RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 95–102

LINEAR VISIBLE ACTIONS

ATSUMU SASAKI

Abstract. Let V be a vector space over $\mathbb{C}$ and K a connected compact Lie group acting on V linearly. In [12, 13], we showed that the induced representation of K on the polynomial ring $\mathbb{C}[V]$ is multiplicity-free if and only if the linear K-action on V is strongly visible. In this note, we focus on four pairs $(K, V) = (Sp(n), \mathbb{C}^{2n})$, $(Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$, $(Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$, and $(G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$, which are new examples of strongly visible actions. We explain how to find a real vector space S which meets every K-orbit in V.

This note is a survey of the author's paper [12].

1. 導入

連結な複素簡約リー群 $G_\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に線型に作用しているとする．このとき，自然に多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上に $G_\mathbb{C}$ の表現 π が

$$(\pi(g)f)(v) = f(g^{-1}v)$$

によって定義される $(f \in \mathbb{C}[V], v \in V, g \in G_\mathbb{C})$．$K$ を $G_\mathbb{C}$ のコンパクトな実型とする．2006 年の RIMS 研究集会[1] および 2007 年の RIMS 研究集会[2] では，次の定理が成り立つことを紹介した．

定理 1.1. 次の 2 条件は同値である．

(i) 表現 $(\pi, \mathbb{C}[V])$ は $G_\mathbb{C}$ の無重複表現である[3]．
(ii) K の V への線型作用は強可視的である．

ここで，強可視的作用とは複素多様体に対して次で定義される概念である．

定義 1.2 ([5, Definition 3.3.1])**.** リー群 G の複素多様体 D への正則な作用が次の 2 条件を満たすとき，この作用を**強可視的**であるという：

(a) D の実部分多様体 S が存在して，$D' = G \cdot S$ は D の開集合である．
(b) D' の反正則微分同相 σ が存在して，$\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし，かつ σ は D' 内の各 G-軌道を保存する．

上の 2 条件を満たす実部分多様体 S を**スライス**という．スライス S は自然に全実部分多様体となる ([5, Remark 3.3.2])．強可視的作用は，[4, Definition 2.3] の意味で‘可視的’である ([5, Theorem 4])．

Received December 21, 2008. Accepted June 18, 2009.
[1]「表現論と等質空間上の解析学」2006 年 8 月．
[2]「群の表現と等質空間上の調和解析」2007 年 9 月．
[3]このとき，$(G_\mathbb{C}, V)$ を無重複空間と呼んでいる．

近年，強可視的作用の研究はエルミート対称空間 [7] や旗多様体 [6] など，様々な設定において行われている．本講究録では，複素多様体として $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V を扱う．

(i) を満たす $(G_{\mathbb{C}}, V)$ は Kac [3] (V への作用が既約な場合)，Benson–Ratcliff [1], Leahy [9] (V への作用が可約な場合) によって分類された．定理 1.1 の (i) $\Rightarrow$ (ii) は，分類表にある各 $(G_{\mathbb{C}}, V)$ に対してスライス S と反正則微分同相 σ を具体的に構成することで示される．一方，定理 1.1 の (ii) $\Rightarrow$ (i) は，無重複性の伝播定理によって一般的に示される．

本講究録では，定理 1.1 の (i) を満たす $(G_{\mathbb{C}}, V)$ で作用が既約な場合を扱い，その分類をスライスの構成の立場から整理する．また，次の 4 つの $(G_{\mathbb{C}}, V)$ について，コンパクトな実型 K の作用によるスライス S の構成法を具体的に解説する：

$$\begin{aligned}(G_{\mathbb{C}}, V) =&(Sp(n,\mathbb{C}), \mathbb{C}^{2n}),\ (Spin(7,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^8),\\ &(Spin(9,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^{16}),\ (G_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^7).\end{aligned}$$

特に，S は $K \cdot S$ が V に一致するものを選べることを見る．その証明には，球面における作用の推移性を用いる (詳しくは §3 参照)．

なお，本講究録は [12] の一部を要約したものである．

2. 既約な場合の 3 つの TYPE

以下，定理 1.1 の (i) を仮定し，$G_{\mathbb{C}}$ の V への作用が既約な場合を考える．Weyl のユニタリ・トリックによって，$G_{\mathbb{C}}$ の V への作用はコンパクトな実型 K の V への作用と 1 : 1 に対応する．よって，コンパクトリー群との組 (K, V) で表すことにする．

2.1. まず，K の V への作用の強可視性がエルミート対称空間における研究 [7] に帰着できる場合を Type 1 とする．

Type 1. コンパクトリー群 K の V への線型作用が，(必要ならば K を局所同型なものに取り替えて) ある非コンパクトな既約エルミート対称空間 $M = G/K$ (G は非コンパクトな単純リー群で K を極大コンパクト部分群として含む) の点 $o = eK \in M$ における K の等方表現として実現できる．

Type 1 に属する (K, V) は $(SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$，$(SU(n) \times \mathbb{T}, S^2(\mathbb{C}^n))$，$(SU(n) \times \mathbb{T}, \bigwedge^2(\mathbb{C}^n))$，$(Spin(10) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$，$(E_6, \mathbb{C}^{27})$ である．

エルミート対称空間 $M = G/K$ における可視的作用の研究は [7] で行われ，接空間 T_oM 上の K の等方表現は [5, Theorem 18] で強可視的であることが示されている．

(K, V) が Type 1 のとき，スライス S はその次元が M の階数 (= G の実階数) に一致するものを選ぶことができる．

例 2.1. $(K, V) = (SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}, M(m, n; \mathbb{C}))$ とする．$K \approx S(U(m) \times U(n))$ の V における作用は，$M = G/K = SU(m, n)/S(U(m) \times U(n))$ に対する等方表現として実現される．実際に，$G = SU(m, n)$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m, n)$ のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(K) + \mathfrak{p}$ とすると，$T_oM \simeq \mathfrak{p} \simeq V$ である．接空間 T_oM 上の K の等方表現を $\mathfrak{p}$ 上の随伴表現と同一

視する．$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を 1 つ選ぶと，$\mathfrak{p} = K \cdot \mathfrak{a}$ が成り立ち，よって $\mathfrak{a}$ はこの作用におけるスライスとなる[4]．スライスの次元は $\dim \mathfrak{a} = \mathbb{R}\text{-rank}\, G = \text{rank}\, G/K$ である．

2.2. 次に，コンパクトリー群 K が $U(p) \times Sp(q)$ と局所同型，$V = M(p, 2q\,; \mathbb{C})$ の形で与えられる場合を Type 2 とする．

Type 2. (K, V) が次のいずれかの場合である[5]：

(i) $(U(2) \times Sp(n), M(2, 2n\,; \mathbb{C}))$ $(n \geq 2)$.
(ii) $(U(3) \times Sp(n), M(3, 2n\,; \mathbb{C}))$ $(n \geq 2)$.
(iii) $(U(m) \times Sp(2), M(m, 4\,; \mathbb{C}))$ $(m \geq 4)$.

スライス S はその次元は (i); 3 次元，(ii); 5 次元 $(n = 2)$，6 次元 $(n \geq 3)$，(iii); 6 次元となるものを選ぶことができる (cf. [12, Section 4]).

2.3. 既約な (K, V) の分類のうち，Type 1 にも Type 2 にも属さない次の 4 つを Type 3 とする[6]：

$$(Sp(n), \mathbb{C}^{2n}),\ (Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8),\ (Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16}),\ (G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7). \tag{2.1}$$

Type 3 において，スライスの構成は " 単位球面における推移的作用 " が鍵となる．

W を内積 $(\cdot, \cdot)_W$ をもつ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．また，$S(W)$ を内積 $(\cdot, \cdot)_W$ に関する W 内の単位球面を表すとする．

Type 3. 次の条件 (T) を満たすコンパクトリー群 K_i と $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 W_i の列 $(K_1, W_1) \supset (K_2, W_2) \supset \cdots$ を抽出することで，スライスを構成することができる：

(T) K_i は W_i 内の単位球面 $S(W_i)$ に推移的に作用する $(i = 1, 2, \ldots)$.

3. 準備

Type 3 の解説に入る前に，いくつかの準備が必要である．

3.1. まず，次のよく知られた補題を用意する．

補題 3.1. コンパクトリー群 G が W に線型に作用するという設定の下で，G が単位球面 $S(W)$ に推移的に作用するとき，$v_1 \in S(W)$ を選んで $W = G \cdot \mathbb{R}v_1$ と分解される．

コンパクトリー群 G の v_1 における等方部分群を G_{v_1} で表す．補題 3.1 の設定の下で，$W_1 = (\mathbb{R}v_1)^{\perp}$ を W における $\mathbb{R}v_1$ の直交補空間とする．コンパクトリー群 G は W の複素化 $W_{\mathbb{C}} = W + \sqrt{-1}W$ に対角に作用する．

[4] この場合，σ として V の標準的な複素共役写像を選ぶことができる．Type 1 において，定義 1.2 を満たす反正則微分同相 σ の存在は [7, Lemma 2.4] で示されている．

[5] $p \geq 4, q \geq 3$ とするとき，$\mathbb{C}[M(p, 2q\,; \mathbb{C})]$ 上の $GL(p, \mathbb{C}) \times Sp(q, \mathbb{C})$ の表現 π は無重複表現ではない．

[6] [11] では，Type 3 を $(Spin(9), \mathbb{C}^{16})$ とそれ以外に分けた ([11] ではそれぞれ Case 4，Case 2 と名付けた)．後者は，K-軌道空間が Type 1 に属するある (K, V) における軌道空間と一致するという解釈を与えている．例えば，$\mathbb{C}^8$ における $(Spin(7) \times \mathbb{T})$-軌道空間は，$(SO(8) \times \mathbb{T})$-軌道空間と一致する．

補題 3.2. 補題 3.1 の設定の下で，等方部分群 G_{v_1} が単位球面 $S(W_1)$ に推移的に作用するならば，$v_2 \in S(W_1)$ を選んで

$$W_{\mathbb{C}} = G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2))$$

と分解される．

Proof. 等方部分群 G_{v_1} が単位球面 $S(W_1)$ に推移的に作用することより，補題 3.1 から $W_1 = K_{v_1} \cdot \mathbb{R}v_2$ と分解される．よって，

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{C}} &= G \cdot \mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus W_1) \\ &= G \cdot \mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus G_{v_1} \cdot \mathbb{R}v_2) \\ &= G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2)). \end{aligned}$$

□

次の補題は補題 3.2 と同様に証明される．

補題 3.3. 補題 3.1 の設定の下で，$W_1 = (\mathbb{R}v_0)^{\perp}$ が次の 3 条件を仮定する．

(a) 等方部分群 G_{v_1} の W_1 への作用は可約で，2 つの G_{v_1}-不変な部分空間 W_2, W_3 の直和に分解される．
(b) 等方部分群 G_{v_1} は単位球面 $S(W_2)$ に推移的に作用する．
(c) $v_2 \in S(W_2)$ を 1 つ選び，v_2 における G_{v_1} の等方部分群を G_{v_1,v_2} とするとき，G_{v_1,v_2} は $S(W_3)$ に推移的に作用する．

このとき，$v_3 \in S(W_3)$ を選んで

$$W_{\mathbb{C}} = G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3))$$

と分解される．

下の表は，コンパクトリー群 K が単位球面 $S(W)$ に推移的に作用するような組 (G, W) の例である (cf. [10, 2])．

G	W	$S(W)$
$SU(n)$	$\mathbb{C}^n$	S^{2n-1}
$Sp(n)$	$\mathbb{C}^{2n}$	S^{4n-1}
$Spin(7)$	$\mathbb{R}^8$	S^7
$Spin(9)$	$\mathbb{R}^{16}$	S^{15}
G_2	$\mathbb{R}^7$	S^6

TABLE 1. $S(W)$ に推移的に作用するコンパクトリー群 K

3.2. 次に，1 次元トーラス $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ における $\mathbb{C}^n$ の作用を考えよう．任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して，$R(v), I(v) \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ v の実部，虚部を表す．このとき，$v \in \mathbb{C}^n$ は $v = R(v) + \sqrt{-1}I(v)$ と一意的に表される．

補題 3.4. 任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して，$R(\alpha v)$ と $I(\alpha v)$ の $\mathbb{R}^n$ 上の内積 $(R(\alpha v), I(\alpha v))$ が 0 となる $\alpha \in \mathbb{T}$ が存在する．

Proof. $\alpha = e^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{T}$ を任意に選ぶ．$s = (\|R(v)\|^2 - \|I(v)\|^2)/2,\ t = (R(v), I(v))$ とおく (ただし，$\|v\|^2 := (v, v)$) と，

$$(R(\alpha v), I(\alpha v)) = \sqrt{s^2 + t^2}\sin(2\theta + \eta)$$

を満たす $\eta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が存在する．よって，θ として $-\eta/2$ を選べばよい． □

4. Type 3 におけるスライスの構成

Type 3 におけるスライスの構成法を解説しよう．条件 (T) を用いる回数およびそれに伴い適用する補題によって，(2.1) で挙げた 4 つの (K, V) を次のように分ける：

	(K, V)	補題
(1)	$(Sp(n), \mathbb{C}^{2n})$	補題 3.1
(2)	$(Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$ と $(G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$	補題 3.2 + 補題 3.4
(3)	$(Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$	補題 3.3 + 補題 3.4

4.1. Type 3 (1). $K = Sp(n)$，$V = \mathbb{C}^{2n}$ とする．$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{2n}$ を $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底とする．$Sp(n)$ は $S(\mathbb{C}^{2n}) = S^{4n-1}$ に推移的に作用するので，補題 3.1 により次の定理が成り立つ．

定理 4.1. S を 1 次元のベクトル空間 $S = \mathbb{R}\vec{e}_1$ とする．このとき，$V = K \cdot S$ と分解される．また，S は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の複素共役写像に関してスライスとなり，よってこの作用は強可視的である．

注意 4.2. $(K, V) = (U(n), \mathbb{C}^n)$ は，$U(n) \simeq S(U(n) \times U(1))$，$\mathbb{C}^n = M(n, 1; \mathbb{C})$ と見ることで Type 1 に属する (cf. 例 2.1).

一方，$U(n)$ は $S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$ に推移的に作用するので (cf. Table 1)，補題 3.1 を適用することで 1 次元のスライスを構成することができる．よって，Type 3 (1) にも属すると考えられる．

なお，それぞれの方法で得られたスライスは (同型を除いて) 一致する．

4.2. Type 3 (2). Type 3 (1) は，単位球面 $S(V)$ にコンパクトリー群 K が推移的に作用することを用いてスライスを構成した (条件 (T) を 1 回用いた)．一方，Type 3 (2) および (3) は，コンパクト群 K は $S(V)$ には推移的に作用しないが，V の実型 W 内の単位球面 $S(W)$ に推移的に作用することが分かる．

この節では，$(K, V) = (Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$ の場合に S を構成しよう．$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_8$ を $\mathbb{C}^8$ の標準基底とする．

定理 4.3. S を 2 次元のベクトル空間 $S = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2$ とする．このとき，$V = K \cdot S$ と分解される．

S の構成の鍵は，コンパクトリー群と単位球面の部分列

$$(Spin(7), S(\mathbb{R}^8)) \supset (G_2, S(\mathbb{R}^7))$$

を補題 3.2 に適用することである (条件 (T) を 2 回用いる).

Proof. 次の事実

(4.1a) $Spin(7)$ は $S(\mathbb{R}^8) = S^7$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

(4.1b) $\vec{e}_1$ における $Spin(7)$ の等方部分群は G_2 と同型である.

(4.1c) G_2 は $S(\mathbb{R}^7) = S^6$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

によって，補題 3.2 を適用することができる．よって，$\mathbb{C}^8$ は $Spin(7)$ の作用によって

$$\mathbb{C}^8 = Spin(7) \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2)) \tag{4.2}$$

と分解される.

次に，V の任意の元 v をとる．補題 3.4 によって $\alpha \in \mathbb{T}$ で $R(\alpha v)$ と $I(\alpha v)$ の $\mathbb{R}^8$ における標準内積が 0 となるものを選ぶことができる．この $\alpha \in \mathbb{T}$ に対して，$v' = \alpha v$ とおく．分解 (4.2) にしたがって $v' \in V$ は

$$v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(r_3\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2))$$

と表すことができる ($\exists g \in Spin(7), \exists r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$).

もし $r_1 = 0$ のとき，$v' \in \sqrt{-1}\mathbb{R}^8$ である．補題 3.1 によって $\sqrt{-1}\mathbb{R}^8 = Spin(7)\cdot\sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2$ と分解されるので,

$$v = \alpha^{-1}v' \in K \cdot \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2 \subset K \cdot S.$$

一方，$r_1 \neq 0$ とする．$Spin(7)$ は $SO(8)$ の部分群であるから $\mathbb{R}^8$ 上の標準内積を保存する．よって,

$$0 = (R(v'), I(v')) = (r_1\vec{e}_1, r_3\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2) = r_1 r_3$$

となる．ゆえに $r_3 = 0$ となり，$v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}r_2\vec{e}_2)$ となる．したがって,

$$v = \alpha^{-1}(g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}r_2\vec{e}_2)) \in K \cdot S.$$

以上より，$V \subset K \cdot S$ が示された．逆の包含関係は明らかである． □

定理 4.3 で述べた 2 次元のベクトル空間 S に対して，定義 1.2 の (b) を満たす反正則微分同相 σ が存在する．よって，この作用は強可視的である[7].

$(K, V) = (G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$ の場合も同様にして，部分列

$$(G_2, S(\mathbb{R}^7)) \supset (SU(3), S(\mathbb{C}^3))$$

を用いて 2 次元のスライスを構成することができる.

[7] 証明は [12, Lemmas 5.9, 5.10] を参照．なお，[12] では $\mathbb{C}^8$ を複素ケーリー代数 $\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ として，$Spin(7)$ を実ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ 上の線型同型群の部分群として実現して，S と σ を記述している．G_2 は $\mathfrak{C}$ の自己同型群として，$\mathbb{C}^7$ は $\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ の (ケーリー代数として) の虚部として実現している.

4.3. Type 3 (3). 最後に，$(K,V)=(Spin(9)\times\mathbb{T},\mathbb{C}^{16})$ のときにスライスを構成しよう．$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{16}$ を $\mathbb{C}^{16}$ の標準基底とする．

定理 4.4. S を3次元の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $S=\mathbb{R}\vec{e}_1+\sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_2+\mathbb{R}\vec{e}_9)$ とする．このとき，$V=G\cdot S$ と分解される．

S の構成の鍵は，コンパクトリー群と単位球面の部分列

$$(Spin(9),S(\mathbb{R}^{16}))\supset(Spin(7),S(\mathbb{R}^{8}))\supset(G_2,S(\mathbb{R}^{7}))$$

を補題 3.3 に適用することである．

Sketch of Proof. 次の事実

(4.3a) $Spin(9)$ は $S(\mathbb{R}^{16})=S^{15}$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

(4.3b) $\vec{e}_1$ における $Spin(9)$ の等方部分群は $Spin(7)$ と同型である．

(4.3c) $Spin(7)$ の $\mathbb{R}^{16}$ の作用は可約で $\mathbb{R}^8\oplus\mathbb{R}^8$ に分裂する．

と §4.2 で述べた事実 (4.1a)–(4.1c) を用いる．補題 3.3 より

$$\mathbb{C}^{16}=Spin(9)\cdot(\mathbb{R}\vec{e}_1+\sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_1+\mathbb{R}\vec{e}_2+\mathbb{R}\vec{e}_9))$$

と分解される．また，補題 3.4 を用いて $\mathbb{T}$ の作用を考慮すると，$(Spin(7)\times\mathbb{T},\mathbb{C}^8)$ の場合と同様の議論によって $V\subset K\cdot S$ が示される． □

定理 4.4 で述べた S に対して，定義 1.2 の (b) を満たす反正則微分同相 σ が存在する[8]．よって，この作用は強可視的である．

以上で，Type 3 の場合がすべて示された．

References

[1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.

[2] A. Borel, Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 1378–1380.

[3] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.

[4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.

[5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p)\times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

[8][12] では $\mathbb{C}^{16}$ を複素ケーリー代数 $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}$ の部分空間として，$Spin(9)$ を例外型コンパクト単純リー群 F_4 の部分群として実現して，S と σ を記述している．

[7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform, Groups* **12** (2007), 671–694.

[8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, math.RT/0607004.

[9] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.

[10] D. Montgomery and H. Samelson, Transformation groups of spheres, *Ann. of Math.* **44** (1943), 454–470.

[11] 笹木集夢, 既約な multiplicity-free 空間における可視的作用, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B7** : *Representation theory and analysis on homogeneous spaces* (editor: H. Sekiguchi) (2008), 83–99.

[12] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009), 3445–3466.

[13] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2010), doi: 10.1093/imrn/rnq100.

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-8555 Japan.

E-mail address: atsumu@aoni.waseda.jp