}\bar{z})}t(k), \\ t(k) &= \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{z}}(\Lambda_V - \Lambda_0)\psi(x,k)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで，Λ_0 は $V \equiv 0$ の場合すなわち $-\Delta$ に対する DN 写像を表す．この式から，CGO-solution の $\partial\Omega$ での値から関数 $T(x,k)$ を作り，それを係数に持つ $\overline{\partial}$ 方程式 (1.15) を解くことで，$\psi(x,k)$, $x \in \mathbf{R}^2$, $k \in \mathbf{C}$ が得られることがわかる．従ってあとは，DN 写像から $\psi(\cdot,k)\big|_{\partial\Omega}$ を求めることを考えればよいことになる．

N-4. CGO-solution $\psi(\cdot,k)$ は $\partial\Omega$ 上で次の積分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \psi(x,k) &= e^{ikz} - \int_{\partial\Omega} G_k(x-y)\big(\Lambda_V - \Lambda_0\big)\psi(y,k)\,dy, \\ G_k(x) &= \frac{e^{izk}}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2 + 2k(\xi_1 + i\xi_2)}\,d\xi. \end{aligned} \tag{1.16}$$

与えられた DN 写像 Λ_V（と Λ_0）に対し，この積分方程式を解くことで $\psi(\cdot,k)\big|_{\partial\Omega}$ が求まる．

順番が逆になったが，以上まとめると，与えられた DN 写像 Λ_V（と Λ_0）で作られる積分方程式 (1.16) を解き $\psi(\cdot,k)\big|_{\partial\Omega}$ を求める．次に $\psi(\cdot,k)\big|_{\partial\Omega}$ と DN 写像 Λ_V から作られる関数 $T(x,k)$ を係数に持つ $\overline{\partial}$ 方程式 (1.15) を解き $\mu(x,k)$ を求める．最後に $\psi(x,k)=e^{ikz}\mu(x,k)$ から $\tilde{A}(\xi,k)$ を作り，$|k|\to\infty$ とすることで V が得られる．

以上のことすべてに証明をつける必要があるが，それは非常に難しい．特に CGO-solution の一意存在をすべての $k\in\mathbf{C}$ に対して示すのは困難であり，Nachman[24] が conductivity 型 $V=V_c$ の場合に証明したのみで，一般のポテンシャル V の場合の CGO-solution の一意存在に関してはわからない．ちなみに，多次元逆問題の場合は，$|k|$ が十分大きなところだけ CGO-solution を構成するればよかったが，2 次元逆問題の場合はすべての $k\in\mathbf{C}$ に対して構成しなければならないのである．ここに，先に述べた逆問題の特徴 (2) の次元による問題の構造の違いからくる難しさがあるように思う．

仮に，一般の複素数値関数 V に対して CGO-solution が構成できたとしよう．それで問題が解決するかというとそうではない．複素数値関数の場合は $\overline{\partial}$ 方程式 (1.15) が問題になる．すでに述べたように，CGO-solution が $\overline{\partial}$ 方程式 (1.15) を満たすのは V が実数値の場合であり，複素数値関数の場合は (1.15) のような方程式が導けるかどうかさえわからない．従って複素数値関数の場合は形式的にも先に述べたような $\overline{\partial}$-method では再構成できないように思える．この困難を回避する一つの方法として，2 階の方程式を 1 階の連立方程式に書き換えることが有効であるように思う．もともとは係数の滑らかさの仮定を緩めるために有効であった方法だが（Brown-Uhlmann [2], Kang-Uhlmann [16]），係数が複素数値関数の場合にも役に立つようである．このことについて説明する．

$x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ に対し，$z=x_1+ix_2$,

$$\partial=\frac{1}{2}(\partial_{x_1}-i\partial_{x_2}),\quad \overline{\partial}=\frac{1}{2}(\partial_{x_1}+i\partial_{x_2})$$

とおき，方程式を次のように書き換える．

$$(-\Delta+V(x))u=0 \Longrightarrow (\overline{\partial}\partial-q(z))u=0,\quad q(z)=\frac{1}{4}V(z). \tag{1.17}$$

これをさらに 1 階の連立方程式（$\overline{\partial}$ system）に書き換える．

$$(D_2-Q_2)\Phi=O \quad \text{in } \Omega,\quad D_2=\begin{pmatrix}\overline{\partial} & 0\\ 0 & \partial\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}0 & q\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

u が (1.17) の解ならば $\Phi={}^t\begin{pmatrix}\partial u & u\end{pmatrix}$ は $\overline{\partial}$ system (1.18) をみたすことは容易にわかる．$\overline{\partial}$ system (1.18) に対して CGO-solution を次のようにして作る．$\Phi=\Phi(z,k)=$

$M_2(z,k)E_2(z,k)$ $(k \in \mathbf{C})$ とおく．ここで M_2 は 2×2 行列であり，

$$E_2(z,k) = \begin{pmatrix} e^{ikz} & 0 \\ 0 & e^{-ik\bar{z}} \end{pmatrix}$$

である．Φ を方程式 (1.18) に代入すると，M_2 は次の方程式を満たす.

$$D_2 \mathcal{P}_k M_2 - \mathcal{P}_k Q_2 M_2 = O.$$

ここで，$e_k = e_k(z) = e^{i(kz+\bar{k}\bar{z})}$

$$\mathcal{P}_k X = \begin{pmatrix} x_{11} & e_{-\bar{k}} x_{12} \\ e_k x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$$

とおいた．M_2 を構成するにあたり，いくつか記号を導入する．複素数 z に対し，z_R, z_I をそれぞれ z の実部，虚部とする．

$$D_k^{-1} = \mathcal{P}_k^{-1} D_2^{-1} \mathcal{P}_k, \qquad D_2^{-1} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \overline{T} \end{pmatrix},$$

$$Tf \equiv T_\Omega f = -\frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta_R d\zeta_I, \quad \overline{T} f = \overline{T(\bar{f})}$$

とおく．$q(z)$ を（Q を）十分小さくして，ノイマン級数で M を構成する．$M_2(z,k) = (I - D_k^{-1} Q_2)^{-1} I$ （I は単位行列）とすれば，$D_2 \mathcal{P}_k M_2 - \mathcal{P}_k Q_2 M_2 = O$ を満たす．$M_2 = M_2(z,k)$ は（q が複素数値関数の場合でも）次の性質を持つ.

- $M(z,k) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |k| \to \infty.$
- M_2 は次の方程式を満たす：

$$\overline{\partial}_k M_2(z,k) = M_2(z,\bar{k}) \Gamma(z,k) S(k).$$

ここで

$$\begin{aligned} \Gamma(z,k) &= \begin{pmatrix} e_{\bar{k}}(z) & 0 \\ 0 & e_{-k}(z) \end{pmatrix}, \\ S(k) &= -\frac{1}{\pi} J \int_\Omega \mathcal{P}_k Q_2(z) M_2(z,k) \, dz_R dz_I, \\ J X_2 &:= \begin{pmatrix} 0 & i x_{12} \\ -i x_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \end{aligned}$$

である.

この 2 番目の性質から，$\overline{\partial}$ system (1.18) に対する CGO-solution は（係数が複素数値関数の場合でも）複素パラメータ k に関する $\overline{\partial}$ 型の微分方程式を満たすことがわかる．さらに，M_2 が満たす方程式とグリーンの公式から係数の $S(k)$ は Q_2 を用いないで M_2 の $\partial\Omega$ 上の積分で書けることもわかる．従って，後は DN 写像 Λ_V から $M_2(\cdot,k)\big|_{\partial\Omega}$ が求まればよいのだが…．このことに関し，一意性についてはわかっているが（Kang-Uhlmann [16]），具体的な構成法についてははっきりしていないように思う．なぜか？DN 写像 Λ_V を ∂ と $\overline{\partial}$ で書き直してみよう．

u を $u\big|_{\partial\Omega} = f$ を満たす (1.17) の解とする．$\partial\Omega$ の単位法線ベクトル $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ に対し，$\eta = \nu_1 + i\nu_2$ とおく．

$$\Lambda_V f = \nu \cdot (\nabla u)\big|_{\partial\Omega} = \eta(\partial u)\big|_{\partial\Omega} + \bar{\eta}(\bar{\partial} u)\big|_{\partial\Omega}$$

である．つまり，DN 写像は ∂u と $\overline{\partial} u$ の和で書かれているのである．しかし，u が (1.17) の解であるとき，$\overline{\partial}$ system (1.18) の解の境界値は $\Phi\big|_{\partial\Omega} = {}^t\left((\partial u)\big|_{\partial\Omega}\, u\big|_{\partial\Omega}\right)$ であり，$\overline{\partial} u$ は現れない．いったいどのようにして DN 写像から $\Phi\big|_{\partial\Omega}$ を構成したらよいのだろうか？ちなみに，導電場の方程式 $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$ の場合は

$$2\partial u\, \overline{\partial}\gamma + 2\overline{\partial} u\, \partial\gamma + 4\gamma\partial\overline{\partial} u = 0$$

となるから，対応する $\overline{\partial}$ system は形式的には

$$\begin{pmatrix} \overline{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{1/2}\partial u \\ \gamma^{1/2}\overline{\partial} u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1/2}\partial\gamma^{1/2} \\ \gamma^{-1/2}\overline{\partial}\gamma^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{1/2}\partial u \\ \gamma^{1/2}\overline{\partial} u \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる．この式を見てわかるように，∂u と $\overline{\partial} u$ の両方が出現しており，従って導電場の方程式の場合は Λ_γ と対応する $\overline{\partial}$ system の CGO-solution の $\partial\Omega$ へのトレースとの関係がはっきりするのである（Knudsen-Tamasan [18]，Knudsen [17, pp.45-48]）．

§ 2. 証明

定理 1.3 の証明のアイデアと概略を述べる．詳しくは [31] にある．

§ 2.1. アイデア

序章の 1.4 節の最後で述べたように，$-\Delta u + Vu = 0$ の場合は 2×2 の連立 1 階微分方程式を用いたのでは DN 写像から V を再構成するのは難しそうである．$\overline{\partial} u$ がなければ付け加えればよい．ということで，次の 3×3 の $\overline{\partial}$ system を考えた．

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overline{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \right\} \Phi = O. \tag{2.1}$$

u が (1.17) を満たすならば $\Phi = {}^t\left(\partial u\, u\, \overline{\partial} u\right)$ は $\overline{\partial}$ system (2.1) をみたす．これで ∂u と $\overline{\partial} u$ が出揃うわけだが⋯．

まず，3×3 の $\overline{\partial}$ system (2.1) に対して CGO-solution を Kang-Uhlmann [16] で与えられた方法に沿って q を十分小さくしてノイマン級数で構成する．

$$D = \begin{pmatrix} \overline{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

とおき，

$$(D-Q)\Phi = O, \qquad \text{in } \Omega$$

を考える．

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(z,k) &= M(z,k)E(z,k), \qquad k \in \mathbf{C}, \\ E(z,k) &= \begin{pmatrix} e^{ikz} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik\bar{z}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という形の解を考える．M は次の方程式を満たす：

$$D\mathcal{P}_k M - \mathcal{P}_k Q M = O. \tag{2.2}$$

ここで，$e_k = e_k(z) = e^{i(kz+\bar{k}\bar{z})}$,

$$\mathcal{P}_k X = \begin{pmatrix} x_{11} & e_{-\bar{k}}x_{12} & e_{-\bar{k}}x_{13} \\ e_k x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ e_k x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = (x_{ij})_{1\le i,j\le 3}$$

である．2×2 の $\overline{\partial}$ system (1.18) の場合と同様に $M(z,k) = (I - D_k^{-1}Q)^{-1}I$ とする．この M は 2×2 の場合と同じ性質を持つことが期待される．すなわち，$|k|\to\infty$ としたとき単位行列に近づき，M を $\bar{k}$ で微分すると同次 $\overline{\partial}$ 型微分方程式を満たす⋯などである．しかし，予想に反し面白いことに，3×3 に対する M は $|k|\to\infty$ としたとき単位行列には近づかず，M の第 3 行の，とくに $(3,2)$ 成分の性質は他の成分の性質とは異なることがわかった．すなわち M は以下の性質を持つ．

- $M(z,k) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{T}q & 1 \end{pmatrix}, \quad |k|\to\infty.$

$\partial\overline{T}f = f$ であるから M の $(3,2)$ 成分 m_{32} から $q(z)$ が求まることがわかる：

$$q(z) = \partial \lim_{|k|\to\infty} m_{32}(z,k), \qquad z\in\Omega.$$

- 上の性質から m_{32} だけわかればよい．M の 3 行目は非同次 $\overline{\partial}$ 型微分方程式を満たす．

$$\begin{cases} \overline{\partial}_k m_{31}(z,k) = -ie_{-k}(z)s_{31}(k) + ie_{-k}(z)s_{21}(k)m_{32}(z,\bar{k}), \\ \overline{\partial}_k m_{32}(z,k) = is_{12}(k)e_{\bar{k}}(z)m_{31}(z,\bar{k}), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s_{12}(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e_{-\bar{k}}(\zeta)m_{12}(\zeta,k)\,d\zeta, \\ s_{21}(k) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e_k(\zeta)m_{21}(\zeta,k)\,d\bar{\zeta}, \\ s_{31}(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e_k(\zeta)m_{11}(\zeta,k)\,d\zeta \\ &\qquad + \frac{\bar{k}}{2\pi}\int_{\partial\Omega} e_k(\zeta)m_{21}(\zeta,k)\,d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

このことから，各係数 s_{12}，s_{21}，s_{31} が与えられれば，この連立微分方程式を解くことで m_{32} が求まる．従って，後は $M\big|_{\partial\Omega}$ を DN 写像から構成できればよい．

$M\big|_{\partial\Omega}$ の構成について説明する．以下の方法は Knudsen and Tamasan [18]（または Knudsen [17, pp.45-48]）によるものを拡張，修正したものである．まずいくつか記号を導入する．

- ∂_τ を $\partial\Omega$ の接方向微分とする．
- $\partial\Omega$ の弧長パラメータ表示を $z(s)$ と書き，$\partial_\tau^{-1}f(z(s)) = \int_0^s f(z(t))\,dt$ とおく．
- $\mathcal{C}(\psi) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, $\quad \overline{\mathcal{C}}(\psi) = \overline{\mathcal{C}(\bar{\psi})}$, $\quad C = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{C}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$ とおく．

2 次元であるから，$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ に対し $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \partial_\nu f &= \nu\cdot\nabla f = \eta\partial f + \bar{\eta}\bar{\partial} f, \\ \partial_\tau f &= \tau\cdot\nabla f = i\eta\partial f - i\bar{\eta}\bar{\partial} f \end{aligned}$$

となる．形式的な計算で，二番目の式をの両辺に ∂_τ^{-1} を作用させ一番目の式に代入すると

$$i\partial_\nu\partial_\tau^{-1}(\eta\partial f - \bar{\eta}\bar{\partial} f) = \eta\partial f + \bar{\eta}\bar{\partial} f$$

を得る．この式で，$\partial_\nu \leftrightarrow \Lambda_V$，$\partial f \leftrightarrow h_1$，$f \leftrightarrow h_2$，$\bar{\partial} f \leftrightarrow h_3$ という置き換えをして境界 $\partial\Omega$ 上の関数の集合を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{BR} = \{\boldsymbol{h} : (\eta h_1 - \bar{\eta}h_3) &\in C_0^{1,\alpha}(\partial\Omega), \\ &i\Lambda_V\partial_\tau^{-1}(\eta h_1 - \bar{\eta}h_3) = \eta h_1 + \bar{\eta}h_3, \\ &\qquad \partial_\tau h_2 = i(\eta h_1 - \bar{\eta}h_3)\}. \end{aligned}$$

また，3×3 の $\overline{\partial}$ system (2.1) のコーシーデータの集合を

$$\mathcal{C}_q = \{\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} \,:\, (D-Q)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ in } \Omega\}$$

とおく．実は $\mathcal{C}_q = \mathcal{BR}$ であることがわかる．コーシーデータの特徴づけができたわけである．

$\Phi(z,k) = M(z,k)E(z,k)$ を CGO-solution とする．このとき M は $D\mathcal{P}_k M - \mathcal{P}_k QM = O$ を満たす．Generalized Cauchy's integral formula より

$$M - \mathcal{P}_k^{-1}D^{-1}\mathcal{P}_k QM = \mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}_k M\big|_{\partial\Omega})$$

となる．従って

$$\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}_k M\big|_{\partial\Omega}) = (I - D_k^{-1}Q)M = I$$

という関係式を得る．

以上のことをまとめると，DN 写像から $\Phi\big|_{\partial\Omega}$ は次の式を解くことで求まる．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{-k}C(\mathcal{P}_k \Phi E^{-1}\Big|_{\partial\Omega}) = I,\\
&\begin{pmatrix} (i\Lambda_V\partial_\tau^{-1} - 1)\eta & 0 & -(i\Lambda_V\partial_\tau^{-1} + 1)\bar{\eta} \\ -i\eta & \partial_\tau & i\bar{\eta} \end{pmatrix}\Phi = O.
\end{aligned}$$

$\Phi = ME$ であったから $M\big|_{\partial\Omega} = (\Phi E^{-1})\big|_{\partial\Omega}$ とおけばよい．

Remark. DN 写像と CGO-solution の境界値を関係づける際，今まで知られている方法は，コーシー積分作用素 $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

を $\partial\Omega$ にトレースした時の境界での飛び公式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{S}f(z \pm \nu\varepsilon) = \mp\frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2\pi i}p.v.\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in \partial\Omega$$

を利用するものであった（例えば Knudsen [17, pp.44-48] を参照）．境界の内側と外側から近づける必要があるため，議論を $\mathbf{R}^2$ まで広げる必要があった．つまり，CGO-solution を $\mathbf{R}^2$ で構成し，境界での飛び公式を用いて $M\big|_{\partial\Omega}$ に関する積分方程式を導いていたのである．今回与えた方法では，境界での飛び公式を使う代わりに，Generalized Cauchy's integral formula を使うだけで CGO-solution の境界での関係式が導けることがわかり，その結果議論を $\mathbf{R}^2$ まで拡張する必要なく Ω の中の議論だけで証明が済むのである．

§ 2.2. 定理 1.3 の証明概略

§2.1 で述べたことを整理する．V は次の 3 段階の手順により DN 写像 Λ_V から再構成される．

Step 1. Λ_V は既知とし，$k \in \mathbf{C}$ とする．$\partial\Omega$ 上の方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{e^{-ik\zeta}\Phi_{11}(\zeta,k)}{\zeta-z}\,d\zeta = 1, \quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{e^{i\bar{k}\bar{\zeta}}\Phi_{31}(\zeta,k)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta} = 0, \\ \partial_\tau\Phi_{21}(z,k) = i(\eta\Phi_{11}(z,k) - \bar{\eta}\Phi_{31}(z,k)), \\ i\Lambda_V\partial_\tau^{-1}(\eta\Phi_{11} - \bar{\eta}\Phi_{31}) = (\eta\Phi_{11} + \bar{\eta}\Phi_{31}) \end{cases}$$

から $\partial\Omega$ 上の関数 $\Phi_{11}(\cdot,k)$, $\Phi_{21}(\cdot,k)$, $\Phi_{31}(\cdot,k)$ を求める．

同様に $\partial\Omega$ 上の関数 $\Phi_{12}(\cdot,k)$ と $\Phi_{32}(\cdot,k)$ を次の方程式を解いて求める．

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{e^{-i\bar{k}\zeta}\Phi_{12}(\zeta,k)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0, \quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{e^{ik\bar{\zeta}}\Phi_{32}(\zeta,k)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta} = 0, \\ i\Lambda_V\partial_\tau^{-1}(\eta\Phi_{12} - \bar{\eta}\Phi_{32}) = (\eta\Phi_{12} + \bar{\eta}\Phi_{32}). \end{cases}$$

Step 2. 上で求めた $\partial\Omega$ 上の関数 $\Phi_{12}(\cdot,k)$ と $\Phi_{21}(\cdot,k)$ を使って $\mathbf{C}$ 上の関数 $s_{12}(k)$ と $s_{21}(k)$ を以下のようにして作る．

$$s_{12}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e^{-i\bar{k}z}\Phi_{12}(z,k)\,dz,$$
$$s_{21}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{z}}\Phi_{21}(z,k)\,d\bar{z}.$$

同様に $s_{31}(k)$ を次のように作る．

$$s_{31}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{z}}\Phi_{11}(z,k)\,dz - i\bar{k}s_{21}(k).$$

これらを係数にもつ $k \in \mathbf{C}$ に関する微分方程式

$$\begin{cases} \overline{\partial}_k m_{31}(z,k) = -ie^{-i(kz+\bar{k}\bar{z})}s_{31}(k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + ie^{-i(kz+\bar{k}\bar{z})}s_{21}(k)m_{32}(z,\bar{k}), \\ \overline{\partial}_k m_{32}(z,k) = ie^{i(\bar{k}z+k\bar{z})}s_{12}(k)m_{31}(z,\bar{k}) \end{cases}$$

を解き $\Omega \times \mathbf{C}$ 上の関数 $m_{31}(z,k)$ と $m_{32}(z,k)$ を求める．

Step 3. $V(x)$ は次の公式により求まる．

$$V(x) = 4\partial_z \lim_{|k|\to\infty} m_{32}(z,k), \qquad z \in \Omega.$$

References

[1] K. Astala, L. Päivärinta, Calderón's inverse conductivity problem in the plane, Ann. of Math. 163 (2006) 265-299.

[2] R. Brown, G. Uhlmann, Uniqueness in the conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions, Comm. in PDE 22 (1997) 1009-1027.

[3] A. L. Bukhgeim, Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case, J. Inv. Ill-Posed Problems 16 (2008) 19-33.

[4] J. Cheng, M. Yamamoto, Determination of two convection coefficients from Dirichlet-to-Neumann map in two-dimensional case, SIAM J. Math. Anal. 35 (2003) 1371-1393.

[5] D. Colton, R. Kress, Integral equation methods in scattering theory, John-Wiley and Sons, New York, 1983.

[6] E. Francini, Recovering a complex coefficient in a planar domain from the Dirichlet-to-Neumann map, Inverse Problems 16 (2000) 107-119.

[7] 池畠 優, 不連続面の観測データによる再構成の数理 –境界値逆問題, 逆ソース問題および逆散乱問題における再構成公式–, 都立大学数学教室セミナー報告, 2000.

[8] 池畠優，中村玄，境界値逆問題 ··· Calderon からの 15 年，数学 48 巻 3 号，岩波書店，1996.

[9] V. Isakov, A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional semilinear elliptic inverse problem, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 3375-3390.

[10] V. Isakov, Z. Sun, The inverse scattering at fixed energies in two dimensions, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995) 883-896.

[11] 磯崎洋，量子力学的散乱理論における逆問題，数学 50 巻 2 号，岩波書店，1998.

[12] 磯崎洋，散乱理論と逆問題，数学 59 巻 2 号，岩波書店，2007.

[13] H. Isozaki, H. Nakazawa, G. Uhlmann, Inverse scattering problem in nuclear physics–Optical model, J. Math. Phys. 45 (2004) 2613-2632.

[14] M. Kadowaki, H. Nakazawa, K. Watanabe, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, preprint.

[15] H. Kang, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002) 291-302.

[16] H. Kang, G. Uhlmann, Inverse problems for the Pauli Hamiltonian in two dimensions, J. Fourier Anal. Appl. 10 (2004) 201-215.

[17] K. Knudsen, On the inverse conductivity problem. Ph.D. thesis, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University 2002.

[18] K. Knudsen, A. Tamasan, Reconstruction of less regular conductivities in plane, Comm. in PDE 29 (2004) 361-381.

[19] K. Mochizuki, Inverse scattering for a small nonselfadjoint perturbation of the wave equation, Analysis and Applications, Edited by H. G. W. Berger, R. P. Gilbert and M. W. Wong, Kluwer Academic Publishers, 2003, 303-316.

[20] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative term, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 (1976) 383-390.

[21] K. Mochizuki, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator with a complex potential and the scattering inverse problem, Proc. Japan. Acad. 43 (1967) 638-643.

[22] K. Mochizuki, Inverse scattering for perturbed wave equations with fixed energy, submitted.

[23] A. Nachman, Inverse scattering at fixed energy, Proc. 10th International Congress on Math Phys. Leipzig 1991, edited by K. Schmüdgen, Springer Verlag, 1992, 434-441.

[24] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, Ann. of Math. 143 (1996) 71-96.

[25] A. Nachman, Reconstructions from boundary measurements, Ann. of Math. 128 (1988) 531-576.

[26] H. Nakazawa, The principle of limiting absorption for the non-selfadjoint Schrödinger operator with energy dependent potential, Tokyo J. Math. 23 (2000) 519-536.

[27] H. Nakazawa, On wave equations with dissipations, Proceedings of the 4th International Conference, "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations" (AMADE-2006.): in three volumes. - Vol. 3. Differential Equations. - Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus, 2006, 102-110.

[28] R. G. Novikov, The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator, J. Funct. Anal. 103 (1992) 409-463.

[29] J. Sylvester, G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Ann. of Math. 125 (1987) 153-169.

[30] M. Watanabe, An inverse scattering problem for the wave equation with the friction term in two dimensions, Nonlinear Dispersive Equations, 213-226, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26 Gakkōtosho, Tokyo, 2006.

[31] M. Watanabe, Inverse scattering problem for stationary wave equation with a friction term in two dimensions, submitted.

[32] I. N. Vekua, Generalized analytic functions, Pergamon Press, London, 1962.