RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 119–127

Generalized Whittaker functions for degenerate principal series of $GL(4,\mathbb{R})$

廣惠一希 (Kazuki Hiroe)
東京大学大学院数理科学研究科
(Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

Abstract

We give a characterization of a generalized Whittaker model of a degenerate principal series representation of $GL(n,\mathbb{R})$ as the kernel of some differential operators. By this characterization, we give examples on $GL(4,\mathbb{R})$. We obtain the dimensions of the generalized Whittaker models and give their basis in terms of hypergeometric functions of one and two variables.

1 Generalized Whittaker models for degenerate principal series of $GL(n,\mathbb{R})$

1.1 Degenerate principal series of $GL(n,\mathbb{R})$

退化主系列表現とその零化イデアルについてここで復習する．$G = GL(n,\mathbb{R})$ として，$G = KAN$ で岩澤分解を以下のように取る．

$$K = O(n), A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

さらに G の Lie 環を $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ とかいて，$U(\mathfrak{g})$ で複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{R}$ の普遍包絡環とする．同様に $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}$ などドイツ文字で A, K などの Lie 環をあらわすことにする．$\Theta = \{n_1,\ldots,n_L\}$ で $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_L = n$ なる非負整数の狭義上昇列を取る．このとき Θ に対応して以下のように標準的な放物型部分群 $P_\Theta \subset G$ が定義される．

$$P_\Theta = \left\{ p = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ * & & g_L \end{pmatrix} \in G \mid g_i \in GL(n_i - n_{i-1},\mathbb{R}) \right\}.$$

Received December 20, 2008. Accepted April 9, 2009.
E-mail: kazuki@ms.u-tokyo.ac.jp

P_Θ の 1 次元表現 $\lambda\colon P_\Theta \to \mathbb{C}^\times$ を以下のように定める．

$$\lambda(p) = |\det(g_1)|^{\lambda_1} \cdots |\det(g_L)|^{\lambda_L}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_L) \in \mathbb{C}^L.$$

このとき G の（spherical）退化主系列表現 $\pi_{\Theta,\lambda}$ は P_Θ の表現 λ から G への誘導表現として次のように定義される．表現空間は

$$C^\infty(G/P_\Theta;\lambda) = \{f \in C^\infty(G) \mid f(gp) = \lambda(p)f(g) \text{ for } (g,p) \in G \times P_\Theta\}$$

であり，G の作用は，

$$\pi_{\Theta,\lambda}(g)f(x) = L_g f(x) = f(g^{-1}x) \text{ for} f \in C^\infty(G/P_\Theta;\lambda), g, x \in G,$$

と定義する．また微分表現によって $U(\mathfrak{g})$ も $C^\infty(G/P_\Theta;\lambda)$ に作用するが，混乱の恐れがない限りこの $U(\mathfrak{g})$ の表現も同じ記号 $\pi_{\Theta,\lambda}$ で表す．

このように定義された退化主系列表現の $U(\mathfrak{g})$ の中での零化イデアルを考えよう．

Definition 1.1 (零化イデアル)**.** 以下のように定義された $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを $\pi_{\Theta,\lambda}$ の零化イデアルと呼ぶ．

$$\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\pi_{\Theta,\lambda}) = \{X \in U(\mathfrak{g}) \mid \pi_{\Theta,\lambda}(X)f \equiv 0, \textit{ for all } f \in C^\infty(G/P_\Theta;\lambda)\}.$$

この零化イデアルの具体的な生成元について以下で考えよう．E_{ij} $(1 \le i,j \le n)$ で $\mathfrak{g} = M(n,\mathbb{R})$ の行列単位とし，$E_{ij}^* \in \mathfrak{g}^*$ でそれらの双対基底とする．$e_i = E_{ii}^*$ $(1 \le i \le n)$ として $\mathfrak{a}^*$ の基底をとる．また非退化双線型形式 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY)$ $X, Y \in \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視し，$\langle\, , \rangle$ で $\mathfrak{a}^*$ に内積を入れる．

以下このノートを通して次のような仮定の下で議論を進める．

$$\lambda_\Theta = \lambda|_{\mathfrak{a}} \text{ は } \textit{regular} \text{ かつ } \textit{dominant} \text{ とする．すなわち，}$$

$$2\frac{\langle \lambda_\Theta + \rho, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \notin \{0, -1, -2, \ldots\} \text{ for } \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}),$$

ここで $\Sigma^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \{e_j - e_i \mid 1 \le i < j \le n\}$，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g})} \alpha \in \mathfrak{a}^*$ とした．この仮定は Theorem 1.2 と Theorem 1.4 が成り立つための十分条件となる（この仮定はさらに弱めることも可能．cf. Theorem 3.12, Theorem 3.21 [5]）．

$\mathbb{E}$ として (i,j) 成分に E_{ij} をもつ $M(n, U(\mathfrak{g}))$ の元を定める．このときよく知られているように $Z_k = \mathrm{tr}(\mathbb{E}^k)$ $(1 \le k \le n)$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$-代数としての生成元となる．すなわち $Z(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$．$U(\mathfrak{g})$ の anti-automorphism を $\iota(X) = -X$, $X \in \mathfrak{g}$ として定める．また $\chi_\lambda\colon Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ で $\pi_{\Theta,\lambda}$ の無限小指標とする．

Theorem 1.2 (大島 [4])**.** $I_\Theta(\lambda) = \iota(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\pi_{\Theta,\lambda}))$ とおくと，以下が成り立つ．

$$I_\Theta(\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U(\mathfrak{g})(\prod_{k=1}^L \mathbb{E} - \lambda_k - n_{k-1})_{ij} + \sum_{k=1}^{L-1} U(\mathfrak{g})(Z_k - \chi_\lambda(Z_k)).$$

1.2 Generalized Whittaker models for degenerate principal series of $GL(n,\mathbb{R})$

$U \subset N$ を閉部分群として (η, V_η) で U の既約ユニタリ表現としよう．さらに以下のような関数空間を考える．

$$C_\eta^\infty(U\backslash G) = \{f\colon G \to V_\eta^\infty \text{ smooth} \mid f(ug) = \eta(u)f(g) \text{ for } (g,u) \in G \times U\}.$$

この空間には G が右移動で作用している．ここで，V_η^∞ は V_η の C^∞ ベクトルのなす空間を表し，V_η^∞ の位相での収束によって $f\colon G \to V_\eta^\infty$ の微分を定めている．$X_{\Theta,\lambda}$ で $C^\infty(G/P_\Theta;\lambda)$ の K 有限ベクトル全体のなす $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$ 加群とする．$X_{\Theta,\lambda}$ の（代数的な）一般 Whittaker 模型とは，$X_{\Theta,\lambda}$ の $C_\eta^\infty(U\backslash G)$ への埋め込みとして定義される．

Definition 1.3 (一般 Whittaker 模型)**.** 以下のような $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$ 準同型の空間を考える．

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(X_{\Theta,\lambda}, C_\eta^\infty(U\backslash G)).$$

この準同型による $X_{\Theta,\lambda}$ の像を $X_{\Theta,\lambda}$ の一般 *Whittaker* 模型と呼ぶ．

Theorem 1.4 ([1])**.** $\lambda^* = (n - n_0 - n_1 - \bar{\lambda}_1, \ldots, n - n_{L-1} - n_L - \bar{\lambda}_L)$ とおく．K 固定元 $f_0 \in X_{\Theta,\lambda}$ をとる．このとき以下の線型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(X_{\Theta,\lambda^*}, C_\eta^\infty(U\backslash G)) & \to & C_\eta^\infty(U\backslash G/K; I_\Theta(\lambda)) \\ W & \mapsto & W(f_0)(g),\ g \in G \end{array}$$

は同型である．ここで

$$C_\eta^\infty(U\backslash G/K; I_\Theta(\lambda)) = \\ \{f\colon G \to V_\eta^\infty \mid f(ugk) = \eta(u)f(g), R_X f \equiv 0 \textit{ for } X \in I_\Theta(\lambda)\}$$

とし，R_X，$X \in \mathfrak{g}$ で右微分，すなわち $R_X f(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(g \exp tX)$，$g \in G$ とした．

Remark 1.5. $I_\Theta(\lambda)$ の生成元は A 型のみに限らず他の古典型単純 *Lie* 環の場合 *([4])* や簡約型の場合 *([5])* にも計算されている．よって $GL(n,\mathbb{R})$ の場合のみでなく，他の場合にも上の定理から一般 *Whittaker* 模型の具体的な計算が可能である．

Remark 1.6. また上記の定理はユニタリ最低ウェイト加群の一般 *Whittaker* 模型を勾配型作用素の核として特徴付ける山下博氏の結果の退化主系列での類似といえる *([7])*．山下氏は同様の定理をより一般の状況で考えており，今 X_{Θ,λ^*} が既約であるとすれば，上記の定理は山下氏の核型定理（*Corollary 1.8 [7]*）と大島氏による退化主系列表現の *Poisson* 変換 *([4])* の結果より従う．

2 Calculs on $GL(4,\mathbb{R})$

定理 1.4 により一般 Whittaker 模型の空間を調べるには $I_\Theta(\lambda)$ から具体的に作られる微分方程式の解を調べればよいことになる．この節で $GL(4,\mathbb{R})$ の場合にこれを用いて一般 Whittaker 模型の空間を具体的に計算してみよう．

$G=GL(4,\mathbb{R})$ とし，極大放物型部分群 $P_k=P_{k,4}$ $(k=1,2)$ を考え，対象とする $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$ 加群 $X_{k,\lambda}$ を $C^\infty(G/P_k;\lambda)$ $(k=1,2)$ の K 有限ベクトルとして取る．目標は

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(X_{k,\lambda},C^\infty_\eta(U\backslash G))\cong C^\infty_\eta(U\backslash G/K;I_k(\lambda))$$

の次元の計算と，右辺の基底を（多変数）超幾何関数で記述することである．しかしこのままでは $U\subset N$ とその表現の η がいくらでも選べてしまうので，ここでは以下の制限を置くことにする．

1. $U\subset N$:　閉部分群，η:　U のユニタリ指標．
2. $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^N\,\eta$ が N の既約ユニタリ表現になる．

この制限の下でまず $C^\infty_\eta(U\backslash G)$ の G 表現としての同型類を分類しよう．

2.1 Classification of $C^\infty_\eta(U\backslash G)$

$\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{n}^*$ の座標を以下のように取っておく．

$$\mathfrak{n}=\left\{n(z,y_1,y_2,x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\x_1&0&0&0\\y_1&x_2&0&0\\z&y_2&x_3&0\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,\dots,z\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\mathfrak{n}^*=\left\{l(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}0&\gamma_1&\beta_1&\alpha\\0&0&\gamma_2&\beta_2\\0&0&0&\gamma_3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\mid \alpha,\dots,\gamma_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

このとき $\mathfrak{n}^*$ の N による余随伴軌道は以下のように分類される．

Proposition 2.1. $\mathfrak{n}^*$ の N による余随伴軌道は以下のとおり．

I．$\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\gamma_2\in\mathbb{R}$ とする．
$\mathcal{O}^I_{\alpha,\gamma_2}=(\mathrm{Ad}^*N)l(\alpha,0,0,0,\gamma_2,0)$，$\dim\mathcal{O}^I_{\alpha,\gamma_2}=4.$

II．$\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_3\in\mathbb{R}$，$\beta_1\neq 0$ あるいは $\beta_2\neq 0$ とする．
$\mathcal{O}^{II}_{\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_3}=(\mathrm{Ad}^*N)l(0,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,0,\gamma_3)$，$\dim\mathcal{O}^{II}_{\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_3}=2.$

III．$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathbb{R}$ とする．
$\mathcal{O}^{III}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}=(\mathrm{Ad}^*N)l(0,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，$\dim\mathcal{O}^{III}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}=0.$

上の余随伴軌道 $\mathcal{O}^I_{\alpha,\gamma_2},\mathcal{O}^{II}_{\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_3},\mathcal{O}^{III}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ に対して，それぞれ $\mathfrak{n}$ の全等方部分代数は以下のように取れる．

I．$\mathfrak{s}_I=\left\{\left(\begin{array}{c|c}0_2&0_2\\\hline *&0_2\end{array}\right)\right\}.$

II ． $\mathfrak{s}_{II} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ z & y_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

III ． $\mathfrak{s}_{III} = \mathfrak{n}.$

$\mathfrak{s}_{(\cdot)}$ を上のように定めた各余随伴軌道に対する全等方部分代数として $S_{(\cdot)} = \exp \mathfrak{s}_{(\cdot)}$ とおく．また，$l(\cdots)$ を軌道の代表元として $l(\cdots)$ を $S_{(\cdot)}$ のユニタリ指標に持ち上げる，

$$\begin{array}{rcc} \chi_{l(\cdots)} : S_{(\cdot)} & \longrightarrow & \mathbb{C}^1 \\ \exp X & \longmapsto & e^{2\pi i l(X)} \end{array} .$$

すると Kirillov の軌道法から N の既約ユニタリ表現の同型類は $\{L^2\text{-Ind}_{S_{(\cdot)}}^N \chi_{l(\cdots)}\}$ でつくされる．したがって，先の条件 1，2 により，さらに我々のやるべきことは $C^\infty_{\chi_{l(\cdots)}}(S_{(\cdot)}\backslash G)$ の G 同型類の分類となる．すなわちそれは，$\chi_{l(\cdots)}$ たちの $N_G(S_{(\cdot)})$ 軌道の分類に帰着される．ここで $N_G(S_{(\cdot)}) = \{g \in G \mid gS_{(\cdot)}g^{-1} \subset S_{(\cdot)}\}$ であり，$\chi_{l(\cdots)}$ への作用は $(x \cdot \chi_{l(\cdots)})(s) = \chi_{l(\cdots)}(x^{-1}sx)$ $(x \in N_G(S_{(\cdot)}), s \in S_{(\cdot)})$ により定義される．

Proposition 2.2. 先の条件 *1*，*2* をみたす $C^\infty_\eta(U\backslash G)$ の G 同型類は以下の通り．*Case(I).* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ かつ $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ とする，このとき

$$C^\infty_{\chi_{l(\alpha,0,0,0,\gamma_2,0)}}(S_{(I)}\backslash G) \cong \begin{cases} C^\infty_{\chi_{l(0,1,1,0,0,0)}}(S_{(I)}\backslash G) & \text{if } \gamma_2 \neq 0, \qquad (I_1) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,1,0,0,0)}}(S_{(I)}\backslash G) & \text{if } \gamma_2 = 0 \qquad (I_2) \end{cases}$$

となる．

Case(II). $\beta_1 \neq 0$ あるいは $\beta_2 \neq 0$ とする．このとき

$$C^\infty_{\chi_{l(0,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,0,\gamma_3)}}(S_{(II)}\backslash G) \cong$$
$$\begin{cases} C^\infty_{\chi_{l(0,0,1,1,0,0)}}(S_{(II)}\backslash G) & \text{if } (\beta_1,\gamma_1)\cdot(\gamma_3,\beta_2) \neq 0, \qquad (II_1) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,0,1)}}(S_{(II)}\backslash G) & \begin{array}{c}\text{if } (\beta_1,\gamma_1)\cdot(\gamma_3,\beta_2) = 0 \\ \text{and } \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0\end{array}, \qquad (II_2) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,0,0)}}(S_{(II)}\backslash G) & \begin{array}{c}\text{if } (\beta_1,\gamma_1)\cdot(\gamma_3,\beta_2) = 0 \\ \text{and } \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0\end{array}, \qquad (II_3) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,0,0,1)}}(S_{(II)}\backslash G) & \begin{array}{c}\text{if } (\beta_1,\gamma_1)\cdot(\gamma_3,\beta_2) = 0 \\ \text{and } \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0\end{array}, \qquad (II_4) \end{cases}$$

となる．ここで $(a,b)\cdot(c,d) = ac + bd$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積.

Case(III). $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}}(N\backslash G) \cong$$

$$\begin{cases} C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,1,1)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0, \gamma_3 \neq 0, \qquad (\textit{III}_1) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,1,0)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0, \gamma_3 = 0, \qquad (\textit{III}_2) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,0,1)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 \neq 0, \qquad (\textit{III}_3) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,0,1,1)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0, \gamma_3 \neq 0, \qquad (\textit{III}_4) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,1,0,0)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \qquad (\textit{III}_5) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,0,1,0)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0, \gamma_3 = 0, \qquad (\textit{III}_6) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,0,0,1)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 \neq 0, \qquad (\textit{III}_7) \\ C^\infty_{\chi_{l(0,0,0,0,0,0)}}(N\backslash G) & \textit{if } \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \qquad (\textit{III}_8) \end{cases}$$

となる．

2.2 $C^\infty_\eta(U\backslash G/K) \cong C^\infty(U\backslash N \times A)$

以上の準備の下で $C^\infty_\eta(U\backslash G/K)$ を超幾何関数を用いて書き下すのだが，そのためには群上の関数を Euclid 空間上の関数にうつして考えなければならない．

そこで先ず冪単 Lie 群に関する以下の事実を思い出そう．

Fact 2.3. *N を単連結冪単 Lie 群とし，$U \subset N$ をその閉部分群とする．このとき滑らかな cross section $\theta\colon U\backslash N \to N$ があって $U \times U\backslash N \ni (u,t) \mapsto u\theta(t) \in N$ は微分同相となる．*

これより以下が成り立つ．

Lemma 2.4. 以下は線型同型．

$$\begin{array}{rccc} \Xi\colon & C^\infty_\eta(U\backslash G/K) & \xrightarrow{\sim} & C^\infty(U\backslash N \times A) \\ & f & \longmapsto & F(t,a) = f(\theta(t)a). \end{array}$$

この線型写像によって $C^\infty(U\backslash N \times A)$ への $U(\mathfrak{g})$ の作用を次のように入れる．

$$X \cdot F := \Xi(R_X f), \quad X \in U(\mathfrak{g}).$$

$U\backslash N$ も A も Euclid 空間と同相であるので上の写像 Ξ の像を考えることによって，問題は Euclid 空間上の微分方程式を解くことに帰着された．

2.3 Main theorem

Theorem 2.5 ([1])**.** $\Xi(C^\infty_{\chi_{l(\cdots)}}(S_{(\cdot)}\backslash G/K; I_k(\lambda)))$ は以下の図のように書ける．

図の各列 $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{III}_8$ は Proposition 2.2 の分類に対応している．また各行について，1 行目は基底となる関数の形をあらわし，2 行目は関数空間の次元，3 行目は関数のなかで無限遠での増大条件をみたすもの達のなす部分空間 (正確な定義は [1] の Section 4 を参照) の次元である．

(i) $k=1$ とする．

	I_1	I_2	II_1	II_2	II_3	II_4	III_1	III_2	III_3	III_4	III_5	III_6	III_7	III_8
basis	0	$\mathfrak{MB}$	0	0	$\mathfrak{MB}$	$\mathfrak{MB}$	0	0	0	0	$\mathfrak{MB}$	$\mathfrak{MB}$	$\mathfrak{MB}$	x^α
dim	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	2	4
$\dim^{growth}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	4

$\mathfrak{MB}$ は基底が変形 *Bessel* 関数で書ける事をあらわし，x^α は指数関数で書ける事をあらわす.

(ii) $k=2$ とする．

	I_1	I_2	II_1	II_2	II_3	II_4	III_1	III_2	III_3	III_4	III_5	III_6	III_7	III_8
basis	$\mathfrak{H}_{10}$	$\mathfrak{MB}+\mathfrak{MB}$	0	$\mathfrak{MB}\times\mathfrak{MB}$	$(x^\alpha+x^\beta)\mathfrak{MB}$	$(x^\alpha+x^\beta)\mathfrak{MB}$	0	0	$\mathfrak{MB}\times\mathfrak{MB}$	0	$(x^\alpha+x^\beta)\mathfrak{MB}$	$\mathfrak{MB}+\mathfrak{MB}$	$(x^\alpha+x^\beta)\mathfrak{MB}$	x^α
dim	4	4	0	4	4	4	0	0	4	0	4	4	4	6
$\dim^{growth}$	1	2	0	1	2	2	0	0	1	0	2	2	2	6

ここで $\mathfrak{H}_{10}$ は基底が *Horn* の超幾何関数（*Appendix* 参照）で書ける事をあらわす.

Remark 2.6. 増大条件を満たす関数は G の連続表現としての埋め込みによって定まる一般 *Whittaker* 模型に対応している．これらは保型形式の *Fourier* 展開係数などと密接に関係している．

Remark 2.7. I_1, II_1, III_1 は，一般 *Gelfand-Graev* 表現への埋め込みに対応しており，上記の結果は山下氏の連続な一般 *Whittaker* 模型に対する一般論 *([6])* の実例となっている．また代数的な一般 *Whittaker* 模型に対しても松本久義氏の結果 *([3])* より復元される．

一方，I_1, II_1, III_1 以外は許容的（*cf. Section 1.2 [2]*）とは限らない一般 *Whittaker* 模型に対応しており，それらに対しても模型の有限次元性が成立していることは興味深い事実のように思える．

3 Appendix

Horn の超幾何関数 $\mathbf{H}_{10}$ の性質を少し述べておく．Horn の超幾何関数 $\mathbf{H}_{10}$ とは以下の収束冪級数によって定義される 2 変数関数である．

$$\mathbf{H}_{10}(a,d\,;\,x,y)=\sum_{m=0,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}}{(d)_m m!n!}x^m y^n.$$

ここで $(a)_m$ は Pochhammer の記号をあらわす．すなわち，$(a)_m=a(a+1)\cdots(a+(m-1))$ $(a\in\mathbb{C},m\in\mathbb{N})$. この無限級数は以下の連立偏微分方程式を満たすことが簡単に確かめることができる．

$$\begin{aligned}\{x(2\vartheta_x-\vartheta_y+a)(2\vartheta_x-\vartheta_y+a+1)-\vartheta_x(\vartheta_x+d-1)\}\phi(x,y)=0,\\ \{y-\vartheta_y(2\vartheta_x-\vartheta_y+a)\}\phi(x,y)=0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

ここで $\vartheta_x=x\frac{\partial}{\partial x},\vartheta_y=y\frac{\partial}{\partial y}$.

この連立偏微分方程式は完全積分可能であり，解空間の次元は 4 であることも容易に確かめられる．以下に無限級数による解空間の基底を列挙しておく．

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{10}(a,d\,;\,x,y)\\ y^{-d+1}\mathbf{H}_{10}(a-2d+2,-d+2\,;\,x,y),\\ x^a\tilde{\mathbb{H}}_{10}(a,d\,;\,x,x^2y),\\ x^a y^{-d+1}\tilde{\mathbb{H}}_{10}(a-2d+3,-d+2\,;\,x,x^2y).\end{gathered}$$

ここで

$$\tilde{\mathbb{H}}_{10}(a,d\,;\,x,y)=\sum_{m=0,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+2n}}{(a+1)_{m+2n}(d)_n m!n!}x^m y^n.$$

として新しい収束冪級数を定義した．上の偏微分方程式系 (3.1) は以下のような Mellin-Barnes 型の積分表示を持つ解を持つ．

$$\phi(x,y)=\int_{\sigma_1-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma_1+\sqrt{-1}\infty}\int_{\sigma_2-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma_2+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(s_1)\Gamma(s_1-2s_2-a)\Gamma(s_2)\Gamma(s_2-d+1)(-x)^{-s_1}y^{-s_2}\,ds_1\,ds_2.$$

ここで $\sigma_1\in\mathbb{R}$，$\sigma_2\in\mathbb{R}$ は以下を満たす．$\sigma_1>0$，$\sigma_2>\max\{0,\mathrm{Re}(d-1)\}$，$\sigma_1-2\sigma_2>\mathrm{Re}(a)$.

References

[1] Hiroe, K.:Generalized Whittaker functions of degenerate principal series of $GL(4,\mathbb{R})$. preprint.

[2] Lynch, T.: Generalized Whittaker vectors and representation thoery. Thesis M.I.T. (1979).

[3] Matumoto, H.: Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators. Acta Math. 161 (1988), no. 3-4, 183–241.

[4] Oshima, T.: Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras. Harmonic analysis, group representations, automorphic forms and invariant theory, 277–319, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 12, World Sci. Publ., 2007.

[5] Oda, H; Oshima, T.: Minimal polynomials and annihilators of generalized Verma modules of the scalar type. J. Lie Theory 16 (2006), no. 1, 155–219.

[6] Yamashita, H.: On Whittaker vectors for generalized Gel'fand-Graev representations of semisimple Lie groups. J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986), no. 2, 263–298.

[7] Yamashita, H.: Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules. Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations. Astérisque No. 273 (2001), 81–137.