RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 111–118

PRINCIPAL SERIES WHITTAKER FUNCTIONS ON THE REAL SYMPLECTIC GROUP OF RANK 2

長谷川泰子（東京大学大学院数理科学研究科）

Abstract. In this paper, we give explicit formulas of Whittaker function with peripherical K-type for even principal series representation on $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. An explicit integral expression is given for each moderate growth Whittaker function.

§ 1. Introduction

Langlands 型の Eisenstein 級数の Fourier 展開を考える時に，実リー群上の大域的な Whittaker 関数を考察することは重要である．

保型形式の Fourier 展開において Whittaker 関数は重要な役割を果たす．p 進体上の不分岐主系列表現の Whittaker 関数の明示公式は Casselman-Shalika [CS] によって与えられている．一方で実数体上の Whittaker 関数については，階数の低い群に対していくつかの結果がある．ここでは実 2 次シンプレクティック群 $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ 上の Whittaker 関数について考える．極小放物型部分群から誘導された主系列表現の Whittaker 関数は Ishii [I] によって極小 K-type のみにおける結果が得られている．また，離散系列表現の場合には Oda [O], Jacobi 極大放物型部分群から誘導された一般型主系列表現の場合には Miyazaki-Oda [MO] によって Whittaker 関数の明示公式が得られている．残りの Siegel 極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現の Whittaker 関数は Hasegawa によって部分的な結果が得られている．そこで我々はこの場合の完全な解決を目指して，主系列表現の Whittaker 関数の明示的公式を完全に与えることを目的とする．

G の表現 π の K-type を (τ, V_τ) とする．dominant weight $l = (l_1, l_2)$ を用いて，$\tau_l = \mathrm{Sym}^{l_1 - l_2} \otimes \det^{l_2}$ と表わされる．Ishii によって K-type $\tau_{(0,0)}, \tau_{(-1,-1)}$ と $\tau_{(1,1)}$ を持つ主系列表現の Whittaker 関数の明示的公式が得られている．そこで本稿では K-type $\tau_{(l,l)} (l \in \mathbb{Z})$ を持つ Whittaker 関数の明示的公式を与える．その為には Whittaker 関数の K-type を動かす作用素が必要となる．この作用素は Maass shift operator と呼ばれ，G. J. Heckman [HO] と E. M. Opdam [OP] や T. Koornwinder [K] によって導入された．

本稿では § 2 で $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ とその部分群，Lie 環の構造を言及し，主系列表現を定義する．§ 3 では Whittaker 関数の定義を行う．§ 4 では Whittaker 関数が満たす微分方程式系を完全に与える．§ 5 では § 4 の微分方程式系の確定特異点の周りでの形式的べき級数解を明示する（Theorem B and Theorem C）．§ 6 では moderate growth Whittaker 関数の積分表示を明示する（Theorem D）．

Received December 16, 2008. Accepted May 12, 2009.

§ 2 Principal series representations

2.1. Groups and algebras. G を実 2 次シンプレクティック群とする．

$$G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t g J_2 g = J_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cartan involution $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ （$g \in G$）の fixed part は

$$K = \{ g \in G \mid \theta(g) = g \} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, A, B \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \cong \mathrm{U}(2)$$

となり，これは G の極大コンパクト群である．

G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) = \{ X \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \mid JX + {}^t X J = 0 \}$$

となる．θ の微分も同じ記号 θ で表わすと，$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\theta(X) = -{}^t X$ が得られる．ここで，部分空間

$$\mathfrak{p} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X \} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \,\middle|\, {}^t A = A, {}^t B = B; A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$$

と

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{ X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X \} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \,\middle|\, A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}); {}^t A = -A, {}^t B = B \right\} \end{aligned}$$

は Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を与える．

$1 \le i, j \le 2$ において，$E_{i,j}$ を (i,j) 番目を 1 で他が 0 となる行列単位とする．さらに，$H_i = E_{i,i} - E_{2+i,2+i}$ と置く．$\mathfrak{a} = \mathbb{R} \cdot (H_1 + H_2)$ と定義する．ここで，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環となる．

$$A = \exp \mathfrak{a} = \{ a(a_1, a_2) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_i > 0 \}$$

$$N = \left\{ n(n_0, n_1, n_2, n_3) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -n_0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & n_1 & n_2 \\ & 1 & n_2 & n_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) \,\middle|\, n_i \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，A，N はそれぞれ G の極大 split torus，極大べき単部分群であり，岩澤分解 $G = NAK$ を得る．$\{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \}$ を 2-dimensional Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ の標準基底とする．ここで $e_i \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ は $e_i(H_j) = \delta_{i,j}$ となる

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のルート系を $\Psi = \{ \pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm e_1, \pm e_2 \}$ で与える．Positive system を $\Psi_+ = \{ 2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2 \}$ で与える．さらに，$\mathfrak{g}_\alpha$ の生成元 E_α を

$$\begin{aligned} E_{2e_1} &= \begin{pmatrix} 0_2 & E_{11} \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad E_{e_1+e_2} = \begin{pmatrix} 0_2 & E_{12} + E_{21} \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \\ E_{2e_2} &= \begin{pmatrix} 0_2 & E_{22} \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad E_{e_1-e_2} = \begin{pmatrix} E_{12} & 0_2 \\ 0_2 & -E_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置く．$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Psi_+} \mathbb{C} E_\alpha$ とする．

$n(n_0, n_1, n_2, n_3) \in N$ に対して，N のユニタリ指標 η を取る．

$$\eta(n(n_0, n_1, n_2, n_3)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(c_0 n_0 + c_3 n_3)).$$

但し，$c_0, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．本稿では η は非退化であると仮定する．すなわち，$c_0 c_3 \neq 0$ とする．よって，$c_0 = c_3 = 1$ を仮定しても一般性を失わない．この時 $\mathfrak{g}$ は岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}$ を与える．

K の中の A の centralizer M は次で与えられる．

$$M = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}\}.$$

よって，G の極小放物型部分群 P は Langlands 分解 $P = NAM$ を持つ．

2.2. Principal series representations. M の既約ユニタリ指標 σ は $\gamma_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1, 1)$，$\gamma_2 = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1)$ における値 $\{\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)\}$ で決まる．$\sigma_i \in \widehat{M}$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} &\sigma_0(\gamma_1) = \sigma_0(\gamma_2) = 1, &&\sigma_1(\gamma_1) = \sigma_1(\gamma_2) = -1,\\ &\sigma_2(\gamma_1) = 1, \sigma_2(\gamma_2) = -1, &&\sigma_3(\gamma_1) = -1, \sigma_3(\gamma_2) = 1. \end{aligned}$$

$\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$ を $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2$ と，$\nu(t_1 H_1 + t_2 H_2) = \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2$ $(t_i \in \mathbb{R})$ によって同一視し，A の擬指標 e^ν を $e^\nu(a) = \exp(\nu(\log a)) = a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2}$ $(a = a(a_1, a_2))$ によって定める．ここで，ν_1, ν_2 と $\nu_1 \pm \nu_2$ は整数でないことを仮定する．

Definition. 極小放物型部分群 $P = NAM$ から G への誘導表現

$$\pi = \mathrm{Ind}_P^G(1_N \otimes e^{\nu+\rho} \otimes \sigma)$$

を G の主系列表現と呼ぶ．*i.e.* π は空間 $H_{\nu,\sigma}$ の完備化上の G の右正則表現となっている．但し，$\rho = (2, 1)$ は制限正ルートの半分和とする．ここで，

$$H_{\nu,\sigma} = \left\{ f : G \to V_\sigma \text{ smooth} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(mang) = \sigma(m) e^\nu(a) f(g) \\ \text{on } m \in M, a \in A, g \in G \end{array} \right\}$$

であり，$H_{\nu,\sigma}$ はノルム

$$\|f\|^2 = \int_K \|f(k)\|_\sigma^2 dk$$

を用いて完備化される．ここで，V_σ は表現 σ の表現空間であり，$\|\cdot\|_\sigma$ はそのノルムを表している．

$\sigma = \sigma_0$ または $\sigma = \sigma_1$ の時，π を G の *even* 主系列表現と呼ぶ．$\sigma = \sigma_2$ または $\sigma = \sigma_3$ の時，π を G の *odd* 主系列表現と呼ぶ．

2.3. K-type of the principal series representation. (τ, V_τ) を π の K-type とする．最高 weight 理論によって，K の既約表現は dominant weights によって特徴づけられる．$L^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in L^+$ に対する表現を $\tau_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \otimes \det^{\lambda_2}$ とする．表現空間 V_λ の次元は $\dim V_{\tau_\lambda} = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$ である．

Lemma ([MO], p.9, Proposition 3.2). *(a)(i)* $\sigma = \sigma_0$ *のとき*，$\tau_{l,l}$ *(l is even)* は π の中で重複度 *1* に現れる．さらに，*minimal* K*-type* は $\tau_{(0,0)}$ となる．
(ii) $\sigma = \sigma_1$ *のとき*，$\tau_{(l,l)}$ *(l is odd)* は π の中で重複度 *1* に現れる．さらに，*minimal* K*-type* は $\tau_{(1,1)}$ と $\tau_{(-1,-1)}$ となる．
(b) $\sigma = \sigma_2$ または $\sigma = \sigma_3$ *のとき*，$\tau_{(l+1,l)}$ は π の中で重複度 *1* に現れる．*minimal* K*-type* は $\tau_{(1,0)}$ と $\tau_{(0,-1)}$ となる．

3. Whittaker function

2 つの組 (N,η) は上で定義されたものとする．$C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$ の表現空間は

$$C_\eta^\infty(N\backslash G)=\{f\in C^\infty(G)\mid f(rg)=\eta(r)f(g),(r,g)\in N\times G\}$$

という空間で与えられる．右変換により，$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ は滑らかな G-加群で，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群の下で同じ記号を用いる ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}$ の複素化)．任意の有限次元 K-加群 (τ,V_τ) に対し，

$$\begin{aligned}&C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)\\ &=\{\varphi:G\longrightarrow V_\tau,C^\infty\mid\varphi(rgk)=\eta(r)\tau(k^{-1})\varphi(g),(r,g,k)\in N\times G\times K\}\end{aligned}$$

と定義する．G の岩澤分解 $G=NAK$ によって，関数 $\varphi\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ は A への制限 $\varphi|_A$ で決まる．

(τ,V_τ) の反傾表現を (τ^*,V_{τ^*}) とし，$V_{\tau^*}\times V_\tau$ の canonical pairing を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と表す．次の関係が得られる．

$$\iota(v^*)(g)=\langle v^*,\varphi_\iota(g)\rangle,\quad v\in V_{\tau^*},g\in G.$$

これは $\iota\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta))$ と $\varphi_\iota\in C_{\eta,}^\infty(N\backslash G\ /K)$ の同形を定義する．

G の既約許容表現 (π,H_π) とその K-type τ^* に対して，K-準同形 $i\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,\pi|_K)$ を固定する．

$$\mathcal{I}_{\eta,\pi}=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(\pi,C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta))$$

を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群 π と $C^\infty\mathrm{Ind}_{N_0}^G(\eta)$ との絡作用素で，全ての K-有限ベクトルたちから成っているものとする．それぞれの $T\in\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ に対して, $T_i\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ の元を

$$T(i(v^*))(g)=\langle v^*,T_i(g)\rangle,\quad v^*\in V_{\tau^*},g\in G$$

によって取る．

Definition. 部分空間

$$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)=\bigcup_{i\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,\pi|_K)}\left\{T_i\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)\mid T\in\mathcal{I}_{\eta,\pi}\right\}$$

を (π,η,τ) に関する $C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ の *Whittaker* 関数の空間と呼ぶ．さらに $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^0$ を $\mathcal{I}_{\eta,\tau}$ の絡作用素のうち $C_\eta^\infty(N\backslash G)$ の中でが緩増加な関数全体とする．そして，

$$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)^{\mathrm{mod}}=\bigcup_{i\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,\pi|_K)}\left\{T_i\in\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)\mid T\in\mathcal{I}_{\eta,\pi}^0\right\}$$

を $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ と同様に定義する．$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)^{\mathrm{mod}}$ の元を緩増加 *Whittaker* 関数と呼ぶ.

4. Holonomic system

本節では Whittaker 関数を特徴付ける 2 つの微分方程式を明示する．この微分方程式は[MO], p.28, Theorem 10.1 に明記されている．以下では座標 $y=(y_1,y_2)=(a_1/a_2,a_2^2)$，記号 $\partial_i=y_i(\partial/\partial y_i)$, $i=1,2$ を用いる．

Theorem. $\Phi^{(l,l)}(y)=y_1^2y_2^{3/2}\varphi^{(l,l)}(y_1,y_2)$ を *highest weight* (l,l) のスカラー K-*type* を持つ *Whittaker* 関数とする．この時，$\varphi^{(l,l)}(y_1,y_2)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\Big\{\partial_1^2+2\partial_2^2-2\partial_1\partial_2-(2\pi y_1)^2-2(2\pi y_2)^2-2l(2\pi y_2)\Big\}\varphi^{(l,l)}=\frac{1}{2}(\nu_1^2+\nu_2^2)\varphi^{(l,l)}$$

と

$$\begin{aligned}&\Big[(\partial_1+l+1)(\partial_1-l-1)(\partial_1-2\partial_2+l+1)(\partial_1-2\partial_2-l-1)\\&+(2\pi y_1)^4-2(2\pi y_1)^2\big\{(\partial_1+1)(\partial_1-2\partial_2+1)-l(l+2)\big\}\\&+4l(2\pi y_1)^2(2\pi y_2)-4(2\pi y_2)(2\pi y_2+l)(\partial_1+l+1)(\partial_1-l-1)\Big]\varphi^{(l,l)}\\&=\big\{\nu_1^2-(l+1)^2\big\}\big\{\nu_2^2-(l+1)^2\big\}\varphi^{(l,l)}.\end{aligned}$$

以下 even 主系列表現の場合を取り扱う．

5. Formal power serie solutions

[MO] によって与えられた Whittaker 関数の満たす微分方程式系は $(y_1,y_2)=(0,0)$ において正規交叉する二つの divisor $y_1=a_1/a_2=0$, $y_2=a_2^2=0$ に沿った確定特異性を持つ．よって，$(y_1,y_2)=(0,0)$ の周りで次のように定義される解が存在する．K-type $\tau_{(l,l)}$ $(l\in\mathbb{Z})$ の Whittaker 関数を $\Phi^{(l,l)}(y)$ とすると

$$\Phi^{(l,l)}(y)=y_1^2y_2^{3/2}\sum_{m,n\ge 0}a_{m,n}^{(l,l)}(2\pi y_1)^{m+\tau_1}(4\pi y_2)^{n+\tau_2}. \tag{5.1}$$

Lemma. 特性根 (τ_1,τ_2) は次の集合の元で与えられる．

$$\begin{aligned}&\Lambda=\{w(\nu_1,\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2))\mid w\in W\cong\mathfrak{S}_2\ltimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\}\\&=\big\{(\varepsilon_1\nu_1,\frac{1}{2}(\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2)),(\varepsilon_2\nu_2,\frac{1}{2}(\varepsilon\nu_1+\varepsilon_2\nu_2))\mid\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\big\}.\end{aligned}$$

但し，W は *Weyl* 群である．

次に Whittaker 関数 $\Phi^{(l,l)}(y)$ の明示公式を与える．

Theorem A. $\sigma=\sigma_0$ または $\sigma=\sigma_1$，ν_1, ν_2, $\nu_1+\nu_2\notin\mathbb{Z}$ とする．この時 $l\in\mathbb{Z}$ に対し (5.1) の *Whittaker* 関数 $\Phi^{(l,l)}(y)$ のべき級数解の係数 $a_{m,n}^{(l,l)}$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{aligned}a_{m,n}^{(l+2,l+2)}&=(2m+\tau_1+l+1)a_{m,n-1}^{(l,l)}+a_{m-1,n}^{(l,l)}\\&+(2m+\tau_1+l+1)(2n-2m-\tau_1+2\tau_2+l+1)a_{m,n}^{(l,l)}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}a_{m,n}^{(l-2,l-2)}&=2(2m+\tau_1-l-1)a_{m,n-1}^{(l,l)}+a_{m-1,n}^{(l,l)}\\&+(2m+\tau_1-l-1)(2n-2m-\tau_1+2\tau_2-l-1)a_{m,n}^{(l,l)}.\end{aligned}$$

Theorem B. $\sigma=\sigma_0$, ν_1, ν_2, $\nu_1\pm\nu_2\notin\mathbb{Z}$ とする．この時，*even* K*-type* $\tau_{(2k,2k)}$ ($k\in\mathbb{Z}$) の *Whittaker* 関数 $\Phi^{(2k,2k)}(y)$ の係数 $a_{m,n}^{(2k,2k)}$ は次のようになる．

$$a_{m,n}^{(2k,2k)}=\sum_{\substack{(i,j)\\0\le i+j\le|k|\\m-i,n-j:even}}2^{2k-2i-j}a_{m-i,n-j}^{(0,0)}\binom{|k|}{i}\binom{|k|-i}{j}$$
$$\times\left(\frac{2m+\tau_1+1}{2}\right)_{|k|-i}\left(\frac{-2m-\tau_1+2n+2\tau_2}{2}+i+1\right)_{|k|-i-j}.$$

但し，

$$a_{m,n}^{(0,0)}={}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}-n,m+\frac{\tau_1}{2}+1,-m-\frac{\tau_1}{2}\\ \frac{\tau_1}{2}+1,\tau_2-\frac{\tau_1}{2}+1\end{matrix}\right|1\right)$$
$$\times\frac{1}{m!n!(\tau_1-\tau_2+1)_m(\tau_2+1)_n2^{2m+\tau_1+2n+2\tau_2}}.$$

Theorem C. $\sigma=\sigma_1$, ν_1, ν_2, $\nu_1\pm\nu_2\notin\mathbb{Z}$ とする．*odd* K*-type* $\tau_{(2k+1,2k+1)}$ ($k\in\mathbb{Z}$) の *Whittaker* 関数 $\Phi^{(2k+1,2k+1)}(y)$ の係数 $a_{m,n}^{(2k+1,2k+1)}$ は次のようになる．$k\ge 0$ のとき

$$a_{m,n}^{(2k+1,2k+1)}=\sum_{\substack{(i,j)\\0\le i+j\le k\\m-i,n-j:even}}2^{2k-2i-j}a_{m-i,n-j}^{(1,1)}\binom{k}{i}\binom{k-i}{j}$$
$$\times\left(\frac{2m+\tau_1+1}{2}\right)_{k-i}\left(\frac{-2m-\tau_1+2n+2\tau_2+1}{2}+i\right)_{k-i-j};$$

$k\le 0$ のとき

$$a_{m,n}^{(2k+1,2k+1)}=\sum_{\substack{(i,j)\\0\le i+j\le|k|\\m-i,n-j:even}}2^{2|k|-2i-j}a_{m-i,n-j}^{(-1,-1)}\binom{|k|}{i}\binom{|k|-i}{j}$$
$$\times\left(\frac{2m+\tau_1+1}{2}\right)_{|k|-i}\left(\frac{-2m-\tau_1+2n+2\tau_2+1}{2}+i\right)_{|k|-i-j}.$$

但し，

$$a_{m,2t}^{(1,1)}=a_{m,2t}^{(-1,-1)}={}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}-t,m+\frac{\tau_1}{2}+\frac{1}{2},-m-\frac{\tau_1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{\tau_1}{2}+\frac{1}{2},\tau_2-\frac{\tau_1}{2}+\frac{1}{2}\end{matrix}\right|1\right)$$
$$\times\frac{1}{m!t!(\tau_1-\tau_2+1)_m(\tau_2+1)_t2^{2m+\tau_1+2t+2\tau_2}},$$

$$a_{m,2t+1}^{(1,1)}=-a_{m,2t+1}^{(-1,-1)}={}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}-t,m+\frac{\tau_1}{2}+\frac{3}{2},-m-\frac{\tau_1}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{\tau_1}{2}+\frac{3}{2},\tau_2-\frac{\tau_1}{2}+\frac{3}{2}\end{matrix}\right|1\right)$$
$$\times\frac{2(2m+\tau_1+1)}{(\tau_1+1)(2\tau_2-\tau_1+1)m!t!(\tau_1-\tau_2+1)_m(\tau_2+1)_t2^{2m+\tau_1+2t+2\tau_2}}.$$

ここで，*Pochhammer* 記号，すなわち $(a)_i=\Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ を使っている．また一般型超幾何関数の記号

$${}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}a,b,c\\d,e\end{matrix}\right|z\right)=\sum_{j\ge0}\frac{(a)_j(b)_j(c)_j}{(d)_j(e)_j}\cdot\frac{z^j}{j!}$$

も使っている．

6. Moderate growth Whittaker function

本節では緩増加 Whittaker 関数の明示公式を与える．

Theorem ([I], p.15, Theorem 3.2). $(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{C}^2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
W^{(0)}(y) &= y_1^2 y_2^{3/2}(\pi y_1)^{\nu_1/2}(\pi y_2)^{-\nu_1/2} \\
&\times \int_0^\infty\int_0^\infty K_{\nu_1/2}\big(2\pi y_1\sqrt{1+x+y}\big)K_{\nu_2/2}\big(2\pi y_2\sqrt{(1+1/x)(1+1/y)}\big) \\
&\times \left(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\right)^{\nu_1/4}\left(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\right)^{\nu_2/4}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}
\end{aligned}
$$

と定義する．すると，$W^{(0)}$ は定数倍を除いて $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau_{(0,0)})^{\mathrm{mod}}|_A$ の元に一意に定まり，

$$
\begin{aligned}
W^{(0)}(y) &= 4y_1^2y_2^{3/2}\int_0^\infty\int_0^\infty K_{(\nu_1-\nu_2)/2}\big(2\pi t_1/t_2\big)K_{(\nu_1+\nu_2)/2}\big(2\pi t_1t_2\big) \\
&\times \exp\left\{-\pi\left(\frac{y_1^2y_2}{t_1^2}+\frac{t_1^2}{y_2}+\frac{y_2}{t_2^2}+y_2t_2^2\right)\right\}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}
\end{aligned}
$$

という積分表示がある．

Theorem D. $W^{(k)}(y)$ を $W^{(0)}(y)$ において *K-type* $\tau_{k,k}$ を持つ緩増加 *Whittaker* 関数とする．全ての $k\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
W^{(k)}(y) &= \int_0^\infty\int_0^\infty K_{(\nu_1-\nu_2)/2}\big(2\pi t_1/t_2\big)K_{(\nu_1+\nu_2)/2}\big(2\pi t_1t_2\big) \\
&\times \exp\left\{-\pi\left(\frac{t_1^2}{y_2}+\frac{y_1^2y_2}{t_1^2}+t_2^2y_2+\frac{y_2}{t_2^2}\right)\right\}P_k(t_2,t_2,y_1,y_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.
\end{aligned}
$$

但し，

$$
\begin{aligned}
P_k(t_1,t_2,y_1,y_2) &= \sum_{\substack{(i,j)\\ 0\le i+j\le |k|}}\sum_{\delta=0}^{|k|-i}\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le|k|-i-j}(-1)^{\beta+\gamma+\delta}\frac{(1/2)_{|k|}}{(1/2)_{\delta+|k|}}\binom{|k|-i}{\delta} \\
&\times \frac{(|k|-i-j)!(j+1/2+\beta+\gamma)_{|k|-i-j-\alpha-\beta-\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!(|k|-i-j-\alpha-\beta-\gamma)!}\binom{|k|}{i}\binom{|k|-i}{j} \\
&\times 2^{2|k|-2i-j}\big(t_1^2/y_2\big)^{i+\alpha}\big(y_1^2y_2/t_1^2\big)^{i+\delta}\big(t_2^2y_2\big)^{\frac{j}{2}+\gamma}\big(y_2/t_2^2\big)^{\frac{j}{2}+\beta}.
\end{aligned}
$$

References

[CS] W. Casselman and J. Shalika, *The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function*, Compositio Math. **41** (1980), 207–231.

[HO] G. J. Heckeman and E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I, II*, Compositio Math. **64** (1987), 329–352.

[I] T. Ishii, *On principal series Whittaker functions on* $Sp(2,\mathbb{R})$, J. Funct. Anal. **225** (2005), 1–32.

[J] H. Jacquet, *Fonctions de Whittaker associeés aux groupes de Chevalley*, Bull. Soc. Math. France **95** (1967), 243–309.

[K] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent differential operators, I-IV*, Indag. Math. **36** (1974), 48–66 and 358–381.

[N] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups An Overview Based on Examples*, Princto Mathematical Series 36, Princeton Univ. Press, 1986.

[L] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 544, Springer-Verlag, Berlin-New york, 1976.

[MO] T. Miyazaki, T. Oda, *Principal series Whittaker functions on* $Sp(2,\mathbb{R})$*,-Explicit formulae of differential equations-*, Proceedings of the 1993 Workshop, Automorphic Forms and Related Topics, The Pyungsan Institute for Mathematical Sciences, 59–92.

[N] S. Niwa, *Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on* $Sp_2(\mathbb{R})$, Proc. Japan Acad **71 Ser A** (1995), 189–191.

[O] T. Oda, *The standard* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules of* $Sp(2,\mathbb{R})$ *I-The case of principal series-*, preprint.

[OP] E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions III, IV*, Compositio Math. **67** (1988), 191–209.

[PBM] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series*, vol. 3, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.

[PK] R. B. Paris and D. Kaminski, *asymptotics and Mellin-Barnes integrals, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 85, Cambridge University Press, 2001.

[S] E. Stade, $\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$*-Whittaker functions and* ${}_4F_3(1)$ *hypergeometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. **336 (1)** (1993), 253–264.

[W] G. Warner, *Harmonic analysis on Semi-Simple Lie Groups*, vol. I, II, Springer-Verlag, New York, 1972.

Yasuko Hasegawa
Graduate school of mathematical sciences,
University of Tokyo,
3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo, 153-8914 Japan
E-mail address: hasegawa@ms.u-tokyo.ac.jp