

# 摩擦項を持つ波動方程式のエネルギー減少について

## Notes on the Energy decay for damped wave equations

By

西山 尚志 (HISASHI NISHIYAMA)\*

### Abstract

We introduce the result of [5] in which we improve the work of Burq and Hitrik [4]. We prove the polynomial energy decay for the damped wave equation on the partially rectangular domains assuming the damping exists near the boundary of the non-rectangular part.

### § 1. 導入

本稿では、次の摩擦項付きの波動方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

を考察する。ここで  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  は、有界領域で  $C^{1,1}$  の境界を持つものとする。ただし  $C^{h,\theta}$  とは、境界が  $C^h$  級の滑らかさを持ち、さらに  $h$  階の微分が  $\theta$  次の Hölder 連続になるようなものとする。摩擦項  $a(x)$  は非負の関数で、境界までこめて連続なものとする。  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$  は通常のラプラシアンで、  $\partial_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$  である。初期値  $u_0, u_1$  はそれぞれ、  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega)$  とする。

これは弦や膜の振動において、空気との摩擦といった効果も考慮した方程式で、  $u(t, x)$  は弦や膜の変位等の量を表す。摩擦がある場合、時間がとともにどのように波が弱められ

---

Received March 31, 2009. Revised August 5, 2009.

2000 Mathematics Subject Classification(s): 35L05, 47A10, 47B44, 47D06, 49J20

*Key Words:* Energy decay, Damped wave, Bunimovich stadium, partially rectangular domain.

\*Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Osaka 560-0043, Japan.  
e-mail: h-nishiyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

のかについて、特に次のエネルギーと呼ばれる量がどのように時間とともに減少していくのかを調べるのが目的となる:

$$(1.2) \quad E(u, t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 dx.$$

まず、方程式 (1.1) を次の発展方程式に書き換える:

$$(1.3) \quad \partial_t \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

ここで、 $A$  は次の作用素

$$(1.4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & -2a \end{pmatrix} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \mathcal{D}(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1$$

である. また  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  のノルムとして

$$\left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2.$$

を用いる.

例えば Hille・吉田の定理を用いると、(1.1) は  $u(t, x) \in C^0(\mathbf{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbf{R}; L^2(\Omega))$  の一意解を持つことが分かる. よって  $\mathcal{H}$  に初期値を持つ解に対してはエネルギーが定義され、次の式が成り立つ:

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \left\| e^{tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

このことから、解のエネルギーと作用素  $A$  が密接に関係する. 例えば、 $a(x) \geq 0$  であるので

$$\operatorname{Re}(Av, v) \leq 0, \quad \text{for all } v \in \mathcal{D}(A)$$

が成り立ち、 $A$  は消散作用素であるので

$$E(u, t_1) \leq E(u, t_2), \quad t_1 \geq t_2$$

となることが分かる. 実はより強い結果として、[6] によると摩擦が少しでもある場合、つまり  $a(x) \not\equiv 0$  であれば任意の (1.1) の解に対して

$$E(u, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

が成り立つ. これは、 $A$  の一般化された固有空間が完備であることと、実部が 0 であるような固有値を持たないことから分かる.

この結果は興味深いのが、実際に波が減少することを観測する場合、個々の波の減少の結果では、いつエネルギーが半分になるかといった問題に答えることができない. そのた

め、エネルギーの減少について考える場合は、ある種の一様性を出すのが望ましい。この点について重要な結果を紹介する。

まず説明するためにビリヤード軌道について思い出しておく。これは幾何光学の軌道で領域の内部では直進し、境界では反射の法則にしたがって反射されるというものである。例えば、位置と方向  $(x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1}$  が与えられたとき、十分小さい  $t$  に対して、ビリヤード軌道は次の式で与えられる：

$$\phi_t(x, \xi) = x + t\xi.$$

境界での反射については、一般には複雑なのでここではこれ以上述べない。波の伝播は、近似的にはこのビリヤード軌道に従って進むことが知られている。ここで、Geometric Control Condition (GCC) と呼ばれる条件を導入する。

(GCC): ある定数  $T_0 > 0$  が存在して、全てのビリヤード軌道は  $t = T_0$  までに必ず  $\{x; a(x) > 0\}$  を通る。

これは、どのような波も近似的には必ず  $T_0$  までの間に摩擦に触れるという仮定である。そのため、この (GCC) のもとではエネルギーは早く減少することが予測される。実際 [1] は、境界が滑らかである場合、(GCC) とビリヤード軌道が境界と無限次の接触をしないという仮定の下で、ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して、任意の (1.1) の解  $u$  について次のエネルギー減少がなりたつことを示した：

$$E(u, t) \leq C_1 e^{-C_2 t} E(u, 0), \quad t \geq 0.$$

実は、(GCC) はこのような一様減少の必要条件でもある。これは、例えば漸近解を作ることによって示すことができる。よって、(GCC) は摩擦項の大きさを測る重要な尺度である。しかし、一般にはこの (GCC) は必ずしも成り立たないので、成り立たない場合にどのようなことが起こるかが問題である。

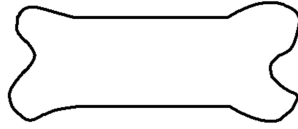
この点について一般的なことが [2], [6] で示されている。摩擦が少しでもある場合、任意の  $k \geq 1$  についてある定数  $C_k > 0$  が存在し、任意の初期値  $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A^k)$  に対して

$$E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \left( \frac{1}{\log t} \right)^k \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A^k)}, \quad t \geq 2$$

が成り立つ。

これは、初期値に十分な滑らかさを仮定すれば、エネルギーはビリヤード軌道では到達できない領域にある摩擦の影響を受けることを示しており、波のビリヤード軌道から離れて広がって伝わっていく性質を捕らえていると考えられる。そのためこのような結果を、より詳細に調べることは興味深い問題である。

そこで領域や摩擦項について制限し、減少の評価を良くした [4] と [8] の結果を紹介する。まず考える領域を次の図のような真ん中に長方形が含まれている平面領域とする。また、以後ではこの平面領域のみ考えるので  $x_1 = x, x_2 = y$  とおくことにする。



部分的に長方形な領域

この図形のことを部分的に長方形な領域と呼ぶ. 正確には  $\Omega$  は  $\Omega = R \cup W$  と2つの部分からなる領域であって,  $R$  は長方形  $R = \{(x, y); x \in [-\alpha, \alpha], y \in (-\beta, \beta)\}$  であり, 両翼の部分  $W$  は境界が  $\partial W = \{(x, y); x = \{-\alpha, \alpha\}, y \in [-\beta, \beta]\} \cup \Gamma, \Gamma \cap R = \emptyset$  と書けるようなものを部分的に長方形な領域と呼ぶことにする. なお, 引き続き  $\Omega$  は有界領域で  $C^{1,1}$  の境界を持つということも仮定する.

部分的に長方形な領域の例として, Bunimovich のスタジアムと呼ばれる, 半円と長方形からなる領域がある.



スタジアム

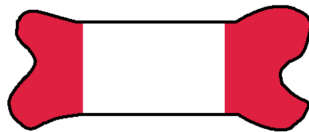
なお, スタジアムは量子カオスと関連して興味をもたれている領域で, 詳しく調べることは重要である.

部分的に長方形な領域上で [4] は, 摩擦が両翼の部分で存在する, つまり  $\overline{W}$  上で  $a(x, y) > 0$  を仮定して, 次のエネルギー減少を示している.

任意の  $k \geq 1$  についてある定数  $C_k > 0$  が存在し, 任意の初期値  $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A^k)$  に対して

$$(1.5) \quad E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \left( \frac{\log t}{t} \right)^{\frac{k}{2}} (\log t) \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A^k)}, \quad t \geq 2$$

が成り立つ. この場合の摩擦項に対する仮定は次の図のようになっている.



■ 摩擦が存在する部分

この結果では, 例えば長方形の真ん中では摩擦がなくても良いので, 長方形の部分を上下に往復するような軌道が存在し一般には (GCC) が成り立たない.

一方 [8] も似た結果を得ている. これは3次元で述べられているが, 2次元とすると次のものになる. 両翼の境界の近くでは摩擦が消えていない, つまり  $\partial W \cap \partial \Omega$  上で  $a(x, y) > 0$  とする. このとき, ある定数  $C > 0$  と  $\delta > 0$  が存在し次のエネルギー減少が成り立つ:

$$E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \frac{1}{t} \right)^{\delta} \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A)}, \quad t \geq 2.$$

この場合の摩擦項に対する仮定は次の図のようになっている.



この結果は, 摩擦項に対する仮定は [4] より良くなっているが, 減少のオーダーなどは正確なオーダーを出していないなど [4] より悪くなっている. また注意したいのは, 2つの結果の証明が異なることである.

[4] は定常的なアプローチで, レゾルベントを長方形上でのラプラシアン固有関数展開をもちいて 1次元の場合に帰着して評価している. ただし, この方法は, 翼部分に摩擦のないところがある [8] の場合はそのままでは使えない. 一方 [8] は, 定常的なアプローチではない. これは興味深い, [4] の証明と比べても結果のわりには証明が大変なように感じる.

これらの2つの結果を考慮して [5] では, 次の結果を得た.

**Theorem 1.1.**  $\Omega = R \cup W$  は部分的に長方形であるような領域で,  $\partial W \cap \partial\Omega$  上で  $a(x, y) > 0$  とする. このとき任意の  $k \geq 1$  についてある定数  $C_k > 0$  が存在し, 任意の初期値  $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A^k)$  に対して次のエネルギー減少が成り立つ:

$$(1.6) \quad E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \left( \frac{\log t}{t} \right)^{\frac{k}{2}} (\log t) \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A^k)}, \quad t \geq 2.$$

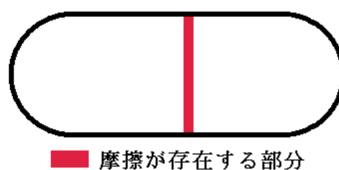
これは, [4], [8] の結果を合わせた結果である. 実際はもう少し定理は精密化できる. 例を挙げると,

**Example 1.2.** 次の図のようにスタジアム上で片側の翼部分の境界で摩擦が消えないとしても同様のエネルギー減少が成り立つ.



また次のような場合についてもエネルギー減少を示すことができる.

**Example 1.3.** スタジアム上である帯状の領域で摩擦が消えないとしても同様のエネルギー減少が成り立つ.



これは, [7] の長方形に対する多項式減少の結果の一般化である.

後で触れるが Theorem 1.1 の証明は初等的で, [4], [8] の方法よりも簡単である. また例であげたような結果は, [4] の方法を改良して得るのは難しいと思う.

上の結果では, 長方形の部分に少し摩擦がある必要があるが, さらに摩擦が少ない場合として, 長方形の境界上まで有限次で退化している場合も考えた. まず, 長方形の部分からの距離関数を  $w = \max\{|x| - \alpha, 0\}$  とする.

**Theorem 1.4.**  $\Omega = R \cup W$  を部分的に長方形な領域であって  $C^{h,\theta}$  の境界を持つものとする. また  $T = h + \theta - 1 \geq 1$  であって. ある定数  $m > 0, C > 0$  が存在して  $a(x, y) > Cw^m\chi$  が成り立つとする. ただし  $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  は非負で  $\partial\Omega$  の近傍で  $\chi = 1$  を満たすようなものとする. このとき任意の  $k \geq 1$  に対してある定数  $C_k > 0$  が存在して次のエネルギー減少が成り立つ:

$$(1.7) \quad E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \left( \frac{\log t}{t} \right)^{\frac{k}{2M}} (\log t) \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A^k)}, \quad t \geq 2.$$

ただし  $u$  は (1.1) の解で初期値は  $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A^k)$ , また  $M = \max\{\frac{m+1}{T}, \frac{m+3-T}{T}, 1\}$  とする.

この結果によると, 摩擦の退化のオーダーが大きくなるとエネルギーの減少が遅くなり, 妥当な結果である. また, 退化のオーダーに対して, 境界が十分滑らかであるとすると結局, Theorem 1.1 と同じオーダーで減少することがわかる.

## § 2. 証明の概略

以後は, Theorem 1.1 の証明の概略について説明する. Theorem 1.4 の証明も同様の方法で行うことができるが, こちらの方が複雑なので省略する.

方法は, [4], [6] で用いられたような定常的なアプローチを取る. これはエネルギーの減少をレゾルベントの評価に帰着させる方法で, 次のような評価を示せばよい:

$$(i\lambda - A)^{-1} = \mathcal{O}(|\lambda|^2): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

ここで, 先に述べたように  $A$  は実部が 0 であるような固有値を持たないのでレゾルベントは存在する. この評価から, 定理 1.1 を導くことができる (cf. [4], [7]). これは, 半群に対する一般論なので詳細は省略する. まず, 次の式

$$(i\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} R(\lambda)(2a + i\lambda) & R(\lambda) \\ R(\lambda)\Delta & i\lambda R(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

に注意する. ただし,

$$R(\lambda) = (-\Delta + 2i\lambda a - \lambda^2)^{-1}, \quad L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

である.  $R(\lambda)$  の評価をすれば, この式からレゾルベント  $(i\lambda - A)^{-1}$  の評価は得ることができる. 実際次が成り立つ.

**Proposition 2.1.**

$$R(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|^l) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad |\lambda| > 1, \lambda \in \mathbf{R}, l \geq 0$$

とすると,

$$(i\lambda - A)^{-1} = \mathcal{O}(|\lambda|^{l+1}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad |\lambda| > 1, \lambda \in \mathbf{R}, l \geq 0$$

が成り立つ.

よって,  $R(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|)$  を示せばよい. これを評価するために次の式

$$(-\Delta + 2i\lambda a - \lambda^2)u = f$$

を考える. ただし  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  である. 簡単のために  $g = -2i\lambda a u + f$  とおくと

$$(-\Delta - \lambda^2)u = g, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

となる. この式を  $\partial W \cap \partial\Omega$  上で  $a(x, y) > 0$  を仮定して評価する. 次の補題が重要である.

**Lemma 2.2.**  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  が  $(-\Delta - \lambda^2)u = g$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  を満たしているとする. このとき任意の境界まで込めて滑らかな実のベクトル場  $B$  に対して次の式が成り立つ:

$$(2.1) \quad (u, [(-\Delta - \lambda^2), B]u)_{L^2} = 2\operatorname{Re}(Bu, g)_{L^2} + ((\operatorname{div} B)u, g)_{L^2} + \int_{\partial\Omega} (\partial_N u) \overline{Bu} \, dS.$$

ここで交換子は形式的に計算した 2 階の作用素とする. また  $\partial_N$  は外法線微分とする.

これは, 単純に計算すれば得ることができる. この補題で  $B = x\partial_x$  と取り計算すると, 次の補題が得られる.

**Lemma 2.3.**  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  が  $(-\Delta - \lambda^2)u = g$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  を満たしているとする. このとき, 次の式が成り立つ:

$$(2.2) \quad \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq C \int_{\partial\Omega} x\omega_N |\partial_N u|^2 \, dS + C \|g\|_{L^2}^2.$$

ここで  $\omega_N$  は外法線ベクトルの  $x$  成分である.

なおこの補題は, [3] においてスタジアムの固有関数を評価するのに用いられていることを注意しておく. 同じように  $B = \psi\partial_x$ , と取って計算する. すると次の補題が得られる.

**Lemma 2.4.**  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  であって  $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  は実数値関数とする. また,  $u$  が  $(-\Delta - \lambda^2)u = g$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  を満たしているとする. このとき任意の  $\epsilon > 0$  に対して

ある定数  $C > 0$ , が存在して次の不等式が成り立つ:

$$(2.3) \quad \int_{\partial\Omega} \psi \omega_N |\partial_N u|^2 dS \leq \epsilon \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + C(\|g\|_{L^2}^2 + \|(\nabla\psi)g\|_{L^2}^2) \\ + (\lambda^2 + 1) \|(\nabla\psi)u\|_{L^2}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \|(\partial_{x_i, x_j}^2 \psi)u\|_{L^2}^2.$$

ただし  $\omega_N$  は外法線ベクトルの  $x$  成分である.

Lemma 2.4 において  $\psi(x, y) = x\phi(x, y)$ , ここで  $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  は実数値関数で, 適当な  $C > 0$  に対して  $\text{supp}(\phi) \subset \{(x, y) \in \Omega; a(x, y) > C\}$ , また  $\phi|_{\partial W \cap \partial\Omega} = 1$  が成り立つようにとる. このような  $\psi$  は  $\partial W \cap \partial\Omega$  上で  $a(x, y) > 0$  なので取ることができる.

長方形部分の境界では  $\omega_N = 0$ , また両翼の境界では  $\phi = 1$  であることに注意すると

$$\int_{\partial\Omega} x \omega_N |\partial_N u|^2 dS = \int_{\partial\Omega} x \phi \omega_N |\partial_N u|^2 dS$$

が成り立つ.  $\text{supp}(\phi)$  上で  $a > 0$  であるから, Lemma 2.4 の式 (2.3) で  $\nabla\psi, \partial_{i,j}^2 \psi$  を  $a^{\frac{1}{2}}$  に置き換えられるので

$$(2.4) \quad \int_{\partial\Omega} x \omega_N |\partial_N u|^2 dS \leq C(\|g\|_{L^2}^2 + (\lambda^2 + 1) \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2) + \epsilon \|\partial_x u\|_{L^2}^2$$

がなりたつ. この不等式と式 (2.2) から次の不等式

$$\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq C(\|g\|_{L^2}^2 + (\lambda^2 + 1) \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2)$$

が得られる. これに, Poincaré の不等式を用いて

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C((\lambda^2 + 1) \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2)$$

が得られる.  $g = -2i\lambda a u + f$  であったので

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C((\lambda^2 + 1) \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2)$$

が成り立つ. 後は  $\lambda^2 \|a^{\frac{1}{2}} u\|^2$  を評価する. まず次の式が成り立っていた:

$$(-\Delta + 2i\lambda a - \lambda^2)u = f.$$

この式に  $\bar{u}$  をかけて,  $\Omega$  上で積分し虚数部分を取ると

$$2\lambda \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 = \text{Im}(f, u)_{L^2}$$

が得られる. よって

$$(2.5) \quad |\lambda| \|a^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 \leq C \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$



が成り立ち

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C(|\lambda|\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}^2) \leq C|\lambda|^2\|f\|_{L^2}^2 + \epsilon\|u\|_{L^2}^2, \quad |\lambda| > 1, \lambda \in \mathbf{R}$$

となる. これは  $R(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|)$  を表すので, Theorem 1.1 が示せた.

最後に, どのようにして Theorem 1.1 がスタジアムの場合に改良されるかを説明する.

*Remark.* まず式 (2.2) の  $\int_{\partial\Omega} x\omega_N |\partial_N u|^2 dS$  を上から評価するところで,  $x\omega_N \leq 0$  の部分は無視して良いので,  $\{(x, y) \in \bar{\Omega}; x\omega_N(x, y) \geq 0\}$  上で  $a(x, y) > 0$  と仮定しても同様のことが示せる.

スタジアムの場合  $x$  軸に対して平行移動してやると, 翼部分の片側で  $x\omega_N \leq 0$  を仮定できるので先にあげた Example 1.2 が成り立つことが分かる.

*Remark.* 式 (2.4) は  $\text{supp}(\psi)$  上で  $a(x, y) > 0$  となることを用いて評価したが同様の評価は,  $\text{supp}(\nabla\psi)$  上で  $a(x, y) > 0$  としても良い.

このことを用いると Example 1.3 を証明することができる. 詳細は省略するが,  $\psi$  として, 両翼では定数になっている関数を取れば良い.

## References

- [1] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J., Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from boundary, *SIAM J. Control Optim.*, **30** (1992), 1024–1065.
- [2] Burq, N., D'écroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel, *Acta Math.*, **1980**(1998), 1–29.
- [3] Burq, N., Hassell, A. and Wunsch, J., Spreading of quasimode in the Bunimovich stadium, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**, (2007), no. 4 1029–1037.
- [4] Burq, N. and Hitrik, M., Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains, *Math. Res. Let.*, **14** (2007), 35–47.
- [5] Nishiyama, H., Polynomial decay for damped wave equations on partially rectangular domains, *To appear in Math. Res. Let.*
- [6] Lebeau, G., Equation des ondes amorties, in *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, Boutet de Monvel, A. and Marchenko, V. eds. (1996), 73–109.
- [7] Liu, Z. and Rao, B. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, *Z. Angew. Math. Phys.*, **56** (2005), 630–644
- [8] Phung D. K., Polynomial decay rate for the dissipative wave equation, *J. Diff. Eq.*, **240** (2007), 92–124
- [9] Rauch, J. and Taylor, M., Exponential decay of solutions to symmetric hyperbolic equations in bounded domeins, *Indiana J.Math.*, **24** (1974), 79–86.