RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 57–69

不変式環における zeta 多項式と微分作用素の関係について

(Relation between zeta polynomials and differential operators on some invariant rings)

東京大学大学院数理科学研究科 奥田 隆幸 (Takayuki Okuda)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

Abstract

The zeta polynomials for linear codes were introduced by Iwan M. Duursma in 1999. For some self-dual codes over $\mathbb{F}_q$, we observe that all zeros of the zeta polynomials are arranged on the same circle in the complex plane (this phenomenon is called a Riemann Hypothesis Analogue).

We consider Type IV extremal cases. Duursma proved that when the length $\equiv 0 \pmod 6$, all zeros of the zeta polynomial are arranged on the same circle (Duursma 2003). In this paper, we show that when the length $\equiv -2 \pmod 6$, the same is true.

1 概要

線形符号が自己双対 (self-dual) であるとき，その weight enumerator (2 変数斉次多項式) は，MacWilliams 変換と呼ばれる変換で不変である．Weight enumerator を形式的に 2 変数斉次多項式として捉え，MDS-weight enumerator の一次結合で表示し，その係数を使って zeta 多項式と呼ばれる 1 変数多項式を定義すると，MacWilliams 変換での不変性は，ある種の関数等式として書ける．特に zeta 多項式の零点は，複素平面上で，ある原点中心の円に関して対称に存在する．

さらに weight enumerator がいくつかの条件を満たすとき，zeta 多項式の全ての零点が，その円周上に乗ることが知られている (この現象はリーマン仮説類似と呼ばれている)．しかし，条件によっては，零点が円周上に乗ると予想されているが，まだ証明されていないものもある．

特に weight enumerator が Type IV extremal (各偶数 length に 1 つ存在) という

Received December 18, 2008. Accepted May 28, 2009.

形の場合に，length が 6 の倍数という状況では，予想が成り立つことが示されていた (Duursma 2003) が，そのほか (6 の倍数でない偶数 length) では未解決であった.

今回の報告では，length が “6 の倍数 − 2” の場合に，予想が肯定的に証明されたことを紹介したい.

2 符号の weight enumerator

まず，今回の話題と関連する部分の，符号の理論を紹介する.

$\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間 $(\mathbb{F}_q)^n$ に対して，weight と距離を次のように定義する.

定義 2.1. $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in(\mathbb{F}_q)^n$ に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}\ (w) &:= \sharp\{i|w_i\neq 0\}.\\ d(v,w) &:= \mathrm{wt}\ (v-w)\quad (v,w\in(\mathbb{F}_q)^n).\end{aligned}$$

この距離 d によって $(\mathbb{F}_q)^n$ は距離空間となる.

定義 2.2 (線形符号)**.** $(\mathbb{F}_q)^n$ の線形部分空間 $\mathcal{C}$ を線形符号 (符号) と呼ぶ. n を符号 $\mathcal{C}$ の length，$\mathcal{C}$ の部分空間としての次元を符号 $\mathcal{C}$ の次元と呼び,

$$d_{\mathcal{C}} := \min_{v,w\in\mathcal{C},v\neq w} d(v,w) = \min_{w\in\mathcal{C}\setminus\{0\}} \mathrm{wt}\ (w)$$

(ただし，$\mathcal{C}=\{0\}$ の時は $d_{\mathcal{C}}=n+1$ としておく) を，符号 $\mathcal{C}$ の最小距離と呼ぶ. Length が n，次元が k，最小距離が d の符号を $[n,k,d]$-code と呼ぶ.

Length n に対して，次元 k，最小距離 d が大きいものほど “良い” 符号とされるが，両立には限界がある.

定理 2.1 (The Singleton bound)**.** [9, p.33, Theorem 11]. 符号 $\mathcal{C}$ が $[n,k,d]$-code なら $n+1\geq k+d$.

この bound の等号が成立する符号 (すなわち $[n,n+1-d,d]$-code) を, MDS (maximum distance separable) code と呼ぶ.

符号に対して，その双対を次のように定義する.

定義 2.3 (dual code, self-dual code)**.** $(\mathbb{F}_q)^n$ の対称 2 次形式として $(v,w):=\sum_{i=1}^{n} v_i\cdot w_i$

とする．符号 $\mathcal{C}$ に対して

$$\mathcal{C}^{\perp} := \{w \in (\mathbb{F}_q)^n | (v,w) = 0 \quad {}^{\forall} v \in \mathcal{C}\}$$

とすれば，$\mathcal{C}^{\perp}$ も符号となる (一般には補空間にはならない)．これを $\mathcal{C}$ の dual code と呼ぶ．

$\mathcal{C}$ が $[n,k,d]$-code なら，$\mathcal{C}^{\perp}$ の length は n で，次元は $n-k$ であるが，最小距離は (n,k,d) だけからは決まらない．

特に $\mathcal{C}^{\perp} = \mathcal{C}$ となる符号を self-dual code と呼ぶ．$\mathcal{C}$ が self-dual な $[n,k,d]$-code のとき，$\mathcal{C}^{\perp}$ の次元は $n-k$ であるから，$n = 2k$ となる．

MDS-code の双対は MDS-code であることが知られている．すなわち

定理 2.2. [9, p.318, Theorem 2]. $\mathcal{C}$ が MDS-code $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}^{\perp}$ が MDS-code.

定義 2.4 (weight enumerator)**.** $[n,k,d]$-code $\mathcal{C}$ に対して，その weight enumerator を

$$W_{\mathcal{C}}(x,y) := \sum_{w \in \mathcal{C}} x^{n-\mathrm{wt}(w)} y^{\mathrm{wt}(w)}$$

とする．すなわち $A_i := \sharp\{w \in \mathcal{C} | \text{ wt } (w) = i\} \quad (i = 0, \ldots, n)$ とおけば

$$W_{\mathcal{C}}(x,y) = x^n + \sum_{i=d}^{n} A_i x^{n-i} y^i.$$

Weight enumerator は，符号に関するすべての情報を持っている訳ではないが，次のことが知られている．

定理 2.3 (The MacWilliams identity)**.** [9, p.146, Theorem 13]. $\mathcal{C}$ が $[n,k,d]$-code のとき

$$W_{\mathcal{C}^{\perp}}(x,y) = \frac{1}{q^k} \cdot W_{\mathcal{C}}(x + (q-1)y, x-y).$$

特に $\mathcal{C}$ が self-dual なら

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}}(x,y) &= \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}} \cdot W_{\mathcal{C}}(x + (q-1)y, x-y) \\ &= W_{\mathcal{C}}\left(\frac{x+(q-1)y}{\sqrt{q}}, \frac{x-y}{\sqrt{q}}\right). \end{aligned}$$

従って，ある符号の weight enumerator が，この等式を満たさない場合，そのことから，この符号が self-dual でないことが結論として得られる (逆は成り立たない)．

更に MDS $[n,k,d]$-code の weight enumerator は，次のように書けることが知られている．

定理 2.4 (MDS weight enumerator)**.** [9, p.320, Theorem 6] 及び [8, p.2555, Lemma 2.3].

$$M_{n,i,q}(x,y) := \begin{cases} x^n + (q-1)[T^{n-i}]\frac{(xT+y(1-T))^n}{(1-T)(1-qT)} & (1 \leq i \leq n) \\ x^n & (i = n+1) \end{cases}$$

(ここで分数部分は T の形式的べき級数とし，$[T^{n-i}](a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots) := a_{n-i}$ としている) とおくと，$\mathcal{C}$ が MDS $[n,k,d]$-code のとき

$$W_{\mathcal{C}}(x,y) = M_{n,d,q}(x,y)$$

となる．$M_{n,d,q}(x,y)$ のことを MDS-weight enumerator と呼ぶ.

3 リーマン仮説類似

$q \in \mathbb{N}, q \neq 1$ を固定する.

符号に対して定義されていた weight enumerator を，次のように形式的に一般化する.

定義 3.1 (weight enumerator)**.** $\mathbb{C}_n[x,y]$ を x,y の 2 変数 n 次斉次多項式全体のなすベクトル空間とする．$\mathbb{C}_n[x,y]$ の元 $F(x,y)$ を length $= n$ の weight enumerator と呼び,

$$F(x,y) = a_0x^n + a_dx^{n-d}y^d + a_{d+1}x^{n-d-1}y^{d+1} + \cdots + a_ny^n$$

(ただし $a_d \neq 0$ とし，a_0はどのような数であってもよいとする) と書ける場合に，最小距離 d_F を $d_F = d$ と定義する.

以下, weight enumerator と言うと，特に断らない限り，上記の形式的な意味で捉える事とする.

定義 3.2 (self-dual な weight enumerator)**.** Weight enumerator に対する MacWilliams 変換を

$$\sigma_q := \tfrac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

として定義する (ただし $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot F(x,y) := F(ax+by, cx+dy)$ とする). $\sigma_q \cdot F(x,y) = F(x,y)$ となるとき，$F(x,y)$ は formally self-dual な weight enumerator という (以下，self-dual な weight enumerator とよぶ).

特に，self-dual な符号の weight enumerator は，この意味でも self-dual になっている.

MDS-weight enumerator を

$$M_{n,i,q}(x,y) := \begin{cases} x^n + (q-1)[T^{n-i}]\frac{(xT+y(1-T))^n}{(1-T)(1-qT)} & (1 \leq i \leq n) \\ x^n & (i = n+1) \end{cases}$$

(ここで分数部分は T の形式的べき級数とし，$[T^{n-i}](a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots) := a_{n-i}$ としている) としていた.

このとき次の命題が成り立つ.

命題 3.1. [8, p.2556, Lemma 2.4]. $i = 1, \dots, n+1$ に対して，

$$\sigma_q \cdot M_{n,i,q}(x,y) = q^{\frac{n+2-2i}{2}} M_{n,n+2-i,q}(x,y).$$

($M_{n,n+1,q} := x^n$ としているのは，命題 3.1 を成り立たせるためである.)

また，$d_{M_{n,i,q}} = i \ \ (i < n+1)$ であることから，$\{M_{n,1,q}, \dots, M_{n,n+1,q}\}$ は，各 n ごとに $\mathbb{C}_n[x,y]$ の基底をなす.

そこで，$\mathbb{C}_n[x,y]$ の元である weight enumerator に対して，MDS-weight enumerator を使って，次のように zeta 多項式を定義する.

定義 3.3 (zeta 多項式)**.** length $= n$ の weight enumerator である $F(x,y)$ に対して

$$F(x,y) = p_d M_{n,d,q}(x,y) + p_{d+1} M_{n,d+1,q}(x,y) + \\ \cdots + p_n M_{n,n,q}(x,y) + p_{n+1} M_{n,n+1,q}(x,y)$$

と書けるとき，zeta 多項式 $P_F(T)$ を

$$P_F(T) := p_d + p_{d+1}T + \cdots + p_n T^{n-d}$$

とする (p_{n+1} は用いない).

注意. 後述の関数等式とも関係するが，$F(x,y)$ が self-dual なら，命題 3.1 より，

$$p_i = 0 \Leftrightarrow p_{n+2-i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

が成り立つため，“self-dual かつ最短距離が 2 以上” のものに対しては，p_{n+1} は常に 0 である．

例 (zeta 多項式の計算例)．$q=2$ とするとき

$$F(x,y) := x^8 + 14x^4y^4 + y^8$$

とすれば

$$F(x,y) = \frac{1}{5}(M_{8,4,2}(x,y) + 2M_{8,5,2}(x,y) + 2M_{8,6,2}(x,y))$$

なので

$$P_F(T) = \frac{1}{5}(1 + 2T + 2T^2).$$

さて，2 変数多項式 $F(x,y)$ から 1 変数多項式 $P_F(T)$ を定義したのであるが，特に $F(x,y)$ が self-dual (MacWilliams 変換で不変) であるとき，この不変性は zeta 多項式に次の関数等式として翻訳される．

定理 3.2 (関数等式 (Duursma 1999 [4]))**.** $F(x,y)$ は self-dual であるとする．$g := \frac{1}{2}(n - 2d_F + 2)$ とすると

$$\deg P_F(T) = 2g = n - 2d_F + 2.$$
$$P_F(T) = q^g P_F(\frac{1}{qT})T^{2g}.$$

特に 2 番目の等式を $P_F(T)$ の関数等式と呼ぶ．(このことは $\sigma_q \cdot M_{n,i,q}(x,y) = q^{\frac{n+2-2i}{2}} M_{n,n+2-i,q}(x,y)$ であることを用いて得られる)

これより，α が $P_F(T)$ の零点である事と，$\frac{1}{q\alpha}$ が $P_F(T)$ の零点である事が同値である．特に，$F(x,y)$ が実係数なら $P_F(T)$ が実係数であるから，α が $P_F(T)$ の零点である事と，$\frac{1}{q\bar{\alpha}}$ が $P_F(T)$ の零点である事とが同値である．

この同値性から分かるように，zeta 多項式の零点にとって $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{q}}\}$ という円は特別な意味を持つ．実は，さまざまな self-dual な weight enumerator に対して，zeta 多項式の全ての零点が，この円周上にあることが知られている．

定義 3.4 (リーマン仮説類似)**.** $F(x,y)$ を self-dual な weight enumerator とする．$P_F(T)$ の全ての零点が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{q}}\}$ に乗るとき，$F(x,y)$ はリーマン仮説類似を満たすという．

4 Type IV extremal weight enumerator と，そのリーマン仮説類似

今回，特に注目するのは，Type IV extremal と呼ばれる，$q=4$ として self-dual な weight enumerator の無限列である．

Weight enumerator が self-dual というのは，σ_q で不変ということであった．

定義 4.1 (Type IV weight enumerator)**.** $q=4$ とする．

$F(x,y)$ を length $=n$ の weight enumerator としたとき，$F(x,y)$ が even であるというのを

$$\tau_2 \cdot F(x,y) = F(x,y)$$

となることと定義する．(ただし，1 の n 乗根 $\xi_n := \exp(\frac{2\pi i}{n})$ に対し，$\tau_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi_n \end{pmatrix}$ としておく.）つまり，$F(x,y) = F(x,-y)$ であることを even という．そして $F(x,y)$ が Type IV であるというのを，self-dual であり，尚且つ even であることと定義する．

$G_4 := \langle \sigma_4, \tau_2 \rangle$ として定義しておけば

$$F(x,y) \text{ が Type IV} \iff F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]^{G_4}$$

となる (ただし $\mathbb{C}[x,y]^{G_4}$ は G_4 の不変式環としている) が，

$$\mathbb{C}[x,y]^{G_4} = \mathbb{C}[x^2+3y^2, (y(x^2-y^2))^2]$$

となることが知られている ([3, p.203, Theorem 30], または [8, p.2563, Lemma 3.3 (iv)] において $k=l=0$ としたものがこれにあたる)．特に，Type IV weight enumerator は各偶数 length において存在する．

各 length において，Type IV の中で，最小距離が最も大きなものを考える．

定義 4.2 (Type IV extremal)**.** $F(x,y)$ が length $=n$ の Type IV weight enumerator であるとき，$F(x,y)$ が extremal であるということを，F の最小距離 d_F が length $=n$ の Type IV weight enumerator の中で最大になる，ということで定義する．

さらに $F_n^{IV}(x,y)$ と書いたら length $=n$ の Type IV extremal で x^n の係数が 1 である weight enumerator とする．(このようなものは一意的に存在する．従って extremal な weight enumerator の零点を調べたければ，$F_n^{IV}(x,y)$ の零点を調べればよい)

$\mathbb{C}[x,y]^{G_4} = \mathbb{C}[x^2+3y^2, (y(x^2-y^2))^2]$ であることを考えると, 次のことが分かる.

命題 4.1 (Type IV weight enumerator の性質)**.**

1. length $= 6k-2$ のとき $d_F \geq 2k$ となる Type IV weight enumerator は，定数倍を除き一意的に存在する.
2. length $= 6k$ のとき $d_F \geq 2k+2$ となる Type IV weight enumerator は，定数倍を除き一意的に存在する.

従って特に，$d_{F^{IV}_{6k-2}} \geq 2k$，$d_{F^{IV}_{6k}} \geq 2k+2$ である (実際には等号が成立していることが知られている [7, p.115] が，今回は使わない).

注意. この他にも Type I, Type II, Type III が次の様に定義されているが，今回は詳しく触れない. ([3, Chapter 7], [7], [8, p.2561] など)

- $q=2, G_1 := \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$ としたとき
  Type I $\Longleftrightarrow F(x,y) \in \mathbb{C}_n[x,y]^{G_1} = \mathbb{C}[x^2+y^2, (xy(x^2-y^2))^2]$.
- $q=2, G_2 := \langle \sigma_2, \tau_4 \rangle$ としたとき
  Type II $\Longleftrightarrow F(x,y) \in \mathbb{C}_n[x,y]^{G_2} = \mathbb{C}[x^8+14x^4y^4+y^8, x^4y^4(x^4-y^4)^4]$.
- $q=3, G_3 := \langle \sigma_3, \tau_3 \rangle$ としたとき
  Type III $\Longleftrightarrow F(x,y) \in \mathbb{C}_n[x,y]^{G_3} = \mathbb{C}[x^4+8xy^3, (y(x^3-y^3))^3]$.

このようなものを取り扱うのは，符号理論の観点から自然なことであるが，Duursma は次のような問題を考えた.

Duursma の問題 (Duursma 2001 [6])

> 命題「Type I, Type II, Type III, Type IV extremal weight enumerator は全て，リーマン仮説類似を満たす」が真であれば証明し，偽であれば反例を挙げよ.

この問題は，一般には未解決である.

既に解決しているものとしては次の結果がある.

定理 4.2 (Duursma 2003 [7])**.** length $= 6k$ $(k \in \mathbb{N})$ の Type IV extremal weight enumerator は，リーマン仮説類似を満たす.

次節では，主結果として，Type IV extremal で length $= 6k-2$ の場合にも，肯定的に解決したことを報告する.

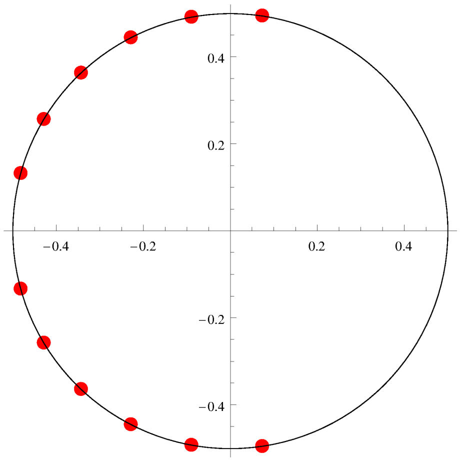
5　主結果

定理 5.1 (主結果)**.** $F_n^{IV}(x,y)$ と書いたら，length $= n$ の Type IV extremal で，x^n の係数が 1 である weight enumerator のことであった．このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

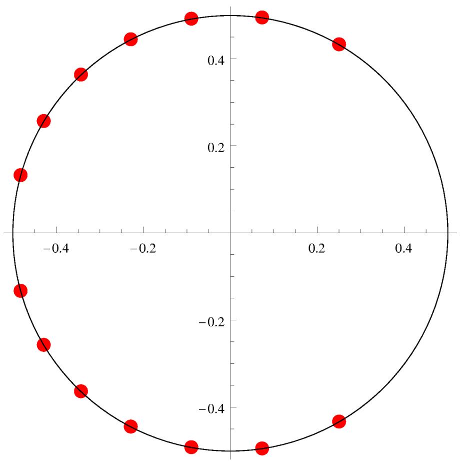
$$P_{F_{6k-2}^{IV}}(T) = \frac{4}{3}(T - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}})(T - \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}})P_{F_{6k}^{IV}}(T)$$

である．特に，Duursma の結果を用いれば，length $= 6k - 2$　$(k \in \mathbb{N})$ の Type IV extremal weight enumerator はリーマン仮説類似を満たすことが分かる．

例 ($P_{F_{42}^{IV}}(T)$ と $P_{F_{40}^{IV}}(T)$ の比較)**.** $P_{F_{42}^{IV}}(T)$ と $P_{F_{40}^{IV}}(T)$ の零点は次のように分布している (図の中の円の半径は $\frac{1}{2}$).



($P_{F_{42}^{IV}}(T)$ の零点)



($P_{F_{40}^{IV}}(T)$ の零点)

零点の集合として，2 点 $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 以外は完全に一致している．

証明. Zeta 多項式は MDS-weight enumerator を用いて定義されたが，単純計算により，次のような，MDS-weight enumerator と x, y に関する微分作用素との関係が分かる．$1 < i < n+1$ とすると

$$\begin{aligned}\partial_x M_{n,i,q} &= nM_{n-1,i,q}.\\ \partial_y M_{n,i,q} &= nM_{n-1,i-1,q} - nM_{n-1,i,q}.\end{aligned}$$

が成り立つ (ただし $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ としている).

これを用いると length $= n$ で最小距離 d_F の weight enumerator である $F(x,y)$ が，$p_{n+1} = 0$ であり ($F(x,y)$ が self-dual かつ最小距離が 2 以上のときは，常に成立する)，$p(\partial_x, \partial_y)$ を ∂_x, ∂_y の k 次斉次多項式で，$k < n$ かつ ∂_y の最高次数が $d-1$ 以下のものとしたとき，

$$p(\partial_x, \partial_y)F(x,y) \text{ の zeta 多項式} = \frac{n!}{(n-k)!}p(T, T-1)\cdot P_F(T) \text{ を } T \text{ で割れるだけ割ったもの}$$

が成り立つことが分かる．

証明の核となるのは，次の補題である．

補題 5.2 (Key lemma). F_{6k}^{IV} と F_{6k-2}^{IV} との間に次の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2}{6k(6k-1)}F_{6k}^{IV}(x,y) = F_{6k-2}^{IV}(x,y).$$

この補題を認めれば，先の等式を用いて，主張が得られる． □

まず Key lemma の証明の準備として，次の補題を示す．

補題 5.3.

(a) $F(x,y)$ が length $= n$ の Type IV weight enumerator のとき，$(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F(x,y)$ は length $= n-2$ の Type IV の weight enumerator.

(b) $d_F \geq 2$ のとき，$d_{(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F} = d_F - 2$.

(a) の証明.

$x^2 + \frac{1}{3}y^2$ は ${}^tG_4 := \{{}^tg \mid g \in G_4\}$ の作用で不変である．ここで，次の命題を用いる．

命題 5.4. G を，$\mathbb{C}_n[x,y]$ に作用している $GL(2,\mathbb{C})$ の部分群とし，$F(x,y) \in \mathbb{C}_n[x,y]^G$ とする．このとき $p(x,y) \in \mathbb{C}_i[x,y]^{{}^tG}$ $\quad (i \leq n)$ とすると，$p(\partial_x, \partial_y)F(x,y) \in \mathbb{C}_{n-i}[x,y]^G$ となる．

(証明は，[7, p.108, Lemma 1] より，直ちに従う.)

この命題により，$F(x,y)$ が length $= n$ の Type IV weight enumerator なら，$(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F(x,y)$ は length $= n-2$ の Type IV weight enumerator であることが分かる． □

(b) の証明.

最小距離 d_F の定義より，$d_{\partial_x F} = d_F$ と，$d_F \geq 1$ なら $d_{\partial_y F} = d_F - 1$ であることが分かる．したがって，$\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2$ は y に関して 2 階微分であるから，$d_F \geq 2$ なら $d_{(\partial_x^2+\frac{1}{3}\partial_y^2)F} = d_F - 2$. □

Key lemma の証明.

Type IV weight enumerator の次の性質 (命題 4.1) に注意する.

(1) length $= 6k-2$ のとき $d_F \geq 2k$ となる Type IV weight enumerator は，定数倍を除き一意的に存在する.

(2) length $= 6k$ のとき $d_F \geq 2k+2$ となる Type IV weight enumerator は，定数倍を除き一意的に存在する.

まず補題 5.3 (a) より $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}$ は length $= 6k-2$ の Type IV の weight enumerator である．更に，命題 4.1 (2) より F_{6k}^{IV} の最小距離は $d_{F_{6k}^{IV}} \geq 2k+2$ であるから，補題 5.3 (b) より $d_{(\partial_x^2+\frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}} = d_{F_{6k}^{IV}} - 2 \geq 2k$. 従って $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}$ は length $= 6k-2$ の Type IV の weight enumerator で，最小距離が $2k$ 以上のものである．命題 4.1 (1) より，このようなものは定数倍を除いて一意的であるから，extremal の定義と合わせて考えると，これは F_{6k-2}^{IV} の定数倍である．F_{6k-2}^{IV} の x^{6k-2} の係数が 1 であることを考えて調整すると

$$\frac{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2}{6k(6k-1)}F_{6k}^{IV} = F_{6k-2}^{IV}$$

となる．これで Key lemma が示せた. □

6 Type I,Type III での類似の結果

主結果での議論は，Type IV extremal weight enumerator の関係性を微分作用素で見つけ，それを zeta 多項式の関係に翻訳するというものであった．Type I extremal, Type III extremal でも同様の議論によって，次を示すことができる.

length $= 8k$ の Type I extremal weight enumerator は，リーマン仮説類似を満たす.

$\Leftrightarrow$ length $= 8k-2$ の Type I extremal weight enumerator は，リーマン仮説類似を満たす．($\frac{\partial_x^2+\partial_y^2}{8k(8k-1)}F_{8k}^I = F_{8k-2}^I$ を用いる.)

length $= 12k$ の Type III extremal weight enumerator は，リーマン仮説類似を満たす.
$\Leftrightarrow$ length $= 12k-4$ の Type III extremal weight enumerator は，リーマン仮説類似を満たす．($\frac{\partial_x^4+\partial_x\partial_y^3}{12k(12k-1)(12k-2)(12k-3)}F_{12k}^{III} = F_{12k-4}^{III}$ を用いる.)

しかし Type II では，同様の関係性は成り立たない.

参考文献

[1] K. Chinen, Zeta functions for formal weight enumerators and the extremal property, Proc. Japan Acad. 81 (Ser. A.) (2005) 168-173.

[2] K. Chinen, An abundance of invariant polynomials satisfying the Riemann hypothesis, Discrete Math. 308 (2008), no. 24, 6426-6440.

[3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, Sphere packings, lattices and groups, 3rd. ed., Springer, New York, 1999.

[4] Iwan M. Duursma, Weight distributions of geometric Goppa codes, Trans. Amer. Math. Soc.351 (9) (1999) 3609-3639.

[5] Iwan M. Duursma, From weight enumerators to zeta functions, Discrete Appl. Math. 111 (1-2) (2001) 55-73.

[6] Iwan M. Duursma, A Riemann hypothesis analogue for self-dual codes, in: A. Berg, S. Litsyn (Eds.), Codes and Association Schemes (Piscataway, NJ, 1999), American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. 115-124.

[7] Iwan M. Duursma, Extremal weight enumerators and ultraspherical polynomials, Discrete Math. 268 (1-3) (2003) 103-127.

[8] T.Harada, M.Tagami, A Riemann hypothesis analogue for invariant rings, Discrete

Math. 307 (21): 2552-2568 (2007).

[9] F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[10] M. Ozeki, On the notion of Jacobi polynomials for codes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 121 (1997), 15-30.

[11] C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math. 6 (1954), 274-304.