RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B19 (2010), 277–299

On non-commutative Iwasawa theory of totally real number fields

By

原　隆 (Takashi HARA)*

Abstract

This is a survey article on non-commutative Iwasawa theory for totally real number fields. We first review the formulation of the non-commutative Iwasawa main conjecture following John Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob. Then we discuss the strategy to construct the p-adic zeta functions and prove the main conjecture for non-commutative p-adic Lie extensions of totally real number fields. This article is written in Japanese.

本稿は 2008 年 12 月 8 日 – 12 月 12 日 に京都大学数理解析研究所にて開催された研究集会『代数的整数論とその周辺』に於ける著者の講演

Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p-extensions

の報告書であり，著者の論文 [H2] (Journal of Number theory に掲載) 及び [H3] (プレプリント) の解説を主たる目的とした記事である.[1] 講演では時間的制約のため，総実代数体の非可換岩澤主予想のごく簡単な紹介及び主定理の証明の非常に大雑把なアウトラインの解説しか出来なかった．本報告書に於いては講演中で省かざるを得なかった内容 (特に非可換岩澤理論の歴史的背景やバーンズの手法の証明等) も出来得る限り補完しつつ，総実代数体の非可換岩澤理論の現状と今後の課題について考察したい.

§1.　総実代数体の非可換岩澤理論 (CFKSV 理論)

この節では ジョン・コーツ (John COATES)，加藤和也 (Kazuya KATO)，深谷太香子 (Takako FUKAYA)，ラムドライ・スジャータ (Ramdorai SUJATHA) 及び オトマール・

Received March 25, 2009. Revised November 27, 2009; December 2, 2009.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 11R23, 11R80, 19F99.
Key Words: *non-commutative Iwasawa main conjecture, p-adic zeta function, K-theory, integral logarithmic homomorphism, Burns' technique, theta map.*
日本学術振興会特別研究員 (DC2，21・7079)
*東京大学大学院 数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Japan).
E-mail: thara@ms.u-tokyo.ac.jp
[1] 講演タイトルが論文 [H2] と同名であったため，本報告書のタイトルを変更したことを注記しておく.

ヴェンヤコブ (Otmar Venjakob) に依って定式化された非可換岩澤理論 (以下 CFKSV 理論と表記する．詳細は [CFKSV] 及び [FK] 参照) を総実代数体の p-進リー拡大の場合に限って解説する．CFKSV 理論に関しては，既に過去の『代数的整数論とその周辺』で理論の創設者であるコーツ氏 [Coates] 及び加藤氏 [加藤 1] に依って取り上げられているので，そちらの解説記事も併せて参照されたい．また，総実代数体の非可換岩澤理論については (若干誤植が多いが) [原 1] により一層噛み砕いた解説を書いたので，必要に応じて参照されるのも宜しいかと思う．

§ 1.1.　設定及び記号

以下 p は奇素数を表すものとする．

F を総実代数体とし，F^∞/F を総実な p-進リー拡大 (即ち F^∞ 自身が総実体で，ガロワ群 $\mathrm{Gal}(F^\infty/F)$ がコンパクト p-進リー群と同型となるもの) で F の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 F^{cyc}/F を含むものとする．また，F^∞ で分岐する F の素イデアルは有限個であると仮定し，それらを全て含む F の素イデアルの有限集合 Σ を固定しておく．

$$G = \mathrm{Gal}(F^\infty/F), \qquad H = \mathrm{Gal}(F^\infty/F^{\mathrm{cyc}}),$$
$$\Gamma = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{cyc}}/F) \cong \mathbb{Z}_p$$

とおく．また，一般に副有限群 P に対しその $\mathbb{Z}_p$ 上の完備群環 (即ち $\mathbb{Z}_p$-係数の岩澤代数) を $\Lambda(P)(=\mathbb{Z}_p[[P]])$ で表すこととする．

§ 1.2.　数論サイド —Arithmetic side

さて，岩澤代数 $\Lambda(G)$ に対し以下の部分集合

$$S = \{ f \in \Lambda(G) \mid \Lambda(G)/\Lambda(G)f \text{ は左 } \Lambda(H)\text{-加群として有限生成} \}$$

を考えよう．

命題 1.1.　S は左右オーレ集合 (*left and right* Ore *set*) となる．　◇

証明は [CFKSV] の Theorem 2.4 を参照されたい．このオーレ集合 S をコーツ達は群 G に対する **標準オーレ集合** (Canonical Ore Set) と呼んでいる．[2]

ここで **オーレ集合** とは非可換環論に於いて “良い” 局所化が存在するような分母集合のことである (どの様に “良い” 局所化なのかは一言では説明し難いが，例えばオーレ局所化関手は完全関手になる等，局所化関手が満たして欲しい大抵の性質は満たす)．オーレ局所化についての詳細は [谷崎]，[MR]，[Stenström] 等をご覧頂くのが良いであろう．なお，左右オーレ集合に依る左局所化と右局所化は自然に同型となる (これはオーレ局所化

[2] より正確には，S はコンパクト p-進リー群 G だけでなく商が Γ と同型になるような G の正規閉部分群 H の選び方にも依存する．但し G が円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大を含む拡大のガロワ群の場合には，円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対応する部分群が一意的に定まるので，以下標準オーレ集合を考える際には H として常にこの様に定まる G の自然な閉部分群のみを考えることとする．

の普遍性の議論のみから従う) ので，以下標準オーレ集合に依る $\Lambda(G)$ の局所化を $\Lambda(G)_S$ と表記することにする．

さて，アラン・ジョナサン・ベーリック (Alan Jonathan BERRICK) とマイケル・キーティング (Michael E. KEATING) に依って構成された非可換環のオーレ局所化に付随する (低次) K-群の局所化完全系列 [BK] を標準オーレ局所化 $\Lambda(G) \to \Lambda(G)_S$ に対し適用することで以下の完全系列が得られる:[3]

$$(\natural) \quad K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \to K_0(\Lambda(G)) \to K_0(\Lambda(G)_S).$$

実はこの完全系列の連結準同型 ∂ は全射となる ([CFKSV] Proposition 3.4. この全射性は，例 1.3 で概観する様に有限生成捩れ Λ-加群の構造定理を或る意味で非可換化したものと見做せる)．また，相対グロタンディーク群 $K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S)$ は有限生成射影的左 $\Lambda(G)$-加群の有界複体で，そのコホモロジー群が全て S-捩れ加群となるもののなす導来圏 $\mathscr{D}_S^{b,\mathrm{proj}}(\Lambda(G))$ のグロタンディーク群[4] と見做すことが出来る．そこで複体

$$C_{F^\infty/F} = R\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{F^\infty,\Sigma}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

を導来圏 $\mathscr{D}_S^{b,\mathrm{proj}}(\Lambda(G))$ の対象と見做そう (但し $\mathcal{O}_{F^\infty,\Sigma}$ は F^∞ の Σ-整数環を,[5] $\Gamma_{\text{ét}}$ はエタール大域切断関手を表す)．すると連結準同型 ∂ の全射性から

$$(1.1) \qquad \partial(f_{F^\infty/F}) = -[C_{F^\infty/F}]$$

を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $f_{F^\infty/F}$ が存在する．

定義 1.2. 関係式 (1.1) を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $f_{F^\infty/F}$ を拡大 F^∞/F に対する **特性元** (CHARACTERISTIC ELEMENT) と呼ぶ． ◊

注意 1. 構成から特性元 $f_{F^\infty/F}$ は，自然な写像 $K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_S)$ の像に属する元の掛け算から生ずる不定性を除いて一意に定まる．特性元 $f_{F^\infty/F}$ の定義が不定性を孕んでいることは奇妙に感じられるかもしれないが，この現象は古典理論に於いて特性イデアルの生成元 (特性冪級数) を選ぶ際に岩澤代数の単元倍の不定性を取り除くことが出来ないことの類似と見做せるため，実は極めて自然な現象であると言える．その概要は以下の 例 1.3 を参照されたい． ♦

注意 2. 複体 $C_{F^\infty/F}$ は「エタールコホモロジー (或いはガロワコホモロジー) のポントリャーギン双対 (PONTRJAGIN dual) をとる」という岩澤理論に於ける基本的な操

[3]中心的なオーレ集合に依る局所化 (即ち環 R の単位元を含み中心 $Z(R)$ に含まれるような乗法閉集合に依る局所化) に付随する局所化完全系列は，既にハイマン・バス (Hyman BASS) に依り構成されていた [Bass].

[4]より精確には「左 $\Lambda(G)$-加群の完全複体 (perfect complex) で，S で局所化すると非輪状 (acyclic) となるものの成す圏のワルドハウゼン-グロタンディーク群 (WALDHAUSEN-GROTHENDIECK group)」とした方が良いかもしれない.

[5]即ち Σ に属さない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対しては $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ ($v_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ に対応する加法付値) を満たすような元 x で生成される F^∞ の部分環.

作を複体のレベルで行って得られるものである．実際に $C_{F^\infty/F}$ のコホモロジーを計算すると

$$H^0(C_{F^\infty/F}) = \mathbb{Z}_p, \qquad H^{-1}(C_{F^\infty/F}) = \mathrm{Gal}(M_\Sigma/F^\infty)\,(=: X_\Sigma),$$
$$H^q(C_{F^\infty/F}) = 0 \quad \text{for } q \neq 0, -1$$

となる (但し M_Σ は Σ の外で不分岐な F^∞ の最大副 p アーベル拡大)．この計算結果からも複体 $C_{F^\infty/F}$ が古典的な岩澤理論で用いられる岩澤加群 X_Σ を複体のレベルに自然に一般化したものであることが伺える (0 次コホモロジーに現れる自明 G-加群 $\mathbb{Z}_p$ の解釈については 例 1.3 を参照)． ♦

注意 3.　導来圏 $\mathscr{D}_S^{b,\mathrm{proj}}(\Lambda(G))$ の定義から，複体 $C_{F^\infty/F}$ が $\mathscr{D}_S^{b,\mathrm{proj}}(\Lambda(G))$ の対象と見做されるためにはそのコホモロジー群が全て S-捩れ加群である必要がある．自明な G-加群 $\mathbb{Z}_p$ が S-捩れ加群であることは $\mathbb{Z}_p$ が $\Lambda(H)$-加群として有限生成であることから容易に分かるので ([CFKSV] Proposition 2.3.)，問題となるのは **岩澤加群 $X_\Sigma(= H^{-1}(C_{F^\infty/F}))$ が S-捩れ加群となるか** である．この系統の問題は可換な拡大に対する岩澤理論の段階で既に現れている極めて由緒正しいものである (所謂 **セルマー群の捩れ性に関する予想** Conjecture on the torsionness of Selmer groups に他ならない)．

本稿で扱う総実代数体の場合には，八森祥隆 (Yoshitaka Hachimori) 及び ロムヤール・トマス・シャリフィ (Romyar Thomas Sharifi) に依る補題 ([HS] Lemma 3.4 及び [Kakde] Lemma 1.7.) を用いると，X_Σ が S-捩れ加群であることと p-進リー拡大 F^∞/F が以下の「(μ-不変量)$=0$」型の条件

$(*)_{\mu=0}$　F^∞/F の或る有限次部分拡大 K/F で，F^∞/K が副 p 拡大となり，K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大の μ-不変量が 0 となる様なものが存在する

を満たすことが同値となる (ガロワコホモロジーの計算に依り，総実代数体の円分拡大 K^{cyc}/K に対する岩澤の定理 [Iwasawa] に帰着させる)．岩澤健吉 (Kenkichi Iwasawa) に依り任意の代数体の円分拡大に対して μ-不変量が 0 となることが予想されているので (岩澤の $\mu=0$ 予想)，一般に X_Σ が S-捩れ加群となると予想することは極めて正当的であると考えられる．また，ブルース・フェレーロ (Bruce Ferrero) とローレンス・クリントン・ワシントン (Lawrence Clinton Washington) に依る著名な定理 [FW] の帰結として，F が有理数体の総実な有限次アーベル拡大であるときは X_Σ が S-捩れ加群となることが従う．今後本稿では登場する総実代数体の p-進リー拡大は全て条件 $(*)_{\mu=0}$ を満たすと仮定する． ♦

注意 4.　ガロワ群 G が **p-捩れ部分を持たない** 場合には岩澤代数 $\Lambda(G)$ は正則環 (regular ring) となる (即ち任意の有限生成左 $\Lambda(G)$-加群が長さ有限の射影分解を持つ)．このとき，代数的 K-理論の一般論に拠り以下の自然な同型

$$K_0(\mathscr{D}_S^{b,\mathrm{proj}}(\Lambda(G))) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathfrak{M}_S(\Lambda(G))); \quad [K^\cdot] \mapsto \sum_i (-1)^i [H^i(K^\cdot)]$$

が存在する (但し $\mathfrak{M}_S(\Lambda(G))$ は有限生成 S-振れ左 $\Lambda(G)$-加群のなす圏). したがってこの場合はわざわざ複体の圏を持ち出す必要はなく，見かけ上は全て加群の圏の範疇で議論を完結することが出来る ([CFKSV] でも G が p-振れ部分を持たないことを仮定し，全て加群の圏の中で議論を行っている).

しかし (主定理 1.6 で扱う様に) G が p-**振れ部分を持つ** 場合は $\Lambda(G)$ が正則環とならず，上記の同型が成立しないため，特性元の定義の段階ですら複体のレベル (即ち導来圏) で考える必要が生ずる．また G が p-振れ部分を持たない場合でも，係数制限等の操作を行う際には結局加群の射影分解をとらねばならないため，見かけ上は加群の圏の中だけで議論している様に見えても本質的には導来圏で考えた場合と大差ない場合が多い. 以上のような観点から，非可換岩澤理論では加群の圏よりもその導来圏の上で議論を行う方が自然であると言える．このことは可換拡大の岩澤理論から非可換岩澤理論に移行する際に生ずる複雑さ・困難さを反映する現象の一つと見做すことも出来よう. ♦

次の例は，古典理論に於ける特性イデアルの概念と上記の構成で得られる特性元の概念とが本質的に一致することを示唆する非常に重要な例である.

例 1.3 (岩澤の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大). $F=\mathbb{Q}$, $F^\infty=\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}$ とする．上記の設定と照らし合わせて $G=\Gamma=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_p$，$H=\{\mathrm{id}\}$ を得る．$\Sigma=\{p\}$ と取っておこう. このとき，標準オーレ集合 S は定義から容易に $S=\Lambda(\Gamma)\setminus p\Lambda(\Gamma)$ と計算出来る．また，$G=\Gamma$ の様に p-振れ部分を持たないガロワ群に対しては S に p の冪乗も含めたオーレ集合 $S^*=\bigcup_{n\geq 0}p^nS$ を良く用いるが，今の場合は明らかに $S^*=\Lambda(G)\setminus\{0\}$ となる．即ちオーレ局所化 $\Lambda(\Gamma)_{S^*}$ は商体 $\mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))$ に他ならない.

古典的な円分岩澤理論に於いて岩澤加群 $X_{\{p\}}=\mathrm{Gal}(M_{\{p\}}/\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}})$ の **特性イデアル** (CHARACTERISTIC IDEAL) は以下の様に定義された: 岩澤の定理 ([Iwasawa] Theorem 17.) に拠り $X_{\{p\}}$ は有限生成振れ $\Lambda(\Gamma)$-加群となる.[6] そこで有限生成振れ $\Lambda(\Gamma)$-加群の構造定理を $X_{\{p\}}$ に適用すると，有限個の $\Lambda(\Gamma)$ の非可逆元 f_i が存在して $X_{\{p\}}$ は $\bigoplus_i\Lambda(\Gamma)/\Lambda(\Gamma)f_i$ の形の $\Lambda(\Gamma)$-加群と擬同型となるので,[7] $\Lambda(\Gamma)$ に於いて $\{f_i\}_i$ の積が生成するイデアル

$$\mathrm{Char}_{\Lambda(\Gamma)}(X_{\{p\}})=\left(\prod_i f_i\right)\Lambda(\Gamma)$$

を岩澤加群 $X_{\{p\}}$ の特性イデアルと定める (特性イデアルは岩澤加群 $X_{\{p\}}$ のみに依り，構造定理に現れる $\{f_i\}_i$ の選び方に依らない).

さて，上記の様にして得られた特性イデアルの生成元 $\prod_i f_i$ を用いて商体 $\mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))$

[6]岩澤は [Iwasawa] に於いて「基礎体が 1 の原始 p 乗根を含む」という仮定を付していたため，総実代数体に対して $X_{\{p\}}$ の $\Lambda(\Gamma)$-階数が 0 となることは実際にはグリーンバーグに依る岩澤の定理の別証明から従う ([Greenberg] Proposition 4 の後の注参照). しかし，この場合も含めて岩澤の定理と呼ぶことが慣例のようである.

[7]$\Lambda(G)$-加群 M, N が擬同型 (pseudo-isomorphic) であるとは，核と余核が擬零加群 (特に $G=\Gamma$ の場合には有限加群) となるような $\Lambda(G)$-加群の射 $f\colon M\to N$ が存在することを指す.

の元 $f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}}$ を

$$f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}} = \frac{1}{1-\gamma}\prod_i f_i$$

と定義しよう (但し γ は Γ の位相的生成元). $\Lambda(\Gamma)$ 及び $\mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))$ は可換な局所環ゆえホワイトヘッド群 $K_1(\Lambda(\Gamma))$ 及び $K_1(\mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma)))$ が乗法群 $\Lambda(\Gamma)^\times$ 及び $\mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))^\times$ と同一視されることに注意すると, ベーリック-キーティング (或いは バス) の局所化完全系列 ($\natural$) は

$$0 \to \Lambda(\Gamma)^\times \to \mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))^\times \xrightarrow{\partial} K_0(\mathfrak{M}_{\mathrm{tors}}(\Lambda(\Gamma))) \to 0$$

と書き直される (但し $\mathfrak{M}_{\mathrm{tors}}(\Lambda(\Gamma))$ は有限生成捩れ $\Lambda(\Gamma)$-加群のなす圏. ここでは 注意 4 の同型を用いた). さらにハイマン・バス (Hyman BASS) に依る連結準同型 ∂ の明示表記

$$\partial(f/g) = [\Lambda(\Gamma)/\Lambda(\Gamma)f] - [\Lambda(\Gamma)/\Lambda(\Gamma)g] \qquad \text{for } f, g \in \mathrm{Frac}(\Lambda(\Gamma))^\times \cap \Lambda(\Gamma)$$

及び擬零 $\Lambda(\Gamma)$-加群の $K_0(\mathfrak{M}_{\mathrm{tors}}(\Lambda(\Gamma)))$ での像が 0 となることを用いて $f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}}$ の ∂ に依る像を計算すると

$$\begin{aligned}\partial(f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}}) &= [\Lambda(\Gamma)/\mathrm{Char}_{\Lambda(\Gamma)}(X_{\{p\}})] - [\Lambda(\Gamma)/(1-\gamma)\Lambda(\Gamma)] \\ &= [X_{\{p\}}] - [\mathbb{Z}_p]\end{aligned}$$

が得られる ($1-\gamma$ は $\Lambda(\Gamma)$ の添加イデアル $I(\Lambda(\Gamma)) = \mathrm{Ker}(\Lambda(\Gamma) \to \mathbb{Z}_p)$ の位相的生成元となることに注意). 即ち $f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}}$ が (上述の意味で) **拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}$ の特性元となる** ことが確認出来る.

以上の計算を振り返ると, K-群の局所化完全系列を用いた特性元の構成が (可換な拡大の場合の) Λ-加群の構造定理に基づく特性イデアルの構成方法を自然に一般化したものであることが観察される. さらに上記の例では $-[\mathbb{Z}_p]$ という "余計な" 項が存在することから $f_{\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}}$ を特性イデアルの生成元そのものではなくその $(1-\gamma)^{-1}$ 倍で定義したが, 後に定式化する岩澤主予想を念頭に置くと, この事実は対応する p-進ゼータ関数 (即ち久保田-レオポルト KUBOTA-LEOPOLDT の p-進ゼータ関数) が自明表現 $\mathbf{1}(\gamma) = 1$ で一位の極を持つことを示唆している. 言い換えれば $-[\mathbb{Z}_p]$ と言う項が p-進ゼータ関数の極の情報を反映している, と解釈することも出来る. ◇

注意 5 (歴史的背景). 元々コーツ氏等は最初から代数的 K-理論を使って特性元を構成しようとしたわけではなく, 可換な拡大の場合に倣って Λ-加群の構造定理を非可換ガロワ群の場合に拡張し, これを用いて直接特性イデアルを構成しようとしたのであった. この試みは構造定理の拡張に於いては成功した [CSS] が, そこから加群の性質を反映した "巧い" 特性イデアルを取り出す際に様々な困難が生じ, 構造定理を用いた特性イデアルの構成は十分に機能しないようであることが判明した. この辺りの事情は, 八森祥隆氏の解説記事 [八森] に詳しい.

そこで発想を根本的に転換して注目される様になったのが代数的 K-理論である．代数的 K-理論を非可換な岩澤理論に応用する試みはリッター-ヴァイス (RITTER-WEISS) 等によって既になされつつあった [RW1]．当初どのような意図から K-理論を非可換岩澤理論に応用するに至ったかは想像の域を出ないが，(かなり乱暴な見方をすると) $C_{F^\infty/F}$ という複体から不変量 (特性元) を取り出す際に非可換性から生じる困難 (例えば [CSS] に於いて現れたようなもの) を，局所化完全系列の連結準同型と言う「ホモロジー代数的な捉え所のない複雑な写像」に押し付けてしまうために K-理論の力を借りた，という見方も出来るだろう．兎にも角にも，代数的 K-理論の局所化完全系列を用いることで，形式的かつ簡便に非可換拡大の “良い” 特性元を構成出来る様になったのである．

なおリッターとヴァイスは G が 1 次元 p-進リー群のときに，矢張り代数的 K-理論の局所化完全系列を適用することに依って独自に非可換岩澤主予想を定式化している (リッター-ヴァイスの “同変岩澤理論” EQUIVARIANT IWASAWA THEORY [RW1])．彼等は中心的非零因子全体でのオーレ局所化を考え，バスの局所化完全系列を用いて理論を構成した．他方，一般の高次 p-進リー群に対しても扱える標準オーレ分母集合 S を最初に導入したのはヴェンヤコブの博士論文 [Venjakob] であり，この標準オーレ集合を用いて議論を進める点が CFKSV 理論の特色にもなっている (高次の p-進リー群では中心的な元のみでは分母集合が少なすぎるため，それに依る局所化は特性元や p-進ゼータ関数が存在する舞台としては不十分なのである)． ♦

§1.3. 解析サイド —Analytic side

本節では所謂 **補間性質** (INTERPOLATION PROPERTY) に依り非可換拡大に付随する p-進ゼータ関数を特徴付ける．以下有理数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素数体 $\mathbb{C}$ 及び p-進数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを一つ固定しておく．

さて，アルティン表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}})$ (つまり像が $\mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}})$ の有限部分群となる様な G の表現)，p-進円分指標 $\kappa\colon \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ 及び $p-1$ で割り切れる正の整数 r に対し，表現

$$\rho\kappa^r\colon G \to \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

は岩澤代数の環準同型写像

$$\rho\kappa^r\colon \Lambda(G) \to \mathrm{M}_d(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

へと拡張される (細かい話だが $\overline{\mathbb{Q}}_p$ は p-進位相に関して完備ではないので，岩澤代数上の連続準同型に拡張する際には一旦 ρ の像が $\mathrm{GL}_d(E)$ に含まれる様な $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 E を取り，係数体を E に制限した上で拡張する必要がある)．K-理論の関手性から，この連続環準同型はホワイトヘッド群の写像 $\rho\kappa^r\colon K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\mathrm{M}_d(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ を誘導するが，ここで $\mathrm{M}_d(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ と $\overline{\mathbb{Q}}_p$ との間の森田同値が誘導する自然な同型 $K_1(\mathrm{M}_d(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \simeq K_1(\overline{\mathbb{Q}}_p) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を考えることで **表現 $\rho\kappa^r$ に於ける値写像** (EVALUATION MAP AT $\rho\kappa^r$)

$$\mathrm{ev}_{\rho\kappa^r}\colon K_1(\Lambda(G)) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times; \quad f \mapsto f(\rho\kappa^r)$$

が得られる．しかし p-進ゼータ関数は特性元と同じ $K_1(\Lambda(G)_S)$ に属すべき元なので，今得られた値写像の定義域を $K_1(\Lambda(G)_S)$ に拡張する必要がある．これは以下でなされる様に **円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大の値写像 (添加写像) を経由させる** という非常に画期的な方法で実現される: $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 E で (ρ を適当に定数倍することで) $\rho\kappa^r$ の像が $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_E)$ (但し $\mathcal{O}_E$ は E の整数環) に入るものをとった上で，連続表現

$$\Phi_{\rho\kappa^r}\colon \Lambda(G) \to \mathrm{M}_d(\mathcal{O}_E[[\Gamma]]) = \mathrm{M}_d(\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]; \quad g \mapsto \rho\kappa^r(g) \otimes \overline{g} \quad \text{for } g \in G$$

を考えよう ($\overline{g}$ は g の Γ に於ける像．いきなり $\rho\kappa^r$ での値をとるのではなく 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対応する岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ を一旦経由させるのがポイント)．すると $\Phi_{\rho\kappa^r}$ は局所化された岩澤代数に於ける環準同型 $\Lambda(G)_S \to \mathrm{M}_d(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E[[\Gamma]]))$ に拡張される ([CFKSV] Lemma 3.3. この補題が要であり，証明には標準オーレ集合 S の性質を最大限に用いる)．したがって先ほどと同様にホワイトヘッド群の準同型写像

$$K_1(\Lambda(G)_S) \to K_1(\mathrm{M}_d(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E[[\Gamma]]))) \simeq K_1(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E[[\Gamma]])) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E[[\Gamma]])^\times$$

を得る．あとは $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E[[\Gamma]])^\times$ に添加写像 (Augmentation map) $\overline{g} \mapsto 1$ を施すことにより "$K_1(\Lambda(G)_S)$ の元に対する値写像" が考えられるわけだが，このままでは当然のことながら値が定義されない部分 (分母が 0 になる部分) が生じてしまう．そこで $\mathcal{O}_E[[\Gamma]]$ の添加イデアル $\mathfrak{p}$ での局所化 $\mathcal{O}_E[[\Gamma]]_{\mathfrak{p}}$ を考えると，添加写像は $\mathcal{O}_E[[\Gamma]]_{\mathfrak{p}} \to E$ には自然に延びるので，さらに $\mathfrak{p}$ の元を ∞ と言う元 (単なる記号として導入する) に対応させることで値写像の拡張

$$\mathrm{ev}_{\rho\kappa^r}\colon K_1(\Lambda(G)_S) \to E \cup \{\infty\} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p \cup \{\infty\}; \quad f \mapsto f(\rho\kappa^r)$$

を得るのである (言うまでもないがこの拡張は環準同型ではあり得ない)．

このようにして構成された値写像を用いて **拡大 F^∞/F に対する p-進ゼータ関数** (p-adic Zeta Function for F^∞/F) を，任意の G のアルティン表現 ρ 及び $p-1$ で割り切れる正の整数 r に対して補間性質

$$\xi_{F^\infty/F}(\rho\kappa^r) = L_\Sigma(1-r; F^\infty/F, \rho) \tag{1.2}$$

を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $\xi_{F^\infty/F}$ として "定義" する．ここで $L_\Sigma(s; F^\infty/F, \rho)$ は アルティン表現 ρ に付随する複素アルティン L-関数から Σ に属する素イデアルでの局所因子を除いたもの (アルティン L-関数 $L_\Sigma(s; F^\infty/F, \rho)$ の負の奇数点での特殊値は代数的なので，等式 (1.2) は最初に固定した $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ 及び $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを通じて意味を持つことに注意)．

予想 1.4 (p-進ゼータ関数の存在予想)**.**　総実代数体の総実 p-進リー拡大 F^∞/F に対して補間性質 (1.2) を満たす p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ が存在する．　$\Diamond$

注意 6. p-進ゼータ関数の一意性も併せて考えたいところではあるが，上記の補間性質を満たす元は一般に $SK_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_S)$ の像に属する元の乗法から生ずる不定性を伴うので，p-進ゼータ関数の一意性予想を定式化するためにはもう少し条件が必要な様に思われる．例えば「$SK_1(\Lambda(G))$ の $K_1(\Lambda(G)_S)$ での像が消滅する」ことを予想とすることも出来るが，そのように予想することが適切であるかどうかは著者には判断がつきかねるので本稿ではこれ以上立ち入らないこととする．$SK_1(\Lambda(G))$ という群はガロワ群 G が可換の場合には消滅しているので，SK_1-群と p-進ゼータ関数の一意性に関わる問題はまさに非可換岩澤理論特有の問題であるということは強調しておこう．

なお，有限 p-群 Δ に対しては割合多くの場合に $SK_1(\mathbb{Z}_p[\Delta])$ が消滅することが計算されている (勿論消滅しない例も存在する．詳細は [Oliver] 等を参照されたい)． ♦

§ 1.4. 非可換岩澤主予想及び主定理

以上の設定の下で非可換岩澤主予想は非常に簡潔かつ端麗な形で定式化される．

予想 1.5 (非可換岩澤主予想)**.** p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ の連結準同型写像 ∂ による像は $-[C_{F^\infty/F}]$ と一致する．

即ち F^∞/F に対する p-進ゼータ関数は拡大 F^∞/F の特性元となる． ◊

非可換岩澤主予想が示されている例 (または p-進ゼータ関数が構成されている例) としては以下のものがある:

- ユルゲン・リッター (Jürgen RITTER)，アルフレッド・ヴァイス (Alfred WEISS) [RW3]

  F^∞/F が 1 次元総実 p-進リー拡大で，F^∞/F' が副 p アーベル拡大となる様な p-次部分拡大 F'/F が存在する時 (彼等は自身の非可換岩澤主予想の定式化—同変岩澤理論—の下で例を構成している)．

- 加藤和也 (Kazuya KATO) [Kato2]

  ハイゼンベルグ型 (OF HEISENBERG TYPE) 拡大の場合．即ち F^∞/F のガロワ群が

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (\text{アーベル群})$$

  の適当な商となっている場合.[8]

- マヘシュ・カクデ (Mahesh KAKDE) [Kakde]

  F^∞/F のガロワ群が副 p アーベル p-進リー群と $\mathbb{Z}_p$ との半直積に同型な拡大のうち，"特殊型" (OF SPECIAL TYPE) のもの.[9]

注意 7. ハイゼンベルク群は $\mathbb{Z}_p$ と $\mathbb{Z}_p^2$ の半直積 $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes \mathbb{Z}_p$ と見做せるので，カクデの結果は加藤の結果の一般化を与えている. ♦

加藤和也の結果のカクデとは異なる方向性での一般化が本稿の主定理である.

定理 1.6 (主定理). F^∞/F が以下の何れかの条件を満たすとき，F^∞/F に対する p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ が存在し，主予想 $\partial(\xi_{F^\infty/F}) = -[C_{F^\infty/F}]$ が成り立つ:

(1) [H2]. $p \neq 2, 3$ かつ拡大 F^∞/F のガロワ群が

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Gamma \qquad (= G^f \times \Gamma \text{ と書く})$$

と同型となる時.

(2) [H3]. 拡大 F^∞/F のガロワ群が冪指数 (*exponent*) p の有限 p-群 G^f と Γ との直積と同型となる時. ◊

注意 8. $p > N$ の時は

$$B^N(\mathbb{F}_p) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p & \dots & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p & \dots & & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \leq \qquad \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{F}_p)$$

の冪指数は p なので，(2) の結果は (1) 及び加藤の結果 (の特別な場合) を含んでいる. ♦

[8] 講演中「どの $\mathbb{Z}_p$ が円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対応する成分になっているか」と言う質問を受けたが，実は G/H なる商の形で円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大のガロワ群が現れる限りどのような形で円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大の成分が入り込んでいても構わない (本稿の主定理 1.6 (1) の様に，アーベル群の直積成分のところに $\mathbb{Z}_p$ が入っている形でも良い). これは，次節で p-進ゼータ関数の構成に用いるバーンズの手法がアーベル群の図式のダイアグラム・チェイシングに終始しており，円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大成分について考慮する必要が全くないからである (円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大成分は円分指標に依るアルティン表現の捻りを考える際にのみ用いる). 勿論ハイゼンベルク型ガロワ群 G にどの様に円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大成分が入り込み得るかどうかはまた別の問題である.

[9] 特殊型とは，大雑把に言うと群の元を p 乗する写像が適当なガロワ群 G の部分商 (後述のバーンズの手法で用いられる部分商の族) の岩澤代数 $\Lambda(U/V)$ 達の上で環準同型写像を引き起こす様なもののこと. バーンズの手法及び整対数準同型写像を用いる際に生じる技術的仮定である.

注意 9. p-進ゼータ関数の一意性に関しては，先の 注意 6 でも触れた様に (1)，(2) とも $SK_1(\mathbb{Z}_p[G^f])$ (の $K_1(\Lambda(G)_S)$ での像) の元の乗法に依る不定性を除いて一意に定まる．(1) 及び (注意 8 の記号の下で) $G^f = B^N(\mathbb{F}_p)$ の場合は，ペーター・シュナイダー (Peter SCHNEIDER) と オトマール・ヴェンヤコブ が $SK_1(\mathbb{Z}_p[G^f])$ の自明性を証明した旨をヴェンヤコブ氏からアナウンスされたので，彼らの結果を認めるならば各々のケースでは p-進ゼータ関数の一意性まで証明されたこととなる． ♦

注意 10. 講演では (2) に関しては「1 の p 冪根の乗法に依る不定性を法として p-進ゼータ関数が存在する」という形で紹介したが，その後リッター-ヴァイス型の p 次拡大を含むケース (上述の [RW3] 及びそのための合同式を計算した [RW2]) に帰着させることに依ってこの不定性を取り除くことに成功した．その技術的な内容に関しては [H3] を参照されたい． ♦

§ 2. p-進ゼータ関数の構成に向けて

前節で概観した様に，非可換岩澤主予想に取り組む際には

- p-進ゼータ関数の構成問題
- 主予想の成立不成立の問題

という二つの大問題を考えねばならない．この二種類の問題を **可換な拡大に対するゼータ関数達を <u>テータ写像</u> なる写像で〈貼り合わせる〉**ことで一気に解決出来てしまうのではないかという画期的なアイデアを提出したのが デイヴィッド・バーンズ (David BURNS) である．本節では，先ずバーンズに依るこの画期的な手法を (許す限り詳しく) 解説した後，実際の主予想の証明方針を 主定理 1.6 の場合に即して概観する．

§ 2.1. バーンズの手法

§ 2.1 では § 1.2 及び § 1.3 で考察した一般的な設定を考える．

$\mathfrak{F}$ を G の開部分群 U 及び H の開部分群 V の組 (U, V) のなす族で以下の条件を満たすものとする:

(i) $\mathfrak{F}$ の元 (U, V) に対し V は U の正規部分群で，剰余群 U/V はアーベル群．

(ii) 任意の G のアルティン表現 ρ が仮想表現 (virtual representation) として，剰余アーベル群 U/V の適当な指標 $\chi_{U,V}$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_U^G(\chi_{U,V})$ の $\mathbb{Z}$-線形結合で表される (但し (U, V) は $\mathfrak{F}$ の元を動くものとする)．

このとき K-群のノルム写像 $\mathrm{Nr}\colon K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(U))$ と自然な全射から誘導される写像 $K_1(\Lambda(U)) \to K_1(\Lambda(U/V)) = \Lambda(U/V)^\times$ を合成することで，写像

$$\theta_{U,V}\colon K_1(\Lambda(G)) \to \Lambda(U/V)^\times$$

が得られる (岩澤代数 $\Lambda(U/V)$ は $\mathfrak{F}$ の条件 (i) から半局所可換環となるので，そのホワイトヘッド群が $\Lambda(U/V)$ の単数群と同一視されることに注意．[Bass] 等を参照のこと)．局所化された岩澤加群に関しても同様に

$$\theta_{S,U,V} \colon K_1(\Lambda(G)_S) \to \Lambda(U/V)_S^\times$$

が構成される．[10]

注意 11.　このとき，構成から任意の $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 η と U/V の位数有限の指標 χ (但し (U,V) は $\mathfrak{F}$ の元) に対し

$$\theta_{S,U,V}(\eta)(\chi) = \eta(\mathrm{Ind}_U^G(\chi)) \tag{2.1}$$

が従う (但し § 1.3 で定義した意味でホワイトヘッド群の元の表現での値をとっている)．この関係式と $\mathfrak{F}$ の条件 (ii) を組み合わせることで，ブラウアー帰納法 (BRAUER INDUCTION) の議論を適用することが出来る．♦

$\theta_{U,V}$，$\theta_{S,U,V}$ 等を "束ねた" 写像をそれぞれ $\theta = (\theta_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$，$\theta_S = (\theta_{S,U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ と書こう．Ψ を θ の像としておく (したがって $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)^\times$ の部分群)．

F_U 及び F_V をそれぞれ U, V に依る F^∞ の固定体とするとき，$\Lambda(U/V)_S$ には ピエール・ドリーニュ (Pierre DELIGNE) と ケネス・アラン・リベット (Kenneth Alan RIBET) の結果 [DR] を受けて ジャン-ピエール・セール (Jean-Pierre SERRE) が構成した以下の性質を満たす元 $\xi_{U,V}$ が潜んでいる (これをアーベル拡大 F_V/F_U に対するセールの p-進ゼータ擬測度 (p-ADIC ZETA PSEUDOMEASURE) と呼ぶ):

(1) 任意の U/V の元 u に対して $(1-u)\xi_{U,V}$ は $\Lambda(U/V)$ の元.

(2) U/V の位数有限の指標 χ 及び $p-1$ で割り切れる正の整数 r に対し，補間性質 $\xi_{U,V}(\chi\kappa^r) = L_\Sigma(1-r; F_V/F_U, \chi)$ が成り立つ.

セールの p-進ゼータ擬測度は岩澤主予想を満たすことがアンドリュー・ワイルズ (Andrew WILES) に依って示されている [Wiles].

この $\xi_{U,V}$ 達の〈貼り合わせ〉を行うことが，バーンズに依る斬新かつ画期的なアイデアの中枢である.

定理 2.1 (バーンズの手法).　$\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)_S^\times$ の部分群 Ψ_S で，θ_S の像を含み，$\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)^\times$ との共通部分が Ψ と一致するものが存在したとする．さらに $(\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ が Ψ_S の元であると仮定する.

このとき F^∞/F に対する p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ が存在して，非可換岩澤主予想 $\partial(\xi_{F^\infty/F}) = -[C_{F^\infty/F}]$ が成り立つ.　◊

[10] p-進リー群 U/V に対しても §1.2 で定義した様に標準オーレ集合が定義される．誤解の余地はないと思われるので，記号の濫用ではあるが U/V に対する標準オーレ集合も S で表し，$\Lambda(U/V)$ の標準オーレ局所化を $\Lambda(U/V)_S$ と表記することにする.

証明は単純なダイアグラム・チェイシング (diagram chasing) である．[Kato2] Proposition 2.5 も参照のこと.[11]

Proof. F^∞/F の任意の特性元 f をとる (つまり f は $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元で関係式 $\partial(f) = -[C_{F^\infty/F}]$ を満たすもの)．$\theta_S(f) = (f_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ と書くと，仮定より Ψ_S は θ_S の像を含むから $(f_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ は Ψ_S の元．他方，仮定より $(\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ も Ψ_S の元だから，$u_{U,V} = \xi_{U,V}f_{U,V}^{-1}$ とおくと $(u_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ は Ψ_S の元．さらに

$$\partial(f_{U,V}) = \partial(\xi_{U,V}) = -[C_{U,V}]$$

が成り立つので ($f_{U,V}$ に関しては連結準同型写像のノルムに関する関手性，$\xi_{U,V}$ に関してはワイルズの岩澤主予想 [Wiles])，構成から $\partial(u_{U,V})$ は 0 となる．したがって局所化完全系列 (♮) から，$(u_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ は $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}}\Lambda(U/V)^\times$ の元と見做せる．Ψ_S と $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}}\Lambda(U/V)^\times$ の共通部分が Ψ であるから $(u_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ は Ψ の元．ここで Ψ は θ の像であったから，或る $K_1(\Lambda(G))$ の元 u が存在して $\theta(u) = (u_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ が成り立つ．この u を用いて $\xi = fu$ と定義すると，構成から

(性質-1) $\partial(\xi) = -[C_{F^\infty/F}]$ (つまり ξ も F^∞/F の特性元),

(性質-2) $\theta_S(\xi) = (\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$

が導かれる．(性質-2) と $\mathfrak{F}$ の条件 (ii)，関係式 (2.1) を用いると，ξ が補間性質 (1.2) を満たすことがブラウアー帰納法の議論に依り証明出来る．斯くして ξ が所望の p-進ゼータ関数となる．(性質-1) はまさに p-進ゼータ関数が主予想を満たすことを表している．

文章で書くと如何にも繁雑に見えてしまうが，要するに以下の図式でダイアグラム・チェイシングをしているだけである．各自確認されたい．

$$\begin{tikzcd}
K_1(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & K_1(\Lambda(G)_S) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\theta_S"] & K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S) \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
\Psi \arrow[d, hook] & \Psi_S \arrow[d, hook] & & \\
\prod\limits_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)^\times \arrow[r, hook] & \prod\limits_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)_S^\times \arrow[r, "\partial"'] & \prod\limits_{(U,V)\in\mathfrak{F}} K_0(\Lambda(U/V),\Lambda(U/V)_S) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

このバーンズの手法を適用することで，p-進ゼータ関数の構成及び主予想の証明の方針は以下のステップに分けられる:

[11] 加藤先生のプレ・プリント [Kato2] に「この命題はデイヴィッド・バーンズから学んだ」と記されていることから，著者は 定理 2.1 の手法を勝手に《バーンズの手法 (BURNS' TECHNIQUE)》と呼称している．バーンズ氏がこの定理のアイデアを生み出したことはほぼ間違いないと思われるが，どうやらバーンズ氏自身に依るこの手法に関する論文は未発表のようである．[Kato2] も現時点で未発表であることから，ここでは 定理 2.1 の証明を詳しく著すこととした．

Step 0, 適当な族 $\mathfrak{F}$ の構成.

Step 1, θ, θ_S, Ψ 及び Ψ_S の特徴付け.

Step 2, $(\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ が Ψ_S の元となることの証明.

以下，各ステップで具体的にどのような構成が行われるのかを 主定理 1.6 の設定の下で (即ちガロワ群 G が $G^f\times\Gamma$ と同型のときに限って) 紙面の許す限り解説してゆこう.

§ 2.2. 族 $\mathfrak{F}$ の構成—Step 0

先ずはバーンズの手法を適用する舞台となる対 (U,V) の族 $\mathfrak{F}$ を構成しなければならない．特に条件 (ii) の「任意のアルティン表現を U/V の指標の誘導表現達の線形和で表す」という部分が非常に難しい問題ではあるが，この問題に対する金字塔的な定理として有限群の線型表現に於ける **アルティン-ブラウアーの誘導定理** (Artin-Brauer's Induction Theorems) がある．定理の詳細に付いては [Serre1] を参照のこと．特に G^f の **ブラウアー基本部分群** (Brauer's Elementary Subgroup) を U^f とし，その交換子群を V^f とすれば，$\mathfrak{F}=\{(U^f\times\Gamma, V^f\times\{1\})\}$ はまさに所望の族を成している.

但し今回の様に有限群 G^f が p-群の場合には，全ての部分群がブラウアー基本部分群となってしまうので，$\mathfrak{F}$ はほぼ全ての開部分群 (とその交換子群の対) を集めた族になってしまい，その後のテータ写像の構成及び合同式の計算に於いて収拾がつかなくなってしまう．そこで，論文 [H3] (主定理 1.6 (2)) ではブラウアーの定理より若干弱い **アルティンの誘導定理** を用いている．アルティンの定理は

> 有限群 Δ の任意の表現 ρ に対し，$(\sharp\Delta)\rho$ が **巡回部分群の指標の誘導表現** の $\mathbb{Z}$-線形和で表される

ことを主張している．これを G^f に適用すると，G^f の冪指数が p であることを加味すれば $\mathfrak{F}$ として **全ての** p**-次巡回拡大と** Γ **との直積のみを考えれば良い** こととなり，大分計算が簡略化される.[12]

なお，論文 [H2] (主定理 1.6 (1)) ではこの様な高級な定理は用いず，G^f が

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ltimes \begin{pmatrix} \mathbb{F}_p \\ \mathbb{F}_p \\ \mathbb{F}_p \end{pmatrix} \quad (=\overline{G}^f \ltimes N \text{ と書いておく})$$

と半直積表示されることを用いて具体的に G^f の既約表現を $\overline{G}^f$ 及び N の表現から誘導表現を用いて構成し，その様子を観察することで $\mathfrak{F}$ の元を具体的に構成した (5 組の対からなる．その具体的な記述は [H2] を参照のこと).

[12] その代わり ρ が $p^{-\sharp G^f}\mathbb{Z}$-線形和でしか表せなくなってしまうので，補間性質 (1.2) の証明に於いて 1 の p-冪根倍の不定性が生じてしまう．この他対数写像を用いた議論 (Step 1) でも 1 の p-冪根倍の不定性が生じる部分があるので，論文 [H3] では先ず 1 の p-冪根倍の不定性を残して p-進ゼータ関数の構成及び主予想の証明を行い，その後 1 の p-冪根倍の不定性を取り除く議論を行っている.

§ 2.3. テータ写像の特徴付け—Step 1

次のステップではテータ写像 θ, θ_S の像を特徴づける．その前に先ずはその加法群版 θ^+ 及びその像 Ω を構成しよう．

副有限群 P に対して $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(P)]]$ で P の共役類を自由基底に持つ $\mathbb{Z}_p$-自由加群を副有限完備化したものを表すことにする．$\mathfrak{F}$ の元 (U,V) に対して左剰余類分割 G/U の代表系 $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ をとり，任意の G の共役類 $[g]$ に対して

$$\tau_j([g]) = \begin{cases} [g_j^{-1}gg_j] & g_j^{-1}gg_j \text{ が } U \text{ に含まれる時,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定めると，$\mathrm{Tr} = \sum_{j=1}^N \tau_j$ は 代表系 $\{g_j\}_{j=1}^N$ の取り方に依らない $\mathbb{Z}_p$-加群の準同型写像 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(G)]] \to \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(U)]]$ を誘導する (以下 **トレース写像** TRACE MAP と呼ぼう)．この写像に自然な全射 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(U)]] \to \mathbb{Z}_p[[U/V]]$ を合成することに依り

$$\theta^+_{U,V} \colon \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(G)]] \to \mathbb{Z}_p[[U/V]]$$

を得る．$\theta^+_{U,V}$ の像を $I_{U,V} (\subseteq \Lambda(U/V))$ とおく．さて，各成分 $y_{U,V} \in \mathbb{Z}_p[[U/V]]$ がトレース写像で移り合い，さらに $y_{U,V}$ が $I_{U,V}$ に含まれる様な $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \mathbb{Z}_p[[U/V]]$ の元 $y = (y_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ で生成される部分 $\mathbb{Z}_p$-加群 Ω を考えよう．このとき，$\theta^+_{U,V}$ を “束ねた” 射 θ^+ の像が $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} I_{U,V}$ に含まれることは $I_{U,V}$ の定義より明らかであるが，$\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} I_{U,V}$ に「各成分がトレース写像で移り合う」という極めて自然かつ緩やかな条件を課した部分加群 Ω が，実は θ^+ の像とぴったり一致してしまうのである:

命題 2.2. θ^+ は同型 $\theta^+ \colon \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(G)]] \xrightarrow{\sim} \Omega$ を誘導する． ♢

同型 θ^+ を **加法的テータ写像** (ADDITIVE THETA MAP) とでも呼んでおこう．主定理の状況での証明は [H2] Definition-Proposition 3.3 及び [H3] Proposition 4.3 を参照．本質的には誘導定理の証明を行っているだけなので，かなり一般の状況でこの種の加法的テータ同型は示されると考えられる．

次に，上で得られた加法的テータ同型を元々考えていた θ という乗法的な写像の言葉に《翻訳》していく必要があるが，その際に用いられる道具が **オリヴァー-テイラーの整対数準同型写像** (OLIVER-TAYLOR'S INTEGRAL LOGARITHMIC HOMOMORPHISM) $\Gamma_G \colon K_1(\Lambda(G)) \to \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(G)]]$ である．

命題 2.3 (整対数準同型写像)**.** 有限 p-群 Δ の $\mathbb{Z}_p$ 上の群環を考える．$K_1(\mathbb{Z}_p[\Delta])$ の元 x に対し，その $\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$ への持ち上げも同じ文字 x で表し

$$\Gamma_\Delta(x) = \log(x) - \frac{1}{p}\varphi(\log(x))$$

と定める.[13] 但し φ は $\mathbb{Q}_p[\mathrm{Conj}(\Delta)]$ の元 $\sum_{[g]\in\Delta} a_{[g]}[g]$ に対し

$$\varphi\left(\sum_{[g]\in\mathrm{Conj}(\Delta)} a_{[g]}[g]\right) = \sum_{[g]\in\mathrm{Conj}(\Delta)} a_{[g]}[g^p]$$

で定まる写像である．このとき Γ_Δ はアーベル群の準同型 $K_1(\mathbb{Z}_p[\Delta]) \to \mathbb{Z}_p[\mathrm{Conj}(\Delta)]$ を定める． $\diamondsuit$

一般の有限群に対しても整対数準同型は定義出来るが，簡単のためここでは有限 p-群に制限した．一般の有限群に対する定義及び整対数準同型写像の諸性質に付いては [Oliver] を参照されたい．

そもそも何故対数写像が有用であるのかという点に立ち返ってみよう; テータ写像というものは本質的に乗法群のノルム写像であり，一般にその像を計算するのは難しい．また，同じアーベル群でも乗法群より加法群の方が，ノルム写像よりトレース写像の方が取り扱いが簡単であることは明らかであろう．したがって「対数写像に依って乗法的アーベル群であるホワイトヘッド群を加法群に変換してしまって，そこでトレース写像の像を決定した後 (これは先に述べた様に比較的簡単に計算出来る)，“指数写像” で元の乗法群にその情報を還元すれば良かろう」という基本戦略が生まれるのである．

ところが，対数写像の像の元は (その冪級数による定義を見てみても分かる様に) 明らかに分母に p の冪乗を含み得る．つまり対数写像で移った先が $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間になってしまうのである（！） そこで **写像の行き先も $\mathbb{Z}_p$-自由加群の範疇に収める** ために $-p^{-1}\varphi(\log(x))$ という補正項を付け加えたものが整対数準同型写像である (このことから “整” 対数準同型の呼称を戴いている).

そうは言っても妙な補正項を付け加えてしまったせいで色々と不都合が出てくるのも事実である．例えば以下のような問題が発生する:

- 定義で用いられている “フロベニウス対応” φ が G 上の p-乗写像に由来しない．

  p-乗写像 は G が非可換な場合はよほどのことがない限り群準同型とはならないので，そのままでは φ という写像が群の写像から誘導されたものであると解釈することが出来ない (即ち log と φ を交換することが出来ない).

  カクデの結果に “特殊型” という妙な条件がつけられている理由は主にこの点に因る．なお，主定理 1.6 (2) で「有限部分 G^f の冪指数が p」という仮定を課している最大の理由の一つは，有限部分の冪指数が p ならば φ が G 上の p-冪写像から誘導されていると素朴に見做すことが出来るからである．

- φ が ノルム写像，トレース写像と可換ではない．

  この点も非常にミステリアスな現象であり,「トレースの像に含まれる」という条件が「合同式」という捻られた条件に変換されてしまう原因となっている．

- Γ_Δ は同型とならない．

[13] $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする (これは p と添加イデアルで生成される)．このとき $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ の乗法的部分群 $1+\mathfrak{m}$ の元 $1+y$ に対して $\log(1+y) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}y^j/j$ と定義する．一般の $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ の元 x に対しては x^{p-1} が $1+\mathfrak{m}$ に含まれることから $\log(x) = (p-1)^{-1}\log(x^{p-1})$ と定義する．

Γ_Δ には核，余核が (大したものではないし構造もよく分かっているが) 存在するため，加法的テータ写像 θ^+ の情報を乗法的テータ写像 θ に「持ち上げる」際に色々と技巧的な工夫が必要とされる．

- 有限群に対してしか Γ_Δ が定義されていない．

  これは射影極限を取れば済むだけの話であるが，射影極限を取る操作は関手として完全では無いので若干注意が必要である．

この様に欠点を挙げ連ねると，本当に整対数準同型写像がテータ写像の構成に於ける最良の道具なのか疑わしく思われるが，それでも写像の行き先がまた $\mathbb{Z}_p$-自由加群になると言うことの利点は非常に大きく，それに比べれば上で挙げた欠点など取るに足らないものなのである．

実は整対数準同型を用いて加法的テータ写像の同型 $\theta^+ \colon \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Conj}(G)]] \xrightarrow{\sim} \Omega$ を乗法的テータ写像に翻訳する際の計算も (上記の様に整対数準同型写像が何かと扱いにくい面を持ち合わせているため) 大分厄介な作業となるのであるが，その辺りの繁雑かつ技巧的な計算をこの報告書に著すことには何ら意義が無いと思われるので，ここでは 主定理 1.6 での設定 ($G \cong G^f \times \Gamma$) に於いてテータ写像を翻訳した後の結果のみを記しておこう．

命題 2.4 ([H2]，[H3])**.** $\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}} \Lambda(U/V)^\times$ の部分群 Ψ を以下の条件を満たす元 $\eta = (\eta_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ の成すものとして定める：

(1) ノルム関係式：各成分 $\eta_{U,V}$ がノルム写像で移り合う．

(2) 合同式

$(G:U) = p^k$ のとき $\eta_{U,V} \equiv \varphi(\eta_{G,[G,G]})^{p^{k-1}} \mod I_{U,V}$ が成立する．ここで φ は G に於ける p-乗写像が $\Lambda(G/[G,G])$ に誘導する環準同型．[14]

このとき θ の像は Ψ と一致する． $\diamondsuit$

注意 12 (整対数準同型写像を用いたテータ写像の構成について)．

1. 上記の合同式の条件は若干強すぎる条件である: 主定理 1.6 (2) の状況では技術的な理由から U の有限部分が位数 p^2 以下の場合にのみ上記のような合同条件をつけ，それ以外のときはより弱い合同条件 ($I_{S,U,V}$ よりも大きな $\mathbb{Z}_p$-加群を法とする合同式) を課せば十分となる．詳細は [H3] を参照されたい．

2. 整対数準同型の非可換岩澤主予想への応用は本研究より前に既にリッター-ヴァイス [RW1]，[RW2]，[RW3] 及び加藤和也 [Kato2] に依って実行されており，カクデの結果 [Kakde] 及び著者の結果 [H2]，[H3] もこれに倣っている．§2.5 も参照のこと． ♦

[14] 主定理の状況では有限部分の冪指数が p であることから，合同式の右辺は自然に $\Lambda(\Gamma)^\times$ の元と見做せるため，この合同式が意味を持つことに注意．

整対数準同型に依ってトレース関係式はノルム関係式にきれいに翻訳されるが,「各成分が $I_{U,V}$ に含まれる」という自然な条件が「各成分 (の p-冪乗) 間の合同式」という非自明な条件 (“捻られた” 形) に翻訳されてしまっている点に注目されたい.

局所化されたテータ写像 θ_S も同じ様な議論を係数環を少し変えて行えば良いだけなので省略しよう (Ψ_S は Ψ と全く同様の特徴付けで定義される).

§ 2.4. 可換 p-進ゼータ関数間の合同式—Step 2

以上で一応テータ写像 θ, θ_S が構成されたので，あとは $(\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ が Ψ_S の元となることさえ示せば，バーンズの手法によって《自動的に》 p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ が構成される．そのためには Ψ_S の構成から $\xi_{U,V}$ 達がノルム関係式及び合同式を満たすことを確認すれば良い．このうちノルム関係式は補間性質 (1.2) に基づく形式的な計算の帰結に過ぎないので，**可換な拡大に対する p-進ゼータ関数達の満たす合同式を調べること** こそが本質的に残された課題となる．

U の G に於ける位数が p の場合は，ドリーニュ-リベット (Deligne-Ribet) のヒルベルト保型形式の理論を用いて合同式を導くことが出来ることをリッター-ヴァイス [RW2] 及び加藤和也 [Kato2] が示している．以下その非常に大雑把な方針を述べよう．ドリーニュとリベットは [DR] に於いて通常のヒルベルト保型形式を用いて議論しているが，所謂 Λ-進保型形式の言葉を用いて解説した方が本質が分かり易いと思うので，ここでは (正確な書き方ではないが) [Kato2] の記述に従って Λ-進保型形式的な説明を試みよう．

総実代数体の可換な拡大 $F_{[G,G]}/F$ 及び F_V/F_U に対する p-進ゼータ関数はヒルベルト-アイゼンシュタイン級数の定数項に現れる (この様な性質を持つ総実代数体のアイゼンシュタイン級数の構成も，本質的にはドリーニュとリベットの仕事 [DR] である):

$$g_{G,[G,G]} = \frac{\xi_{G,[G,G]}}{2^{[F:\mathbb{Q}]}} + \sum_{(\mathfrak{a},\mu)\in P_{G,[G,G]}} \left(\frac{F_{[G,G]}/F}{\mathfrak{a}}\right) q^{\mu}$$

$$g_{U,V} = \frac{\xi_{U,V}}{2^{[F_U:\mathbb{Q}]}} + \sum_{(\mathfrak{b},\nu)\in P_{U,V}} \left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{b}}\right) q^{\mathrm{Tr}_{F_U/F}(\nu)}$$

ここで $\left(\frac{L/K}{-}\right)$ はアーベル拡大 L/K に対するアルティン記号であり，$P_{U,V}$ は F_U の Σ と素な非零整イデアル $\mathfrak{b}$ 及び $\mathfrak{b}$ の元 ν で総正なものの組 $(\mathfrak{b},\nu)$ のなす集合である ($P_{G,[G,G]}$ も同様に定義する)．$P_{U,V}$ には $\mathrm{Gal}(F_U/F)$ が自然に作用する．もし $(\mathfrak{b},\nu)$ が $\mathrm{Gal}(F_U/F)$ の作用で固定されるならば，或る F の整イデアル $\mathfrak{a}$ が一意的に存在し，$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathcal{O}_{F_U}$ かつ $\nu=\mu$ が成り立つ．また，G の有限部分の冪指数が p なので，移送写像 (Verlagerung Homomorphism) と φ が一致し

$$\left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{b}}\right) q^{\mathrm{Tr}_{F_U/F}(\nu)} = \mathrm{Ver}\left(\frac{F_{[G,G]}/F}{\mathfrak{a}}\right) q^{p\mu} = \varphi\left(\left(\frac{F_{[G,G]}/F}{\mathfrak{a}}\right) q^{\mu}\right)$$

が成り立つ．ここでは等式 $\left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{F_U}}\right) = \mathrm{Ver}\left(\frac{F_{[G,G]}/F}{\mathfrak{a}}\right)$ を用いた．また $\varphi(q^{\mu}) = q^{p\mu}$ とおいている．これは $g_{G,[G,G]}$ の $(\mathfrak{a},\mu)$-成分にフロベニウス写像を作用させたものとなっ

ている．他方 $\mathrm{Gal}(F_U/F)$ で固定されない成分に関しては，その $\mathrm{Gal}(F_U/F)$-軌道和が

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_U/F)}\left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{b}^\sigma}\right)q^{\mathrm{Tr}_{F_U/F}(\sigma\nu)}=\left\{\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_U/F)}\sigma^{-1}\left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{b}}\right)\sigma\right\}q^{\mathrm{Tr}_{F_U/F}(\nu)}$$

と計算されるが，右辺の中括弧の中身はまさにトレース写像による $\left(\frac{F_V/F_U}{\mathfrak{b}}\right)$ の像だから，$I_{U,V}$ の定義に依り $I_{U,V}$ を法として 0 と合同となる．

斯くして $\varphi(g_{G,[G,G]})$ と $g_{U,V}$ の非定数項の係数が $I_{U,V}$ を法として全て一致するので，ドリーニュ-リベットに依る q-展開原理に拠ってその合同式が定数項に伝播し，合同式

$$\frac{\varphi(\xi_{G,[G,G]})}{2^{[F:\mathbb{Q}]}}\equiv\frac{\xi_{U,V}}{2^{[F_U:\mathbb{Q}]}}\mod I_{S,U,V}$$

が導かれる．

したがって残る場合は U の G に於ける位数が p より真に大きい場合であり，この取り扱いが主定理 1.6 の証明に於ける最大の難関であった: $(G:U)=p^k$ (但し $k>1$) とおくと，素朴に考えると今回は $\xi_{U,V}$ と $\varphi(\xi_{G,[G,G]})$ の p^{k-1}-乗を比較する必要があるが，当然のことながらアイゼンシュタイン級数 $g_{G,[G,G]}$ を p-冪乗すると非定数項の係数にも定数項 (即ちゼータ関数) の積が入り込んでしまうので，

> アイゼンシュタイン級数の非定数項の係数に現れるアルティン記号を少し変形させてみるだけでドリーニュ-リベットの大理論に拠って自動的に合同式が得られる

等と言う $(G\colon U)=p$ の場合の様な "虫の良い" 展開は最早全く期待出来なくなってしまうのである．

先行研究を振り返ってみると，リッターとヴァイスの結果は最初から拡大次数が p の部分拡大しか扱っていなかったので，このような問題は当然発生していない．では加藤のハイゼンベルグ型拡大及びカクデの特殊半直積型拡大の場合はどうかを見てみると，実は彼らは証明中で集合族 $\mathfrak{F}$ を "巧く" 取ることにより，リッター-ヴァイスの結果と同様に拡大次数が丁度 p の拡大でのみ合同式を調べれば $(\xi_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}}$ が Ψ_S に含まれることが示されるような状況に帰着しているのである．

要するに，先行研究は工夫次第でドリーニュ-リベットの理論から直接合同式を導き出せる様な (合同式の部分だけに注目すれば)〈幸運な〉状況を扱っており,[15] **p-進ゼータ関数の p-冪乗に関する合同式を調べなければならない** と言う現象は主定理 1.6 を証明するに当たって本質的に新しく登場した現象なのである．当然のことながら，今後より複雑な非可換 p-進リー拡大に対して p-進ゼータ関数を構成し主予想を証明するにあたって，この課題は乗り越えねばならないものであった．

[15]言うまでもないが，それぞれの研究では合同式以外の部分で 主定理 1.6 では現れない困難を取り扱っており，他の研究が 主定理 1.6 より簡単であることを意図した記述ではないことを注記しておく．

論文 [H2] 及び [H3] では **帰納的に p-進ゼータ関数を構成する** という戦略に則ってこの難関を回避した: 論文 [H2] (主定理 1.6 (1)) では §2.2 で導入した部分群 N に対して

$$\mathrm{Gal}(F_N/F) = G/N \cong \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Gamma$$

となり，F_N/F は加藤のハイゼンベルク型拡大 (の特別な場合) となっている．したがって $K_1(\Lambda(G/N)_S)$ には加藤が構成した p-進ゼータ関数 $\overline{\xi}$ が存在するので，拡大 F^∞/F の特性元 $f \in K_1(\Lambda(G)_S)$ を $K_1(\Lambda(G/N)_S)$ での像が $\overline{\xi}$ となる様なものに取り替えてバーンズの手法を適用することに依り，p-進ゼータ関数 $\xi_{F^\infty/F}$ を構成することが出来た．

論文 [H3] (主定理 1.6 (2)) ではより抽象的に，G^f の中心元の生成する巡回部分群 $\langle c \rangle$ での剰余を考え，帰納仮定により $K_1(\Lambda(G/\langle c \rangle)_S)$ に存在する p-進ゼータ関数 $\overline{\xi}$ を用いて帰納的に p-進ゼータ関数を構成している．この帰納法は技巧的な部分も色濃く，残念ながらここでその全てを詳らかに紹介することは出来ない．それでもその非常に大雑把な流れを俯瞰すると，

- ドリーニュ-リベットの理論を用いて合同式を〈部分的に〉求める．

  上記のドリーニュ-リベットの理論を用いた手法を用いることで，大体

  $$\xi_{U,V} \equiv c_{U,V} \mod I_{S,U,V} \quad (\text{但し } c_{U,V} \text{ は } \Lambda(\Gamma)_S^\times \text{ の元})$$

  と言う形の合同式を得る．

- 帰納法.

  合同式の両辺の $\langle c \rangle$ での剰余を取って

  $$\overline{\xi}_{\overline{U},\overline{V}} \equiv c_{\overline{U},\overline{V}} \mod \overline{I}_{S,\overline{U},\overline{V}}$$

  を得る．拡大 $F_{\langle c \rangle}/F$ に対する p-進ゼータ関数 $\overline{\xi}$ **は既に構成されており，合同式の情報を持っているので**

  $$\overline{\xi}_{\overline{U},\overline{V}} \equiv \varphi(\overline{\xi}_{\overline{G},[\overline{G},\overline{G}]})^{p^{k-1}} \mod \overline{I}_{S,\overline{U},\overline{V}}$$

  が成り立つとして良い．これを用いて合同式の $c_{U,V}$ の部分を精密化する．

といった流れで議論がなされる．詳細は [H2], [H3] を参照されたい．

§2.5.　現状と展望

現時点では，バーンズのアイデアに端を発しリッター-ヴァイス及び加藤和也に依り推し進められた

- 整対数準同型写像を用いて可換な部分拡大の p-進ゼータ擬測度が満たすべき合同式を導き出して

- ドリーニュ-リベットの理論などを用いてその合同式を証明する

という方針以外で非可換岩澤理論が証明された例は残念ながら存在しないようである．上記のような基本方針は，群の非可換性が少し複雑になっただけでも前半で行った K-群の計算 (特にノルム写像や対数写像の計算) が飛躍的に複雑かつ膨大になるので，複雑な非可換拡大にこの形のまま適用することは途方もなく困難と言わざるを得ない．さらに後半の合同式の導出の段階に於いても，ドリーニュ-リベットの q-展開原理を用いるだけでは最早限界が近づいてきている様に思われる．

上記のような現状に於いて，主定理 1.6 (1) の証明に於いて得られた p-進ゼータ関数の帰納的構成戦略は，ドリーニュ-リベットの q-展開原理だけでは導き出せないと思われた合同式の導出を可能とした新しい手法であり，今後さらなる複雑な p-進リー拡大に対して p-進ゼータ関数を構成する上での一つの突破口になるのではないかと期待している．主定理 1.6 (2) はこの帰納的構成戦略をより積極的に利用することで (1) をかなり広い範囲に一般化し，それでいて途中の (主に K-群の) 具体的な計算を大幅に減らすことが出来た成功例であり，上記の期待を裏付ける結果であると言えよう．当面考えられる課題としては

- 有限部分の冪指数が p より大きい p-拡大に対する p-進ゼータ関数の帰納的構成
- より高次の p-進リー拡大への応用

と言ったものが考えられる．また p-進ゼータ関数の構成問題に於いては現在総実代数体の場合が専ら扱われているが，例えばニコラス・カッツ (Nicolas KATZ) の p-進ゼータ関数を用いて CM 体の場合に似た様な構成が出来ないかを考えるのも興味深い問題であると考える．

また，先にも述べた様にバーンズの手法に基づいた〈K-群の計算と合同式に帰着させる方法〉だけで非可換岩澤理論に取り組むには限界があろうし，何より非可換岩澤理論の本質なり特徴なりがなかなか見えて来ない．可換な場合の理論では例えばコールマン冪級数の理論やオイラー系，ゼータ元などを用いた方法等実に様々な手法で p-進ゼータ関数が構成されているが，非可換岩澤理論に於いてもこれらの類似，或いは全く新しい構成で多角的な方面から非可換 p-進ゼータ関数を構成出来る様になって初めて非可換岩澤理論の内実が顕われてくると言うものであろう．この様なアプローチからの非可換岩澤理論の研究も最近漸く出て来始めたようなので，今後一層の発展が期待される．

さらに，本稿では p-進ゼータ関数の構成のみに焦点を絞って解説したが，p-進ゼータ関数自体が近年漸く構成される様になったという事情も相俟って，その特殊値や解析的性質についてはいまだ謎に包まれた部分が多い．特に非可換岩澤主予想が同変玉河数予想など L-関数の特殊値の予想と密接に関わっていることは [FK] でも指摘されており，非可換岩澤主予想の研究の進展が L-関数の特殊値の研究に大きく寄与するであろうことは明らかな様に思われる．今後はその周辺の研究も進めていけたらと考えている．

References

[Bass] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin (1968).

[BK] Alan Jonathan Berrick and Michael E. Keating, *The localization sequence in K-theory*, K-Theory, **9** (1995) 577–589.

[CFKSV] John Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **101** (2005) 163–208.

[Coates] John Coates, *The main conjectures of non-commutative Iwasawa theory*, 数理解析研究所講究録『代数的整数論とその周辺』**1376**, (2004) 1–5.

[CSS] John Coates, Peter Schneider and Ramdorai Sujatha, *Modules over Iwasawa algebras*, J. of Inst. Math. Jussieu, **2** (2003) no. 1, 73–108.

[DR] Pierre Deligne and Kenneth Alan Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math., **59** (1980) 227–286.

[FK] Takako Fukaya and Kazuya Kato, *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. XII, 1–85 (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006).

[FW] Bruce Ferrero and Lawrence Clinton Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math., **109** (1979) 377–395.

[Greenberg] Ralph Greenberg, *On the structure of certain Galois groups*, Invent. Math., **47**, (1978) no. 1, 85–99.

[原 1] 原 隆，総実代数体の非可換岩澤理論の展開，第 5 回 城崎新人セミナー報告集 (2008) 120–149.

[H2] Takashi Hara, *Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p-extensions*, J. Number Theory, **130**, Issue 4 (2010) 1068–1097.

[H3] Takashi Hara, *Inductive construction of the p-adic zeta functions for non-commutative p-extension of totally real fields with exponent p*, `arXiv:0908.2178v1 [math.NT]`.

[八森] 八森 祥隆，非可換岩澤理論について，第 49 回 代数学シンポジウム報告集 (2005) 22–33.

[HS] Yoshitaka Hachimori and Romyar Thomas Sharifi, *On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules*, J. Algebraic Geom., **14** (2005) 567–591.

[Iwasawa] Kenkichi Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. (2) **98** (1973) 246–326.

[Kakde] Mahesh Kakde, *Proof of the Main conjecture of Noncommutative Iwasawa Theory for Totally Real Number Fields in Certain Cases*, `arXiv:0802.2272v2[math.NT]`.

[加藤 1] 加藤 和也, 非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture, 数理解析研究所講究録『代数的整数論とその周辺』**1376** (2004) 6–12.

[Kato2] Kazuya Kato, *Iwasawa theory of totally real fields for Galois extensions of Heisenberg type*, preprint.

[MR] John Coulter McConnell and James Christopher Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley (1987).

[Oliver] Robert Oliver, *Whitehead groups of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **132** (1988) Cambridge Univ. Press.

[RW1] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *Toward equivariant Iwasawa theory*, Part I, Manuscripta Math., **109** (2002) 131–146, Part II, Indag. Math. (N.S.) **15** (2004)

549–572, PartIII, Math. Ann., **336** (2006) 27–49, Part IV, Homology, Homotopy Appl., **7** (2005) 155-171.

[RW2] Jürgen RITTER and Alfred WEISS, *Congruences between abelian pseudomeasures*, Math. Res. Lett., **15** (2008) no. 4, 715–725.

[RW3] Jürgen RITTER and Alfred WEISS, *Equivariant Iwasawa theory: an example*, Doc. Math., **13** (2008) 117–129.

[Serre1] Jean-Pierre SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann (1967).

[Serre2] Jean-Pierre SERRE, *Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci., Paris, **287** (1978) série A, 183–188.

[Stenström] Bo STENSTRÖM, *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1975).

[谷崎] 谷崎 俊之，非可換環論，岩波書店 (2006).

[Venjakob] Otmar VENJAKOB, *Characteristic elements in non-commutative Iwasawa theory*, J. Reine Angew. Math., **583** (2005) 193–236.

[Wiles] Andrew WILES, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. Second Ser., **131** (1990) no.3, 493–540.