

修士学位論文

つながりと初期条件が及ぼす 流行現象への影響

Effects of Connections and Initial Conditions
on Spreading Phenomena

平成 24 年度

広域科学専攻相関基礎科学系

学生証番号 31-116903

岩井 淳哉

はじめに

私の修士論文を物性研究・電子版に掲載していただけるとのこと、大変嬉しく思います。

2013年6月1日

【要旨】 つながりと初期条件が及ぼす流行現象への影響

学籍番号 31-116903 岩井 淳哉

指導教員 福島 孝治

■序論 最も古い感染症の数理モデルは 1927 年に McKendrick らによって与えられた [1]. このモデルは個々の人の状態を S (健康), I (感染), R (治癒) の 3 状態として, それぞれの状態の人数 S, I, R が満たす微分方程式として与えられる. このモデルは任意の I が任意の S を感染させることが可能であるとした全結合モデルであるが, 実際に具体的な感染症やコンピュータウイルス等を念頭におけば, 個体同士が接触したときに感染すると考えるのが妥当であろう. 個体同士のつながり方は非常に複雑である. そこで「複雑ネットワーク」という概念が登場する. 複雑ネットワークは, 図 1.1 のように無数のノード (○) をエッジ (—) によって複雑につないだ図で表される. そして, エッジによってつながれた (隣接した) ノード間で感染が広がっていく. このように, SIR 模型をネットワーク上に移した模型をネットワーク上の SIR 模型という.

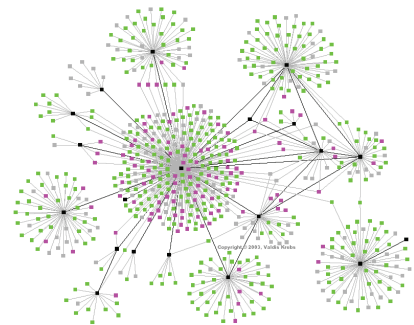


図 1 感染症ネットワーク [2]

ネットワーク上の SIR 模型のパラメータは, 単位時間の感染確率 λ である. N ノードからなるネットワークにおいて, ただ 1 つの I ノードと $N - 1$ の S ノードからスタートすると, λ にはある閾値が存在し, その閾値を超えたときに感染がマクロに広がる相転移現象が見られる. この現象の数理的な興味から, この模型は盛んに研究されている. 特に 2002 年 Moreno ら [3] によって, 次数 (各ノードの隣接ノード数) の分布がべき乗なネットワーク (スケールフリーネットワーク) では転移点が $\lambda \sim 0$ となることが示されるなど, 現在までスケールフリーネットワークを対象とした研究が非常に多い.

■実際の伝染性感染症を念頭に置いた模型 しかし, あらゆる感染症の感染経路がスケールフリーネットワークで記述できるとは思えない. 例として季節性インフルエンザを念頭に置き, ネットワーク上の SIR 模型の初期条件とネットワークのつながりを変更した場合, 感染伝搬の振る舞いにどのような影響が表れるだろうか. 主に数値実験とデータ解析によって調べた.

主な結果としては, 初期感染者数が定数の場合と系のサイズに比例する場合では, 平衡状態 (終状態) における R の揺らぎと終状態に至るまでに掛かる時間の揺らぎに違いが見られた. また, ネットワークの変更に対しては, 現実の感染経路を模したネットワークの方

がランダムにエッジを張ったネットワークよりも感染が広がりにくいという結果を得た。

■**感染症流行の予測不可能性** また、ネットワーク上の SIR 模型の相転移現象は、流行相において必ず流行するというわけではなく、流行しない事象が「0 でも 1 でもない有限値」の確率で生じることが知られている [4, 5]. この現象は、イジング模型やパーコレーションといった、熱力学極限において確率 1 で物理量が決定される標準的な統計力学模型の現象とは性質が異なり、非常に興味深い。先行研究では離散時間模型での現象論的議論がなされているが、そのメカニズムの解明や統計力学的な意味付けはなされていない。これを確率微分方程式を使って議論した。

解析の概要を示す。 $N \rightarrow \infty$, 時刻 $t \ll O(N)$ の条件のもとでは、平均場的な SIR ダイナミクスは I 状態の ξ ノード数の平方根 Y を変数としたランジュバン方程式

$$\dot{Y} = -\partial_Y U(Y) + \sqrt{2D}\xi \quad (1)$$

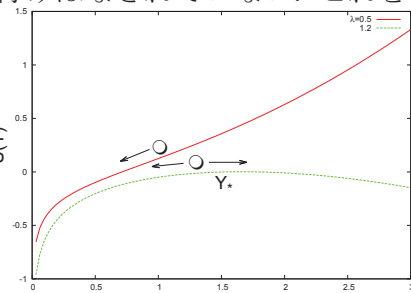


図 2 $U(Y)$ の概形

で記述できる。ただし、 $D = (\lambda + 1)/8$ であり、ポテンシャル $U(Y)$ は

$$U(Y) = -\frac{1}{4}(\lambda - 1)Y^2 + \frac{1}{8}(\lambda + 1)\log(Y) \quad (2)$$

である。図 3.3 に示した通り、 $U(Y)$ は $\lambda \leq 1$ のとき単調増加関数であり、解 $Y(t)$ は必ず 0 に吸収される。すなわち確率 1 で流行しない。 $\lambda > 1$ (流行相) のときは $U(Y)$ は Y_* にピークを持つが、解がノイズに駆動されてピークを超え、 $Y \rightarrow \infty$ (流行状態) となるのは本質的に確率的である。このように $U(Y)$ の概形から分岐現象を明解に理解することができた。更に転移点近傍で流行状態となる確率を定量的に議論した [6].

■**多様な流行現象の分類に向けて** 更に、対象を感染症の流行現象から広げて、ネットワーク上の SIR 模型では表現出来ないような、グッズやファッションなどの文化に見られる流行も含めた多様な現象を示す模型を提案した。

【謝辞】 本研究を進めるに当たっては、2012 年 10 月末までの (そして今日まで事実上の) 指導教員である佐々真一教授にご指導を賜りました。ここに感謝の意を表します。

1. Y. Kermack. *Bulletin of mathematical biology*, Vol. 53, No. 1, pp. 33–55, 1991.
2. V. Krebs. *Mapping the spread of contagions via contact tracing*, 2003.
3. Y. Moreno, et al. *Eur. Phys. J. B*, Vol. 26, No. 4, pp. 521–529, 2002.
4. L.K. Gallos, et al. *Physica A*, Vol. 330, No. 1, pp. 117–123, 2003.
5. A. Lančić, et al. *Physica A*, Vol. 390, No. 1, pp. 65–76, 2011.
6. J. Iwai and S. Sasa. To be submitted soon.

目次

第 1 章	序章	1
1.1	興味	1
1.2	複雑系の制御可能性	2
1.3	ネットワーク上の感染症伝搬模型	4
1.3.1	ネットワーク上の SIR 模型	4
1.4	先行研究	5
1.4.1	その他の模型	6
1.5	本修士論文の構成	6
	参考文献	7
第 2 章	実際の伝染性感染症を念頭に置いたネットワーク上の SIR 模型	9
2.1	イントロダクション	9
2.2	モデル	11
2.2.1	初期条件	11
2.2.2	感染ネットワーク	11
	濃い人間関係のネットワーク	11
	薄い人間関係のネットワーク	12
2.3	レギュラーランダムグラフ	12
2.3.1	数値実験結果	13
2.3.2	解析	13
	レギュラーランダムグラフの λ_c の理論的導出	13
	$\lambda \rightarrow \infty$ における $\langle t_f \rangle, \sigma(t_f)^2$ の理論的導出	15
2.4	$m=1$ の場合の, 様々なネットワークでの実験結果	20
2.5	$m \propto N$ の場合の, 様々なネットワークでの実験結果	20
2.6	ここまでの考察	22
2.7	カस्पエクスポーネントの評価に向けて	24

2.7.1	数値実験結果	24
2.8	結論	24
	参考文献	25
第3章	感染症流行の規模に関する予測不可能性	27
3.1	イントロダクション	27
3.2	モデル	28
3.3	解析	29
3.4	結論と注釈	35
3.5	追加説明・議論	36
3.5.1	SIR 模型とボンドパーコレーションの関係	36
	Newman のボンドパーコレーションの理論	37
	ボンドパーコレーションの厳密解	44
	SIR 模型との比較と考察	45
3.5.2	フォッカープランク方程式の解析解を求めるための試行錯誤	47
3.5.3	フォッカープランク方程式とランジュバン方程式の関係	47
3.5.4	ランジュバン方程式の変数変換	51
3.5.5	フォッカープランク方程式の数値解	52
3.5.6	$Q(Y, t)$ のフォッカープランク方程式 (3.10) の別導出	54
3.5.7	SIS 模型ランジュバン方程式の議論はできるか?	54
	参考文献	56
第4章	多様な流行現象の分類に向けて	59
4.1	イントロダクション	59
4.1.1	背景	59
4.1.2	目標	60
4.2	モデル (案)	62
4.2.1	各ノードが取りうる状態	62
4.2.2	ダイナミクスルール	62
4.2.3	ネットワーク	64
4.3	考察	64
	参考文献	64
第5章	結論と展望	67
5.1	結論	67
5.2	展望	68

付録 A	プログラムアルゴリズム	69
A.1	ネットワーク生成アルゴリズム	69
A.1.1	レギュラーランダムグラフ	69
A.1.2	ランダムグラフ	70
A.2	SIR 模型アルゴリズム	71
A.2.1	標準的な模型	71
A.2.2	§4 の模型 (案)	72
	謝辞	73

第 1 章

序章

本章では本修士論文の序章として、私が修士課程において行なった研究の動機を先行研究を交えながら説明し、本修士論文の構成を説明する。この修士論文では、指導教員の方針通り、私が修士課程で研究してきた内容をほぼ全て書いた。そのため、不完全な部分、内容の関連性が薄い部分が多々あり、まとまり切らないところがあるが、ご了承頂きたい。

1.1 興味

この 2 年間で振り返れば、私自身に「是非これを明らかにしたい」というこの 2 年間貫徹した強い興味があったわけではなく、教科書・論文・数式・プログラムと戯れながら、目の前の勉強・研究を進める中で壁にぶつかる度に指導教員に相談し、その度に適切に次のステージへ導いてもらい、また戯れ、壁にぶつかり、指導教員に相談し…というのを繰り返していたように思う。そんな状況だから、俯瞰して「私の興味ある現象はこれだ」と一言で言うのは難しいが、言える事があるとすれば、「人間社会に関わる現象に興味がある」ということである。出来れば、それによって社会問題の解決につながる示唆が得られるような研究、もっと言えば、素人にも面白さを理解してもらえる派手な研究をしたい、と思っていた。たしか院試の面接で興味のある分野を聞かれて「渋滞の統計力学」と答えた気がする。学部時代在籍していた大阪大学の教員らの研究 [1] だ。マニアックな専門家だけが分かる数理的な面白さ「だけ」では意味があるとは思えない。学術的にも意味があり、社会的にも意味がある、素朴に面白いことをしたかった。そのあたりの性向を指導教員にもよく理解していただいて、多少途中紆余曲折したにせよ、この 2 年間の修士課程で取り組んだ「ネットワーク上の流行現象モデルの解析」というテーマの設定は申し分なかったと思う。

1.2 複雑系の制御可能性

多数の要素が絡み合った複雑な系が巧みに制御されている現象は、自然界において数多く見られる。例えば人体は多数の細胞が複雑に相互作用することによってある程度安定した一つの生命体を形作っている。一つ一つの細胞も、その中では複雑な化学反応が絡み合っただけで細胞としての機能を発揮している [2]。また、これらの複雑系は多少のノイズには耐えうる程度には安定である。例えば生命体は多少の気温の変化や飢饉に遭遇しても、簡単に命を落とさず生存し続ける。このように外界との相互作用に対して安定性を発揮するためには、何らかの内的な制御が必要となるだろう。制御しようとする系が複雑なため、その制御は一見非常に難しく思えるが、細胞内ではそれを自動的にこなしていることを考えると、複雑系の制御可能性を定量的に研究することによって様々な自然現象を理解できるかもしれない。また、人工物においても複雑系の制御は重要である。例えば航空機や自動車は高度に複雑な制御によって安定走行し、事故を未然に防いでいる。そして、複雑なシステムには故障が付き物であるが、どの程度故障したときに制御のためのコストの増加程度の評価や、多少故障しても全体の制御が不可能にならないシステム設計は、事故を防ぎシステムを正常に動作させるために重要である。一昨年(2011年)の3月11日の震災では停電によって炉心を冷やすための冷却水を送ることができなくなり、原子力発電所が制御不能になり大事故に繋がった [3]。これら複雑系の制御問題は重要である。

ところで、近年ネットワークを複雑系のモデルとして定義する試みがなされている。ネットワークとは、ノードとエッジ(ボンドともいう)の集合である。エッジは2つのノードを繋ぐ。繋がったノード同士は互いに「隣接している」という。ネットワーク $G(V, E)$ はノードの集合 $V = v_1, v_2, \dots, v_N$ とエッジの集合 $E = e_1, e_2, \dots, e_m$ によって記述される。 e_i はノードを2つ含む集合であり、 $e_i = \{j, k\}$ ならばノード j とノード k が隣接していることを表す。各ノードの隣接ノード数を次数という。 $N \times N$ の隣接行列 A はエッジの重みが一定の場合

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } \exists k, e_k = \{ij\} \\ 0 & \text{for } \forall k, e_k \neq \{ij\} \end{cases} \quad (1.1)$$

とする。すなわち2つのノード i, j が隣接している場合 $A_{ij} = 1$ 、隣接していない場合 $A_{ij} = 0$ となる。エッジの重みが一定でない場合は、 i, j が隣接している場合は A_{ij} はその重みの値を取る。隣接していない場合は $A_{ij} = 0$ となる。先の例に当てはめれば、ノードは細胞や化学物質を表し、隣接関係は何らかの相互作用を持っていることを表す。このようにして複雑系をネットワークによってモデル化する。以下に紹介するのは、一昨年(2011年)の5月に指導教員から紹介していただいた、複雑ネットワークにおける制御可能性を論じた論文 [4] である。私の修士過程における研究はこの論文からスタートした。

■複雑ネットワークにおける制御可能性 (レビュー) Liu らのネットワークにおける制御可能性に関する論文「Controllability of complex networks[4]」を設定のみ簡単に紹介する。主張自体は論文を見てもらいたい。

この論文では、工学の制御理論の概念である「可制御」をネットワーク上のダイナミクスに転用している。重み付きネットワーク $G(V, E)$ を与える。ノード i は連続量 x_i をもっていて、系全体の状態はベクトル量 \mathbf{x} で指定される。ノード間の相互作用は以下の方程式に従う：

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}(t) \quad (1.2)$$

ここで A は G の隣接行列であり、 $N \times M$ 行列 B は入力行列と呼ばれる行列で $N \leq M$ 、 M 成分からなる \mathbf{u} は入力ベクトルである。可制御 (controllability) の定義は、 $N \times NM$ 行列である可制御行列 $C = (B, AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B)$ について $\text{rank}(C) = N$ となることであり、これは任意の初期条件 $\mathbf{x}(0)$ から初めてある時刻 τ において任意の状態 $\mathbf{x}(\tau)$ を実現する入力 \mathbf{u} が存在することと同値である。これをもってネットワーク G は可制御であるとする。

m が可制御かどうかを数値的に計算するには $2^N - 1$ の組み合わせを計算する必要があり、 N が大きいときは計算が難しい。そこで、可制御の概念を拡張し、構造可制御 (structural controllability) を定義する。これは与えられた A に対して、0 でない A の成分の重みを自由に調節して、 $\text{rank}(C) = N$ となる $N \times M$ 行列 B が存在する事とする。そして構造化制御となる B のうち最小の M を "maximum matching" によって決定し、それを「ドライバーノードの数 N_D 」とする。 N_D の全ノード数 N に対する割合 n_D をそのネットワークの制御の難しさの指標とする。 M は独立な入力成分 $u(t)$ の数であるから、より小さい M で制御できるネットワークほど、制御が容易であると解釈できる。

■意味のある「ネットワークの制御」に向けて この論文を読んでまず思ったことは、この「制御」が何を意味しているのかがわからない、という事である。「可制御」の定義自体は工学で長い歴史を持つものであり、由緒正しい定義だと考えられるが、工学分野の「制御論」は数理モデルの制御を研究する分野らしく、例えば生物や化学反応・原発や航空機・自動車の制御のようなモデルだとは考えにくい。また、可制御の概念を構造可制御にまで広げることによって、 B が任意になるため、非現実的な設定が可能になっている。例えば、 $N_D = 1$ としたまま、一つの入力を、すべてのノードに作用させることも可能になる。現実の系の制御として私がイメージするのは、全体のノード数に比べるとごく少数のノードに作用することによって、系全体の物理量を制御する、というようなものであるため、この論文の N_D の数え方は私のイメージとは合致しない。このようなドライバーノードの数え方が意味のある現実の系は果たして存在するだろうか？私は具体的な現実存在する対

象の制御に関しては、別の制御の定義を考える必要があるように思った。

そこで、ネットワーク上のダイナミクスの制御として、現実の問題としてイメージしやすいものを探した結果、研究を「感染症伝搬の制御」にフォーカスすることにした。次節 §1.3 で、ネットワーク上の感染症伝播模型についての説明を行う。

1.3 ネットワーク上の感染症伝搬模型

感染症伝搬の模型としてネットワーク上の感染症模型が研究されてきた。人と人とのつながりをネットワークで表現し (図 1.1), その上で感染症が伝搬していくモデルは直感的に理解しやすい。また、その制御としては感染症が蔓延することを防ぐこと、蔓延を遅らせることが考えられ、抽象的な制御論ではないため、私は具体的なイメージを持つことができた。以下にネットワーク上の SIR 模型の定義と先行研究を紹介する。

1.3.1 ネットワーク上の SIR 模型

ネットワーク上の SIR 模型について説明する。

■**定義** 初めに個々のノードの状態について説明する。与えられたネットワークにおいて、各ノードは 3 状態 S,I,R を持つ。S は健康な状態,I は感染して隣接する S 状態のノードを感染させる能力を持った状態, R は I 状態のノードが治ってそれ以上変化しない状態を表す。それぞれ Susceptible,Infected,Recoverd の頭文字である。

次にダイナミクスルールを説明する。S 状態のノードと I 状態のノードが隣接している場合、すなわち S-I ペアが存在するとき、レート λ で S は I に変化し,I-I ペアとなる。これが感染事象である。感染事象は S-I ペアごとに独立に起こる。また,I 状態のノードはレート μ で自発的に R 状態に変化する。これは治癒事象である。これらの事象はそれぞれが独立なポアソン過程に従う。すなわち、 λ は単位時間あたりの感染確率であり、時刻 t と $t + \Delta t$ の間の微小時間 Δt において任意の S-I ペアが I-I ペアに変化する確率 dP_I は $dP_I = \lambda \Delta t + O(\Delta t^2)$ である。また、任意の I 状態のノードが R 状態に変化する確率 dP_R は $dP_R = \mu \Delta t + O(\Delta t^2)$ である。 $\Delta t \rightarrow 0$ において $O(\Delta t^2)$ は無視できる。

■**設定** 一般的な設定としては、 N ノードからなるネットワークについて、初期条件は 1 つランダムに選んだノードを I 状態とし、残り $N - 1$ ノードを S 状態とする。系は有限の時間で I 状態のノードがなくなり,S 状態と R 状態だけになる。これを終状態と呼ぶ。終状

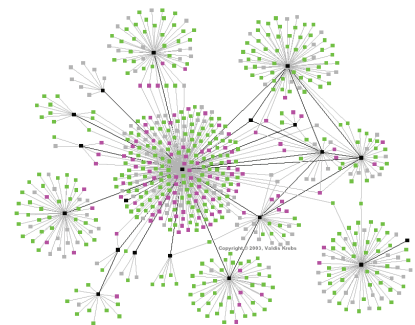


図 1.1 感染症ネットワーク [5]

態における R 状態の割合を n_R とおき, これを感染蔓延の指標とする. 初期感染ノード数を N に比例する一定割合とする設定も研究されはじめた [6] が, 長らく主流ではなかった. 初期感染者密度を微小に用意し, 感染者がマクロに広がった状態を「流行状態」と呼ぶのは自然に思えるが, 熱力学極限, すなわちノード数 N を $N \rightarrow \infty$ とする場合, 初期感染者密度の極限操作には理論的な任意性が残る. すなわち, 初期感染者数を ϵN とし, $N \rightarrow \infty$ とした後に $\epsilon \rightarrow 0$ とする場合と, 初期感染者数を N によらない定数 m とする場合である. 先行研究は圧倒的に初期感染者数を 1 としたものが多く, 少なくともこの 2 つの極限操作の区別がなされている文献を見たことがない. 例えば Boguñá ら [7] は $m = 1$ として $N \rightarrow \infty$ のとき初期感染者密度 ρ_0 を系のサイズに依存した形で $\rho_0 = 1/N$ と表現しているだけであり, ρ_0 を N によらずに $\rho_0 = \epsilon$ とした場合については言及していない. このことについては §3 で議論する.

1.4 先行研究

関連する先行研究について概観する.

■古典的 SIR 模型 ネットワークが導入される前の, 古典的な SIR 模型は 1927 年の McKendrick らの論文に始まる [8]. このモデルは S, I, R それぞれの状態のノードの数を S, I, R とし, これらが満たす微分方程式として与えられる.

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\lambda SI \\ \dot{I} &= \lambda SI - \mu I \\ \dot{R} &= \mu I \end{cases} \quad (1.3)$$

ただし $S + I + R = N$ を満たす. これは全結合ネットワーク上の SIR 模型に対応すると思われる.

■ネットワーク上の SIR 模型 感染症模型を上記の全結合ネットワークから一般的なネットワーク上に持ち込んだのは Mollison[9] や Grassberger[10] らしい. 特に 1998 年以降, スモールワールドモデルの発明 [11] やスケールフリーネットワークの発見やネットワークモデル (BAモデル) の発明 [12] などから, 近年のネットワーク科学が勃興した. 「スケールフリーネットワーク」とは, 各ノードの次数 k の分布 $P(k)$ が $P(k) \sim k^{-\gamma}$ で与えられるようなネットワークのことである. 正方格子等規則的なネットワークに比べてここで定義されたのはトポロジーが非常に複雑なネットワークであり, これらのネットワークを総称して「複雑ネットワーク」と呼ぶ. 「複雑ネットワーク上の SIR 模型」の始まりは確認出来なかったが, 一般的に感染レートと治癒レートの比 λ/μ の値には閾値があり, 閾値以下の場合 $n_R = 0$ となり, 閾値を超えると n_R は 0 から連続的に立ち上がる相転移現象が見られることが確認される. 既に 2002 年において, Moreno ら [13] によって転移

点について詳細な解析がなされている。特にこの論文が注目されたのは、スケールフリーネットワークでは転移点が $\lambda/\mu \sim 0$ となることである。すなわちスケールフリーネットワークでは非常に小さい感染レート λ であっても感染が蔓延する、という主張が理論的になされたことになる。このことに関しては、似た感染症モデル (SIS 模型) においてスケールフリーな次数分布をネットワークに与える際の極限の取り方について議論されている [14] ことを考えると、転移点が厳密に 0 かどうかは議論が続いているようである。このように、特に物理系のネットワーク科学の分野では、スケールフリーネットワークが非常に多く調べられている [15].

1.4.1 その他の模型

その他ネットワーク上の SIR 模型に似た模型を紹介する。

■**SIS 模型** SIR 模型は I 状態から治癒するとそれ以上変化しない R 状態になったが、SIS 模型では治癒したときに S 状態となり、再度感染することも許すモデルである。SIR 模型はいったん免疫ができると二度とかからなくなる感染症を念頭においており、SIS 模型は免疫が出来ず複数回感染する可能性のある感染症を念頭においている。

■**離散時間 SIR 模型** 上記モデルは個々のノードの状態変化をポアソン過程に従うものとしたが、オートマトンのように単位時間を定義してその時間ステップごとに状態変化させる模型も研究されている [16]。§3 においても重要な研究を紹介した。離散時間模型における λ とポアソン過程模型の $\lambda\Delta t$ が一致する極限が一致するはずである。この論文では扱わないが、時間の離散と連続の違いがダイナミクスに与える影響については著者は興味を持っている。

■**その他** その他、感染してから症状を発症し S 状態のノードを感染させる可能性のある I 状態に変化するまでに時間がかかる感染症の模型として SEIR 模型 [17] や、生まれたり死んだりすることで常に免疫を持たないノードを新たに導入する模型 [18] もある。

1.5 本修士論文の構成

この修士論文の構成を説明する。

§2

§2 では、季節性インフルエンザを念頭に置いた感染経路ネットワークを定義し、その上での SIR ダイナミクスを数値実験で調べた。 n_R と終状態に至るまでの時間 t_f を計測し、

初期条件やネットワークを変化させたとき, その違いの特徴付けを試みた.

§3

§3 では, SIR 模型の流行相において流行するか否かが一意に定まらない現象について解析した. これが私の修士課程での主要結果であり, 2013 年 6 月 1 日現在投稿論文を執筆中である. 初期感染者数を系のサイズによらず定数にした場合, 熱力学極限において系の状態が一意に定まらないという特異な現象について, SIR ダイナミクスをランジュバン方程式に近似することによって解析した.

§4

§4 では, SIR 模型では表現しきれない現実の多様な流行現象を分類すべく, 新たなダイナミクスモデルを考案した. ただし, 時間の都合上構想に終わった部分も多い. S 状態のノードの感染レートや I 状態のノードの治癒レートを, そのノードに隣接する I 状態のノードの数に関する非線形関数によって与えると, 従来の SIR 模型とは異なる振る舞いを示すのではないかと考えた. またその関数のパラメータを変化させることによって多様な流行現象を分類できるのではないかと考えた.

§5

§5 では, 本修士論文のまとめと展望を記した.

付録

最後に付録として, 数値実験のプログラムのアルゴリズムを簡単に説明した.

参考文献

- [1] Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki, and S. Yukawa. Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam. *New Journal of Physics*, Vol. 10, No. 3, p. 033001, 2008.
- [2] H. Haken. *Information and self-organization: A macroscopic approach to complex systems*, Vol. 40. Springer, 2006.
- [3] 福島原発事故独立検証委員会. 福島原発事故独立検証委員会 調査・検証報告書. ディスカヴァー・トゥエンティワン, 3 2012.

-
- [4] Y.Y. Liu, J.J. Slotine, and A.L. Barabási. Controllability of complex networks. *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 167–173, 2011.
- [5] V. Krebs. Mapping the spread of contagions via contact tracing, 2003.
- [6] J.C. Miller. Epidemics on networks with large initial conditions or changing structure. *arXiv preprint arXiv:1208.3438*, 2012.
- [7] M. Boguñá, C. Castellano, and R. Pastor-Satorras. Langevin approach for the dynamics of the contact process on annealed scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 79, No. 3, p. 036110, 2009.
- [8] WO Kermack and AG McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics-i. *Bulletin of mathematical biology*, Vol. 53, No. 1, pp. 33–55, 1991.
- [9] D. Mollison. Spatial contact models for ecological and epidemic spread. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 283–326, 1977.
- [10] P. Grassberger. On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation. *Mathematical Biosciences*, Vol. 63, No. 2, pp. 157–172, 1983.
- [11] D. Watts and S. Strogatz. The small world problem. *Collective Dynamics of Small-World Networks*, Vol. 393, pp. 440–442, 1998.
- [12] A.L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [13] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Vol. 26, No. 4, pp. 521–529, 2002.
- [14] C. Castellano and R. Pastor-Satorras. Routes to thermodynamic limit on scale-free networks. *Physical review letters*, Vol. 100, No. 14, p. 148701, 2008.
- [15] A.L. Barabási and E. Bonabeau. Scale-free. *Scientific American*, 2003.
- [16] N. Boccara and K. Cheong. Automata network sir models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 25, No. 9, p. 2447, 1999.
- [17] J. Stehlé, N. Voirin, A. Barrat, C. Cattuto, V. Colizza, L. Isella, C. Régis, J.F. Pinton, N. Khanafer, W. Van den Broeck, et al. Simulation of an seir infectious disease model on the dynamic contact network of conference attendees. *BMC medicine*, Vol. 9, No. 1, p. 87, 2011.
- [18] M.J. Keeling and K.T.D. Eames. Networks and epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 2, No. 4, pp. 295–307, 2005.

第2章

実際の伝染性感染症を念頭に置いた ネットワーク上の SIR 模型

2.1 イントロダクション

ネットワーク上の感染症模型の研究は、特にスケールフリーネットワークに注目されてきた [1]. Barabasi[2] によれば、遺伝子発現ネットワークや WWW にはスケールフリー性があるという。また、性感染症ネットワーク [3] やコンピューターネットワーク、映画俳優の共演ネットワーク、論文の共著ネットワーク [4]、メールのネットワーク [5]、SNS のネットワーク [6] はスケールフリー性があるといわれている。感染経路が性交渉の場合は、ある程度相手が限定されていると考えてもよさそうだ。また、Eメールを介したコンピュータウィルスの感染拡大の場合も、相手が限定されており、そのネットワークがスケールフリーであるならば、スケールフリーネットワーク上での感染症模型を調べることに意味があると思われる。

では、その他の感染症伝搬ネットワークはスケールフリーだろうか？すべての感染症の感染経路ネットワークがスケールフリー性を持っているとは限らない。身近な例として、ノロウイルスと季節性インフルエンザを考えてみる。ノロウイルスは胃腸炎を引き起こす感染症で、その感染経路は食中毒、患者の嘔吐物や糞便が乾燥し粉塵化したものである [7]。食中毒は汚染された食材と衛生状況の悪い飲食店が組み合わさった時に起こるのであるから、食材流通ネットワークや人の飲食店利用ネットワークなどを考える必要がある。また、嘔吐物の粉塵を吸い込む可能性が高いのは嘔吐物を処理した人であり、家族や駅員などが考えられる。一方インフルエンザ [8] は飛沫感染を起こす。同じ空間にインフルエンザに感染した人がいて、その人が咳き込んだときに放出された飛沫が眼や口の粘膜に触れれば、感染が起こる。この場合、家庭や職場での関係の密な人との接触ネットワークや、駅やショッピングセンターなど、たまたまその時その場所に居合わせた人不特定なネット

ワークを考える必要があるだろう。これらのネットワークがスケールフリー性を持っているかは自明ではない。

また、初期感染者数の設定についても再考する必要があると思われる。一般的なネットワーク上の SIR 模型の場合、初期感染者数 m は $m = 1$ として与えられる。これは、例えば SARS や新型インフルエンザが、それに感染したただ 1 人の渡航者によって日本国内に持ち込まれた瞬間を初期状態とする設定であろう。この設定によって、ただ 1 人の感染者をどのように特定するか、また、誰が初期感染者かが明確でない場合に感染を広げないための対策として何が考えうるか、検証することができる。しかし、例えば季節性インフルエンザを念頭に置いた場合にこの設定は妥当であろうか。季節性インフルエンザは常に感染者の体内で変異を繰り返し、たまたま感染力を強めた変異体が現れたとき、それが流行を引き起こしていると思われる。変異体を作った感染者が初期感染者であるとすれば、 $m = 1$ はたしかに妥当であろう。しかしこの設定は実際の対策を考える上で妥当ではないと思われる。実際の季節性インフルエンザの流行パターン (図 2.1) を見ると、10 月ごろから全国同時多発的に患者が現れ始め、2 月にピークを迎えている様子が分かる。同じ型のインフルエンザが全国同時多発的に発生していることから、何らかの感染経路で 10 月までに同じ型のインフルエンザが全国に広がっていることが示唆されるが、どの時期にどのようにして感染が広がっているかは明らかにされていない [9]。対策としてワクチン接種を考えれば、流行する型をいち早く特定することがワクチンの量産に関して重要である。一方で、限られたワクチンを最適に分配する問題を考える上で、ただ一人の初期感染者を特定するのは難しい。大らかに地域ごとの流行を認識した 10 月前後の段階で、ワクチンの分配問題を考える意味もあろう。すなわち観測可能性や対策を考えた時に、初期条件として $m = 1$ ではなく $m > 1$ とする設定に意味があるとも考えることができるだろう。

このように現実の感染症は様々な感染経路や初期条件の組み合わせによって記述できると考えられる。では、このような感染症の流行を防ぐために、どのような対策が効果的であろうか。古くからネットワーク上の SIR 模型の流行対策最適化の研究がなされてきた [10, 11] が、これらの模型は単純化されたネットワークを対象としており、初期条件は $m = 1$ に固定されていることが主である。それらの条件で最適化された対策が、異なる感染経路や初期条件に対しても最適かどうかの保証はない。これを検証するためには、感染経路や初期条件を変化させたときに流行の質を調べる必要がある。同じ質の流行であれば、同じ対策が有用であろう。逆に異質な流行現象が見られた場合は、それぞれに最適な対策として別のものを考える必要があるだろう。

以上を踏まえた上で、本章では、特に季節性インフルエンザを念頭に置いた感染症モデルを提案し、その模型の振る舞いを解析した結果を報告する。初期感染者数とネットワークをパラメータとして変化させ、終状態における感染割合 n_R と終状態に至るまでにかかる時間 t_f への影響を検証した。初めにレギュラーランダムグラフにおいて初期感染者数

の違いの影響を見た. n_R のアンサンブル平均 $\langle n_R \rangle$ は感染レート λ について, ある閾値 λ_c より小さい範囲で $0, \lambda_c$ より大きい範囲で連続的に有限の値を取る, 相転移現象が見られる. この転移点を理論的に導出した. また, $\lambda \rightarrow \infty$ における $\langle t_f \rangle, \sigma(t_f)^2$ を理論的に導出した. 次に初期感染者数を $m = 1$ としたときの様々なネットワークで n_R, t_f を実験的に測り, ネットワークの違いによる終状態への影響を見た. 最後に初期感染者数を系の大きさ N に比例する形で導入したとき, ネットワークの違いによる感染割合への影響を検証した. 特に, 初期感染者数が系の大きさ N に比例する場合には, n_R の揺らぎと t_f が特徴的な振る舞いをみせるので, その部分を更に詳しく検証し, ネットワークの違いによる影響の定量的評価を試みた.

2.2 モデル

季節性インフルエンザを念頭に置いた感染症モデルを, 初期条件と感染ネットワークに分けて提案する.

2.2.1 初期条件

先に述べた通り, ただ一人から感染が始まることを念頭に置いた設定として初期感染者数 $m = 1$ とされることが一般的だ. それと比較して, 感染がある程度広がった状態として, $m = \epsilon N$ とする初期条件を考えてみる. ただし $\epsilon \ll 1$ である.

2.2.2 感染ネットワーク

N ノードからなるネットワークモデルを考案する. 季節性インフルエンザの感染ネットワークとはどのようなものだろうか. 私は「濃い人間関係」と「薄い人間関係」の2つに分けてモデルを考えた. 実際の感染ネットワークは, 以下で説明する「濃い人間関係」と「薄い人間関係」の重ねあわせであると考えられる.

濃い人間関係のネットワーク

職場や学校・家族との人間関係を「濃い人間関係」と定義する. 多くの社会人や学生は, 日中は学校や仕事場で特定のチーム (学級やワーキンググループ) で過ごし時間が長く, また家に帰れば夕方から朝にかけて家族とともに過ごす時間が長いだろう. つまり, 昼間と夜間それぞれで, 比較的少人数のコミュニティに所属している. これをネットワークモデルにすると, 以下のようなになる. $H_i, i = 1, 2, \dots, n$ を i 番目の昼のコミュニティ (学級・チーム) とし, $Y_j, j = 1, 2, \dots, n$ を j 番目の夜のコミュニティ (家族) とする. 各コミュニティ内のノードは全結合とする. 各コミュニティのノード数は c に固定する. $\rho_1(l), \rho_2(l)$

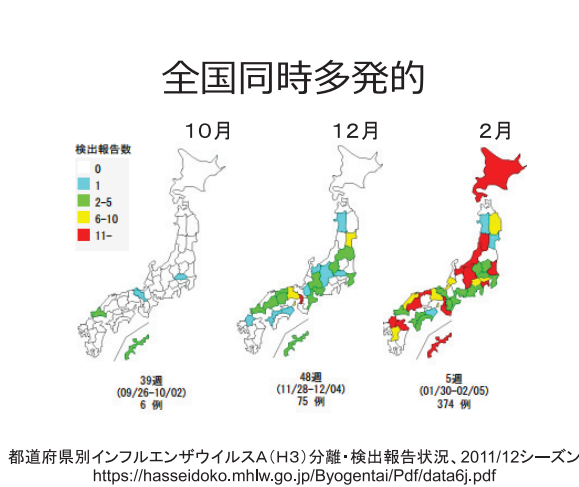


図 2.1 季節性インフルエンザの流行の様子

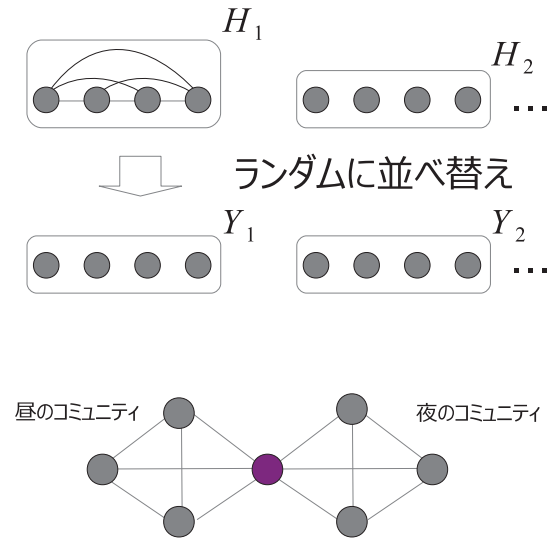


図 2.2 HY ネットの作り方

をそれぞれ $[1, 2, 3, \dots, N] \rightarrow [1, 2, 3, \dots, N]$ のランダムな置換とする。 $\sigma(a, b)$ を a を b で割った商とする。ノード $l, l = 1, 2, \dots, N$ は $H_{\sigma(\rho_1(l), c)}, Y_{\sigma(\rho_2(l), c)}$ に所属するものとする。 l が所属する 2 つのコミュニティ $H_{\sigma(\rho_1(l), c)}, Y_{\sigma(\rho_2(l), c)}$ には全く相関はなく、各コミュニティ H, Y にはそれぞれ c 個のノードが所属し、コミュニティ内のノードは全結合であるネットワークが作られる。これを **HY ネット** と呼ぶことにする。感染レートはエッジ一本あたり λ とする。図 2.2 は $c = 4$ のときのネットワークの作り方を模式的に表したものである。

薄い人間関係のネットワーク

公共交通機関や商業施設でたまたますれ違う、一定時間同じ空間に存在する、などの人間関係を「薄い人間関係」と定義する。この人間関係によって作られる感染ネットワークは感染力の小さいエッジが無数に引かれ、時間変化を伴う非常に複雑であることが予想される。これを思い切って感染レートをエッジ一本あたり λ/N とする全結合ネットワークで近似する。すなわち平均場ネットワークである。

2.3 レギュラーランダムグラフ

リファレンスとしてまずはレギュラーランダムグラフにおいて初期感染者数の違いによる終状態への影響を調べる。レギュラーランダムグラフは各ノードの次数 k を固定して、エッジをランダムに張ったネットワークとして定義する。

2.3.1 数値実験結果

初めに, レギュラーランダムグラフでの数値実験結果と解析を示す. 初期感染者数を m に対する最終状態の N_R とその時刻 t_f を観測した. $\langle \cdot \rangle$ をアンサンブル平均を表す記号, $\sigma(A)^2$ を A の分散 $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ を表す記号, $\Sigma(A)^2 = N\sigma(A)^2 = \sigma(NA)^2/N$ とする. $n_R = \frac{N_R}{N}$ として $\langle n_R \rangle, \sigma(n_R), \Sigma(n_R), \langle t_f \rangle, \sigma(t_f)$ を算出し, それぞれ λ について表示した. 図 2.3 は $k = 3, m = 1$ に固定して $N = 1024, 2048, 4096, 8192$ として N の収束の様子を見たものである. $\langle n_R \rangle, \sigma(n_R)^2$ は N について収束している. $\langle t_f \rangle$ は $\lambda < \lambda_c$ においては収束しており, $\lambda \rightarrow \infty$ において N に依存した値に収束していくように見える. $\sigma(t_f)^2$ は λ_c 付近で発散し, その後収束しているように見える. 図 2.4 は $N = 8192, m = 1$ に固定して $k = 3, 4, 5$ として k の違いを見た結果である. 図 2.3 の結果から $\lambda_c \approx 1/(k-2)$ が示唆される. また図 2.5 は $k = 3$ に固定して $m = N/256, N = 1024, 2048, 4096, 8192$ として N に関する収束を見た結果である. 図 2.4 の結果から $\Sigma(n_R)^2$ が $N \rightarrow \infty$ においてカスプ型に収束しているように見える. ここで注目したいのは $m = 1$ の場合は図 2.3.1 によれば $(\langle N_R^2 \rangle - \langle N_R \rangle^2)/N^2$ が $m = N/256$ の場合は図 2.4 によれば $(\langle N_R^2 \rangle - \langle N_R \rangle^2)/N$ が $N \rightarrow \infty$ において収束していることである. 標準的なイジング模型においては 1 粒子あたりの量 (この場合は揺らぎ) が熱力学極限において収束するため, $m = N/256$ の場合が当てはまる. では $m = 1$ の場合は何が起きているのだろうか. §3 において「状態の分岐現象」として扱う.

2.3.2 解析

レギュラーランダムグラフにおける λ_c と $\langle t_f \rangle, \sigma(t_f)^2$ を理論的に解析した.

レギュラーランダムグラフの λ_c の理論的導出

次数 k のレギュラーランダムグラフで初期感染者数 $m = 1$ としたときの λ_c を理論的に導出する. レギュラーランダムグラフをツリー近似する. ツリーとは各ノードの次数が k で固定された, ループのないネットワークである. これをレギュラーランダムネットワークの近似とする. このモデルでは S-I ペアが I-I ペアになるレートを λ とし, I が R になるレートを 1 としている. ある時刻 t での S, I, R それぞれの状態のノードの数を S, I, R と表す. $I \sim O(N)$ の時に dI/dt が正である条件がすなわち流行が生じる条件として定義する. これはいったん $I \sim O(N)$ となるまで I が増加したとき更に I が増加する条件であり, $I \sim O(N)$ の安定条件となっている. よって $I \sim O(N)$ のときに $dI/dt = 0$ となる λ

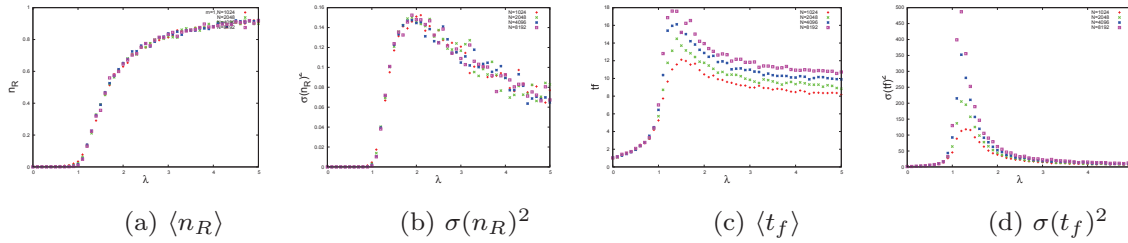


図 2.3 $k = 3, m = 1, N = 1024, 2048, 4096, 8192$

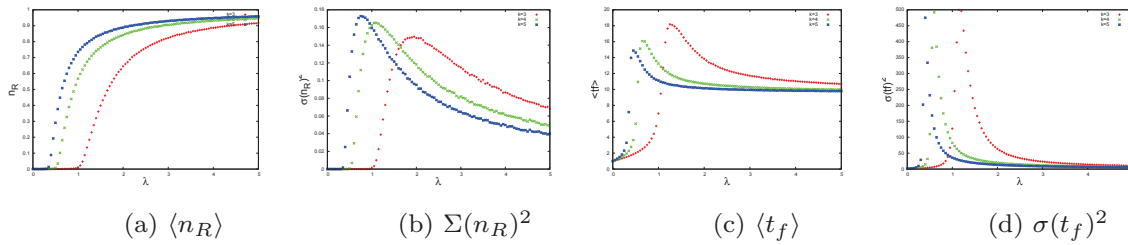


図 2.4 $k = 3, 4, 5, N = 8192$

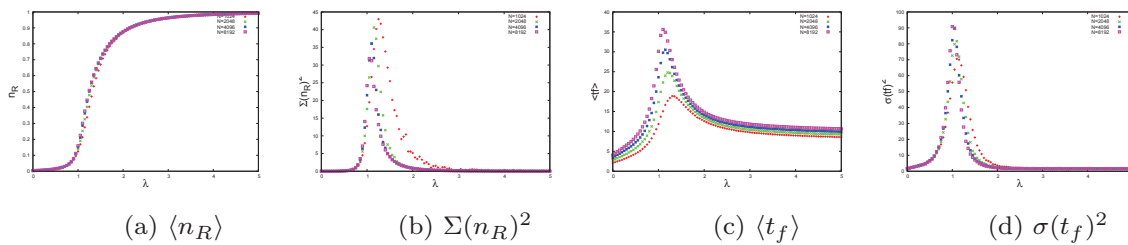


図 2.5 $m = N/256, N = 1024, 2048, 4096, 8192$

を求めればよい。

$$\frac{dI}{dt} = [\text{任意の } S \text{ ノードが } I \text{ になる速度}] - [\text{任意の } I \text{ ノードが } R \text{ になる速度}] \quad (2.1)$$

で求まる。「速度」を「レート」に読み直してよい。「任意の S ノードが I になる速度」については、その時刻での

$$[S - I \text{ ペアの数}] \times \lambda \quad (2.2)$$

で求まる。「任意の I ノードが R になる速度」については、その時刻での

$$I \quad (2.3)$$

がそれにあたる. よって S-I ペアの数を求めることが必要である. ネットワーク上に R ノードが存在しないと考えられる時間領域 $t \ll O(1)$ において, ノードは S か I であり, I ノードは $m = 1$ から始めているので 1 つのクラスタを形成している. このクラスタに隣接する S ノードの数を求める. I ノードクラスタの総次数は kI である. このうちクラスタ内に張られているエッジの数は $I - 1$ であり, エッジ 1 つに対して次数が 2 個対応するので, クラスタに隣接する S ノードの数は

$$kI - 2(I - 1)$$

として得られる. 式 (2.2), (2.3) を式 2.1 に代入すれば

$$\frac{dI}{dt} = \lambda[kI - 2(I - 1)] - I$$

となる. よって $dI/dt = 0$ となる条件として

$$\begin{aligned} \lambda_c [kI - 2(I - 1)] &= I \\ \Rightarrow \lambda_c &= \frac{1}{k - 2(1 - 1/I)} \end{aligned}$$

が得られる. $N \rightarrow \infty$ において $1/I \rightarrow 0$ だから

$$\lambda_c = \frac{1}{k - 2} \quad (2.4)$$

が得られる. 式 (2.4) の結果は図 2.4 の結果によく合っている.

$\lambda \rightarrow \infty$ における $\langle t_f \rangle, \sigma(t_f)^2$ の理論的導出

N ノードからなるネットワークにおける $\langle t_f \rangle_N, \sigma(t_f)_N^2 = \sigma(t_f)^2$ の N 依存性を理論的に解析する. それぞれすべての λ において評価するのは難しいので, $\lambda \gg \lambda_c$ における $\langle t_f \rangle$ を評価することにする. このとき, 初期感染者数 $m \geq 1$ において瞬時にすべてのノードが I 状態となる. この近似のもとでは全連結ネットワークであればつながりによらない. よって $m = N$ を初期条件として, 全員が R 状態になるまでの時間 t_f の分布 $P_N(t_f)$ を求める. 1 つのノードが I 状態から R になるまでの時間 t の分布関数を $p(t)$ とする. まずはこれを求める. ポアソン過程の定義より, レート μ で起こる事象が時間 δt の間に起こる確率は $\mu \delta t$ である. よって事象が時間 δt の間に起こらない確率は $1 - \mu \delta t$ である. 時間 t の間に事象が起こらない確率は, 時間 t を δt の幅で区切った $t/\delta t$ 個の区間それぞれで起こらない確率の積として求められる. 即ち $(1 - \mu \delta t)^{t/\delta t}$ となる. よって時間 t の後に初めて事象が起こる確率 $p(t)$ は

$$\begin{aligned} p(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} (1 - \mu \delta t)^{t/\delta t} \\ &= \mu e^{-\mu t} \end{aligned}$$

で与えられる.

次に $P_N(t_f)$ を求める. ノード i が R 状態になるまでにかかる時間を t_i と置くと, $P_N(t_f)$ は

$$\begin{aligned} P_N(t_f) &= \int_{0 \leq t_i \leq t_f, \text{Max}[t_i]=t_f} dt_1 dt_2 \cdots dt_N p(t_1) p(t_2) \cdots p(t_N) \\ &= N! \int_0^{t_N} dt_{N-1} \int_0^{t_{N-1}} dt_{N-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 p(t_1) p(t_2) \cdots p(t_N) \end{aligned}$$

と書き下せる. $i \neq j$ のとき $t_i \neq t_j$ 即ち同時に R 状態にならないことと, その上で

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = t_f$$

を仮定したときの分布関数を書き下し, $P_N(t_f)$ はその $N!$ 倍となることを利用した.

式 2.5 を計算するために, $p_i(t)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p(t) \\ p_i(t) &= \int_0^t p_{i-1}(t') p(t') dt' \end{aligned}$$

$P_N(t)$ は $p_i(t)$ を使って

$$P_N(t) = N! p_N(t)$$

と書ける. そこで $p_i(t)$ を順に計算する.

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \mu e^{-\mu t} \\ p_2(t) &= \int_0^t \mu e^{-\mu t'} dt' \mu e^{-\mu t} \\ &= 1 - e^{-\mu t} \\ p_3(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\mu t'}) dt' \mu e^{-\mu t} \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-\mu t})^2 \mu e^{-\mu t} \\ &\vdots \\ p_N(t) &= \frac{1}{(N-1)!} (1 - e^{-\mu t})^{N-1} \mu e^{-\mu t} \end{aligned}$$

よって

$$P_N(t) = N (1 - e^{-\mu t})^{N-1} \mu e^{-\mu t} \quad (2.5)$$

が得られる.

2.3 レギュラーランダムグラフ

17

この分布関数から $\langle t_f \rangle_N, \sigma_N(t_f)^2$ を求める.

$$\begin{aligned}\langle t_f \rangle_N &= \int_0^\infty t P_N(t) dt \\ &= \frac{N}{\mu} \int_0^\infty x (1 - e^{-x})^{N-1} e^{-x} dx\end{aligned}$$

$X = e^{-x}$ に変数変換する.

$$\begin{aligned}\langle t_f \rangle_N &= \frac{N}{\mu} \int_0^1 x (1 - e^{-x})^{N-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{N}{\mu} \int_1^0 (1 - X)^{N-1} \log X dX\end{aligned}$$

$\int_1^0 (1 - X)^{N-1} \log X dX$ に部分積分を施して計算を進めると

$$\begin{aligned}\int_1^0 (1 - X)^{N-1} \log X dX &= \left[(1 - X)^{N-1} X (\log X - 1) \right]_1^0 \\ &\quad - \int_1^0 (N - 1)(-1) (1 - X)^{N-2} X (\log X - 1) \\ &= \int_1^0 (N - 1) (1 - X)^{N-2} X (\log X - 1) \\ &= (N - 1) \int_1^0 \left[-(1 - X)^{N-1} \log X dX \right] dX \\ &\quad + (N - 1) \int_1^0 \left[-(1 - X)^{N-2} X + (1 - X)^{N-2} \log X \right] dX \\ \Leftrightarrow N \int_1^0 (1 - X)^{N-1} \log X dX &= (N - 1) \left[-(1 - X)^{N-2} X + (1 - X)^{N-2} \log X \right] dX \\ &= (N - 1) \left[\frac{1}{N(N - 1)} + \int_1^0 (1 - X)^{N-2} \log X dX \right] \\ &= \frac{1}{N} + (N - 1) \int_1^0 (1 - X)^{N-2} \log X dX \\ \Leftrightarrow \langle t_f \rangle_N &= \frac{1}{\mu N} + \langle t_f \rangle_{N-1}\end{aligned}$$

よって

$$\langle t_f \rangle_N = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \quad (2.6)$$

が得られる.

この結果は以下のように考えても妥当である. 独立事象のレートは足し算できる. よって I 状態のノードが N 個存在する初期状態から 1 個が R 状態になり $N - 1$ 個の I 状態のノードが存在する状態になるまでにかかる時間の平均値は

$$\int_0^{\infty} tN\mu e^{-N\mu t} dt = \frac{1}{\mu N}$$

として得られる. I 状態のノードが $N - 1$ 個の状態から終状態までにかかる時間を $\langle t_f \rangle_{N-1}$ と置くと, 式 2.6 が得られる.

同様に $\langle t_f^2 \rangle_N$ を求める.

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle_N &= \mu N \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t})^{N-1} e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{N}{\mu^2} \int_0^{\infty} x^2 (1 - e^{-x})^{N-1} e^{-x} dx \\ \int_0^{\infty} x^2 (1 - e^{-x})^{N-1} e^{-x} dx &= \int_0^1 (\log X)^2 (1 - X)^{N-1} dX \end{aligned}$$

途中 $X = e^{-x}$ に変数変換した.

$$\int (\log X)^2 dX = X \left[(\log X)^2 - 2 \log X + 2 \right] = -(1 - X) \left[(\log X)^2 - 2 \log X + 2 \right] + \left[(\log X)^2 - 2 \log X + 2 \right]$$

を使って計算を進める.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\log X)^2 (1 - X)^{N-1} dX &= \left[\int (\log X)^2 dX (1 - X)^{N-1} \right]_0^1 \\ &\quad + (N - 1) \int_0^1 \int (\log X)^2 dX (1 - X)^{N-2} dX \\ &= (N - 1) \left[\int_0^1 (\log X)^2 \left\{ -(1 - X)^{N-1} + (1 - X)^{N-2} \right\} dX \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^1 \left\{ \log X (1 - X)^{N-1} - \log X (1 - X)^{N-2} \right\} dX \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^1 \left\{ -(1 - X)^{N-1} + (1 - X)^{N-2} \right\} dX \right] \\ \Leftrightarrow N \int_0^1 (\log X)^2 (1 - X)^{N-1} dX &= (N - 1) \int_0^1 (\log X)^2 (1 - X)^{N-2} dX \\ &\quad + \frac{2(N - 1)}{N} N \int_0^1 \log X (1 - X)^{N-1} dX \\ &\quad - 2(N - 1) \int_0^1 \log X (1 - X)^{N-2} dX \\ &\quad + \frac{2}{N} \end{aligned}$$

2.3 レギュラーランダムグラフ

19

だから

$$\begin{aligned}
 \langle t^2 \rangle_N &= \langle t^2 \rangle_{N-1} - \frac{2(N-1)}{\mu N} \langle t \rangle_N + \frac{2}{\mu} \langle t \rangle_{N-1} + \frac{2}{\mu^2 N} \\
 &= \langle t^2 \rangle_{N-1} + \frac{2}{\mu N} \langle t \rangle_N \\
 \Leftrightarrow \langle t^2 \rangle_N &= \frac{2}{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \langle t \rangle_i \\
 &= \frac{2}{\mu^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{\mu^2} \left[\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2} \right]
 \end{aligned}$$

が得られる. よって分散 $\sigma_N(t_f)^2$ は

$$\begin{aligned}
 \sigma_N(t_f)^2 &= \langle t^2 \rangle_N - \langle t \rangle_N^2 \\
 &= \frac{1}{\mu^2} \left[\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right] - \left(\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \right)^2
 \end{aligned}$$

だから

$$\sigma_N(t_f)^2 = \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2} \tag{2.7}$$

となる.

式 (2.6),(2.7) の結果を実験と比較する. $\mu = 1, N = 1024, 2048, 4096, 8192$ のときの式 (2.6),(2.7) における $\langle t_f \rangle_N, \sigma_N(t_f)^2$ を求める. $H_{N,n} = \sum_{k=1}^N 1/k^n$ を「調和数 (harmonic number)」というらしい. MathWorld[12] によると $n = 1$ のときは

$$H_{N,1} \sim \ln N + \gamma \tag{2.8}$$

と近似できるらしい. ただし $\gamma \simeq 0.577$ はオイラー一定数. 式 (2.8) を使うと

$$\begin{aligned}
 H_{1024,1} &\simeq 7.51, H_{2048,1} \simeq 8.20, H_{4096,1} \simeq 8.90, H_{8192,1} \simeq 9.59 \\
 H_{1024,2} &\simeq 1.64, H_{2048,2} \simeq 1.64, H_{4096,2} \simeq 1.64, H_{8192,2} \simeq 1.64
 \end{aligned}$$

が得られ, 図 2.3,2.4,2.5 それぞれの (c),(b) 結果と矛盾しない. 書類上の指導教員である福島先生から「式 (2.6),(2.7) の導出計算はちょっといい加減かも」とコメントを頂いた. 計算結果自体は mathematica の結果と一致しているが, 母関数 $\int_0^\infty dt e^{at} P_N(t)$ を求めて a の微分且つ $a = 0$ で算出する方法もあるようだ.

2.4 $m=1$ の場合の, 様々なネットワークでの実験結果

初期感染者数 $m = 1$ として様々なネットワークで実験した結果を示す. 図 2.6, 図 2.7, 図 2.9 はそれぞれレギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, HY ネットでの結果である. ランダムグラフとは, 平均次数 $\langle k \rangle$ を固定した上でエッジをランダムに張ったネットワークである. エルデシュレニーグラフとも言う*¹.

■ $\langle n_R \rangle$ について 図 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 を見ると, $\langle n_R \rangle$ はある閾値 λ_c を境に 0 から立ち上がり有限の値になり, 単調増加しながらなだらかに $\langle n_R \rangle = 1$ に収束しているように見える. λ_c の値はレギュラーランダムグラフとランダムグラフにおいてほぼ等しく $\lambda_c \simeq 0.25$, HY ネットにおいて $\lambda_c \simeq 0.35$ 程度であり, ネットワークトポロジー (繋がり方) に対する依存性が見られる.

■ $\sigma(n_R)^2$ について 図 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 を見ると, $\sigma(n_R)^2$ は λ_c を境に 0 から立ち上がりネットワークトポロジーによらず $\lambda \simeq 0.6$ あたりでピークを持ち, それ以降はなだらかに減少しているように見える.

■ $\langle t_f \rangle$ について 図 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 を見ると, $\langle t_f \rangle$ は λ_c 付近で急激に増加してピークをもち, その後なだらかに減少しながら N に依存した値に収束しているように見える.

■ $\sigma(t_f)^2$ について 図 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 を見ると, $\lambda < \lambda_c$ において 0 であり, λ_c において鋭いピークを持った後に急激に減少して 0 に収束しているように見える. ピークの値は N に依存して大きくなっており, 発散傾向にあるように見える.

2.5 $m \propto N$ の場合の, 様々なネットワークでの実験結果

初期感染者数 $m = \epsilon N$ として様々なネットワークで実験した結果を示す. 図 2.10, 図 2.11, 図 2.12, 図 2.13 はそれぞれレギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, HY ネットでの結果である. ただし $\epsilon = N/128$ とした.

■ $\langle n_R \rangle$ について 図 2.5, 2.10, 2.11, 2.12 を見ると, $\langle n_R \rangle$ はある閾値 λ_c を境に 0 から立ち上がり有限の値になり, 単調増加しながらなだらかに $\langle n_R \rangle = 1$ に収束しているように見える. λ_c の値はレギュラーランダムグラフとランダムグラフにおいてほぼ等しく $\lambda_c \simeq 0.25$, HY ネットにおいて $\lambda_c \simeq 0.35$ 程度であり, ネットワークトポロジーに対する

*¹ 一般的なエルデシュレニーグラフは, 各ノードペアごとに確率 p でエッジを張るモデルであるが, $N \rightarrow \infty$ において $\langle k \rangle N/2 = N C_2 p$ が成立すれば生成されるネットワークは厳密に一致するらしい [13].

2.5 $m \propto N$ の場合の、様々なネットワークでの実験結果

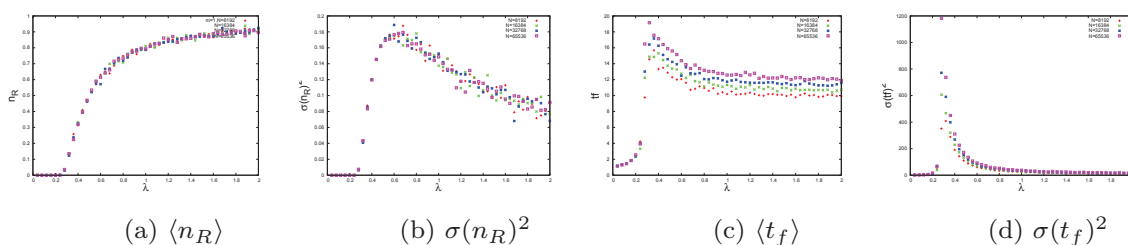


図 2.6 レギュラーランダムグラフでの結果

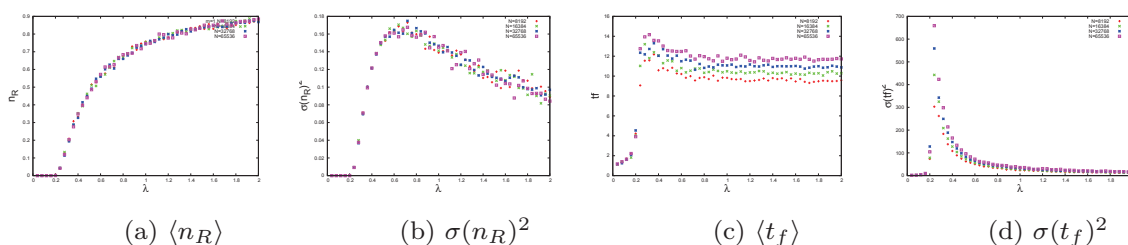


図 2.7 ランダムグラフでの結果

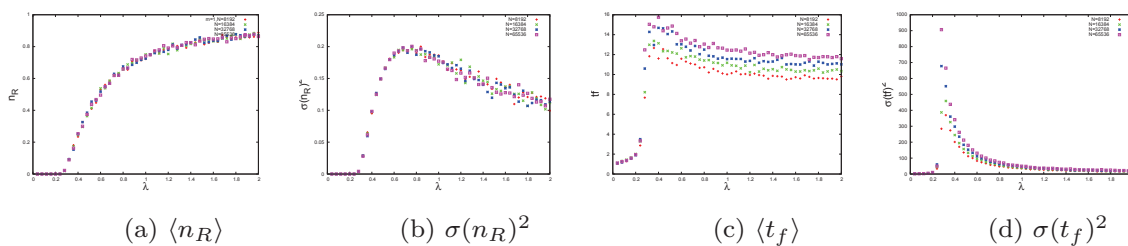


図 2.8 平均場ネットワークでの結果

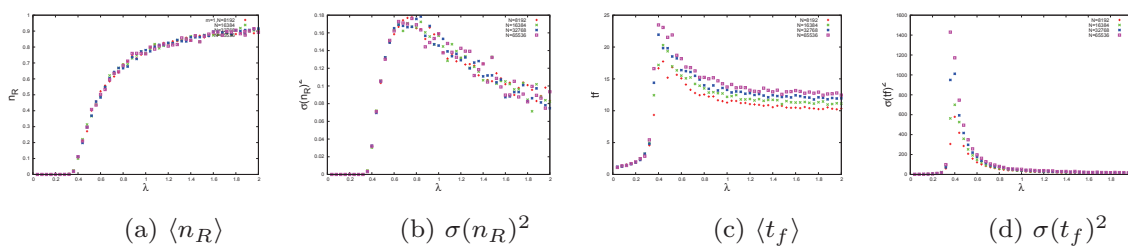


図 2.9 HY ネットでの結果

依存性が見られる.

■ $\Sigma(n_R)^2$ について 図 2.5,2.10,2.11,2.12 を見ると, $\Sigma(n_R)^2$ は λ_c を境に 0 から立ち上がりネットワークトポロジーに応じた鋭いピークを持ち, それ以降はなだらかに減少して 0 に収束しているように見える. ピークの値は N に依存していないように見える.

■ $\langle t_f \rangle$ について 図 2.5,2.10,2.11,2.12 を見ると, $\langle t_f \rangle$ は $\lambda < \lambda_c$ において N に依存しながら増加して λ_c 付近で急激に増加してピークをもち, その後なだらかに減少しながら N に依存した値に収束しているように見える. このピークの値は N について発散傾向があるように見える.

■ $\sigma(t_f)^2$ について 図 2.5,2.10,2.11,2.12 を見ると, $\lambda < \lambda_c$ において 0 から増加しており, λ_c において鋭いピークを持った後に急激に減少して一定値に収束しているように見える. ピークの値は N に依存していないように見える.

2.6 ここまでの考察

■転移点 λ_c 次数 k のレギュラーランダムグラフとランダムグラフの転移点 λ_c は $\lambda_c = 1/(k-2)$ として得られる. これは図 2.6,2.10 の結果と概ね一致している. HY ネットの場合, \bar{k}^2, \bar{k} の値はレギュラーランダムグラフと等しいが, 転移点はレギュラーランダムグラフよりも大きい. レギュラーランダムグラフの転移点を理論的に導く際, 「ループのないネットワーク」を仮定した. これはネットワークがベータ格子のときに厳密に成立する. HY ネットはグループ内は完全グラフであるからこの仮定が成り立たないため, 転移点がずれると考えられる. ランダムグラフは転移点近傍では「ループのないネットワーク」と考えてもよい近似になっていることも分かる.

■ $m = 1$ における $\sigma(N_R)^2$ の異常性 $\Sigma(n_R)^2$ と $\sigma(n_R)^2$ の違いに注意して, 図 2.4,2.6,2.8 の結果は, $m = 1$ のときに $\sigma(N_R)^2 \approx N^2$ であることを意味している. 一方で図 2.5,2.10,2.12 の結果は, $m = \epsilon N$ のときに $\sigma(N_R)^2 \approx N$ を意味している. N_R が一般的な分布, 例えばガウス分布に従う場合, $\sigma(N_R)^2 \approx N$ となるはずだから, $m = 1$ の場合 N_R は特異な分布をしている事が示唆される. この問題については §3 にて詳しく取り扱う.

■ $\lambda \rightarrow \infty$ における $\langle t_f \rangle$ の収束値 図 2.4,2.6,2.8, 2.5,2.10,2.12 の結果は, $\lambda \rightarrow \infty$ において $\langle t_f \rangle$ の N に依存する収束値が存在することを示唆している. これは 2.3.2 において理論的に求めた.

■ $m = \epsilon N$ における $\Sigma(n_R)^2, \sigma(t_f)^2$ の特異性 図 2.5,2.10,2.12 の結果は, $\Sigma(n_R)^2$ のピーク位置やピーク値が N について収束している様子からカuspシンギュラリティを持つこ

2.6 ここまでの考察

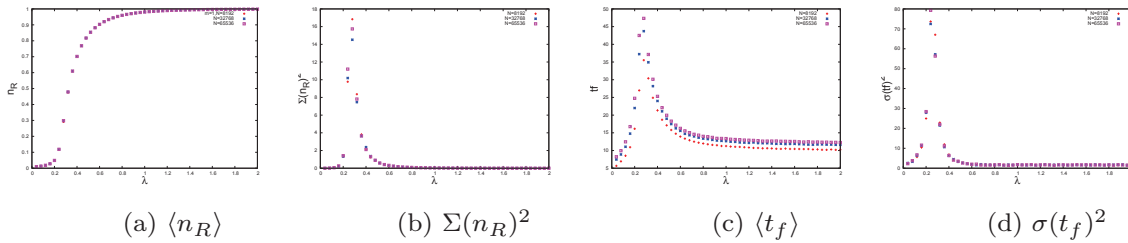


図 2.10 レギュラーランダムグラフでの結果

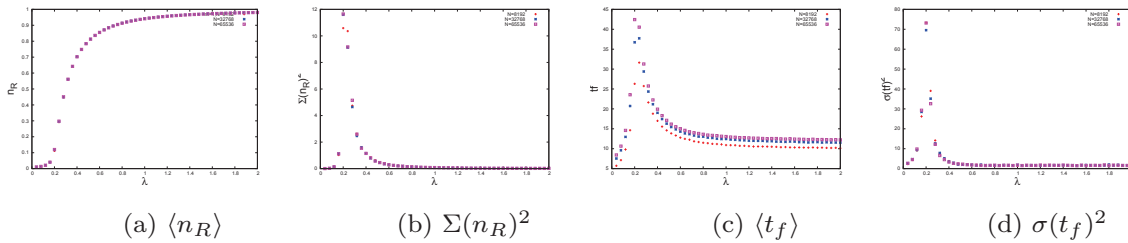


図 2.11 ランダムグラフでの結果

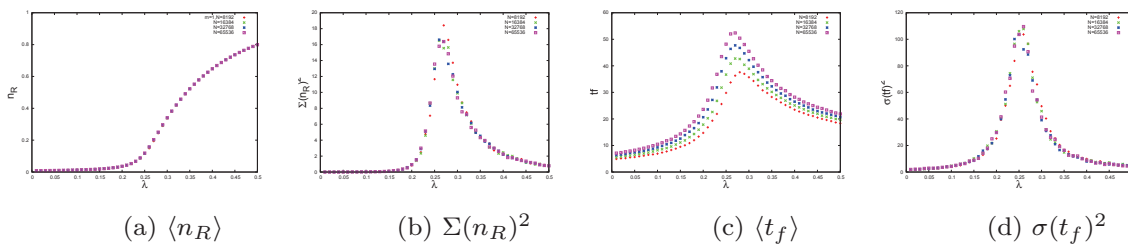


図 2.12 平均場ネットワークでの結果

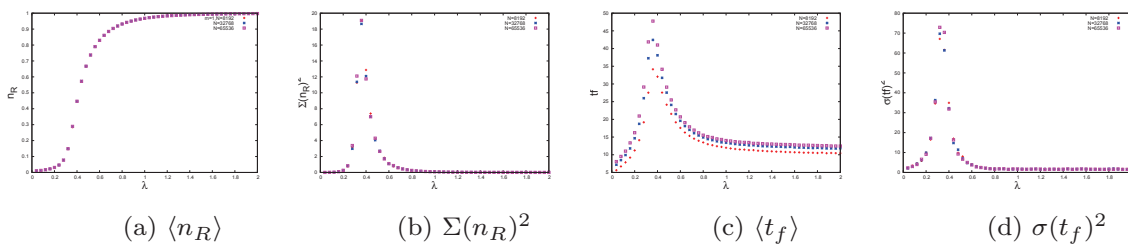


図 2.13 HY ネットでの結果

とが示唆される. また, 図 2.5, 2.10, 2.12 の結果からも同様に $\sigma(t_f)^2$ がカスプシンギュラリティを持つことが示唆される. この特異性の指数にネットワークのつながりの違いが現れるか. §2.7 で調べた.

2.7 カスプエクスポネントの評価に向けて

レギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, 平均場ネットワーク, HY ネットをカスプエクスポネントで区別できるか. より詳細な数値実験を行った.

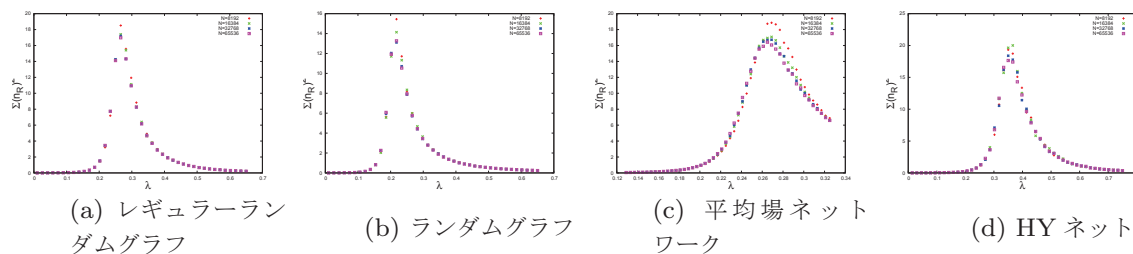
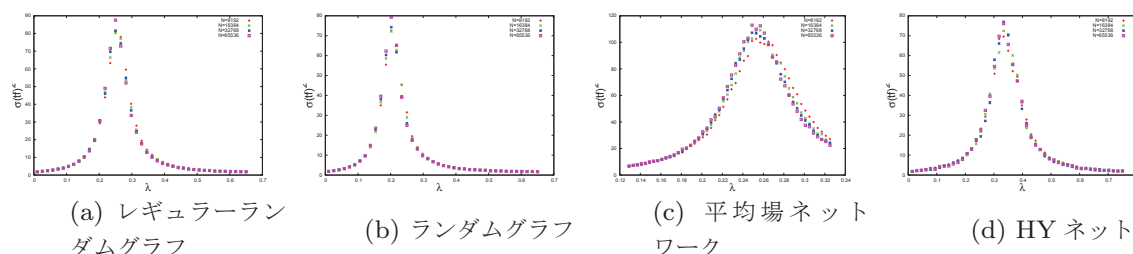
2.7.1 数値実験結果

図 2.142.15 レギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, 平均場ネットワーク, HY ネットそれぞれにおいて, $m = \epsilon N$ としたときの $\Sigma(n_R)^2, \sigma(t_f)^2$ の λ 依存性を λ_c 近傍でプロットした. $\langle k \rangle = 6, N = 16384, 32768, 65536$. 計算機のスペックの問題で $N < 70000$ の範囲でしか数値実験出来ない. この範囲では N について収束しておらず, $\lambda \approx \lambda_c$ での指数を求めることは出来なかった*2.

2.8 結論

本章では, 季節性インフルエンザの流行を念頭に置いた SIR 模型の数値実験によって検証した. 初期感染者数 m が $m = 1$ の場合と $m = \epsilon N$ の場合では n_R, t_f の揺らぎが異なる振る舞いを示すことを示した. また, レギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, 平均場ネットワーク, HY ネットの4種類のネットワークでの振る舞いの違いについては, レギュラーランダムグラフ, ランダムグラフ, 平均場ネットワークの違いは明示的には示すことが出来なかった. HY ネットは他の3つのネットワークに比べ, 転移点 λ_c が大きな値を持つことがわかった. レギュラーランダムグラフに関しては $\lambda_c, \lambda \rightarrow \infty$ における $\langle t_f \rangle, \sigma(t_f)^2$ を理論的に導出した. $m = \epsilon N$ のとき, $\sigma(n_R)^2, \sigma(t_f)^2$ は転移点近傍でカスプのような振る舞いを示したが, その指数を数値的・理論的に求めることは出来なかった. 数値実験によって転移点近傍の振る舞いを見るためには, より大きな N で計算出来るようなアルゴリズムの工夫などが必要になる. また, 物理量の揺らぎに関する理論的考察は手付かずであり, これらは今後の課題である.

*2 「有限サイズスケールリングはやってみましたか」という至極真つ当なご指摘をいただくが, 今の私のプログラミング能力では, カスプ特異性の有限サイズスケールリングをすることもままならなかった結果である.

図 2.14 $\Sigma(n_R)^2$ 図 2.15 $\sigma(t_f)^2$

参考文献

- [1] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, and J.F.F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 80, No. 4, p. 1275, 2008.
- [2] A.L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [3] F. Liljeros, C.R. Edling, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley, and Y. Aberg. The web of human sexual contacts. *arXiv preprint cond-mat/0106507*, 2001.
- [4] R. Albert and A.L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, Vol. 74, No. 1, p. 47, 2002.
- [5] M.E.J. Newman, S. Forrest, and J. Balthrop. Email networks and the spread of computer viruses. *Physical Review E*, Vol. 66, No. 3, p. 035101, 2002.
- [6] K. Yuta, N. Ono, and Y. Fujiwara. A gap in the community-size distribution of a large-scale social networking site. *arXiv preprint physics/0701168*, 2007.
- [7] 西尾治, 秋山美穂, 愛木智香子, 杉枝正明, 福田伸治, 西田知子, 植木洋, 入谷展弘, 篠原美千代, 木村博一. ノロウイルスによる食中毒について. *食品衛生学雑誌*, Vol. 46,

No. 6, pp. 235–245, 2005.

- [8] 山谷睦雄. 季節性インフルエンザ (特集最近の感染症にどう挑むか)–(最近注目されている感染症への対応). 診断と治療, Vol. 98, No. 8, pp. 1287–1291, 2010.
- [9] 国立感染症研究所 感染症情報センター谷口室長 (2012 年現在) より, メールにて教えていただいた.
- [10] Y. Chen, G. Paul, S. Havlin, F. Liljeros, and H.E. Stanley. Finding a better immunization strategy. *Physical Review Letters*, Vol. 101, No. 5, p. 58701, 2008.
- [11] R. Cohen, S. Havlin, and D. Ben-Avraham. Efficient immunization strategies for computer networks and populations. *Physical review letters*, Vol. 91, No. 24, p. 247901, 2003.
- [12] Jonathan Sondow and Eric W Weisstein. "harmonic number" from mathworld—a wolfram web resource. <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html>, 2012.
- [13] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, Vol. 5, pp. 17–61, 1960.

第3章

感染症流行の規模に関する予測不可能性

この章は事実上の指導教員である佐々真一教授との共著論文 [1] の日本語草稿に説明を加筆したものである。数行で追加できるものは本文中に、説明が長くなりそうなものは最終章 §3.5 に記した。また、修士論文提出後に文献検索をした結果、確率過程の研究分野において 1950~70 年代にかけて盛んに研究されていたことがわかった。詳しくは共著論文で説明するが、関連性が強い研究をまとめたレビューはこれだ [2]。

3.1 イントロダクション

感染症の流行が生じる前に想定される感染者数を見積ることは、その対策を考える上で重要である。しかし、実際の社会においては人と人との様々なタイプが接触があるので、感染が広がっていく正確な数理モデルを提案することは簡単ではない。それでは、感染の広がり方を単純なモデルで記述したときには、感染症が流行するかどうかについて決定的な予言をすることができるだろうか。その場合でも、例えば、1 人の感染者からスタートした場合、感染率が高くても、その人がたまたま誰にも感染させることなく治癒すれば、運良く流行が起こらないこともあり得る。つまり、初期の感染の広がり方が十分時間が経った後の状態に大きな影響を与え得る。

もっとも単純な感染症伝搬のモデルとしてポアソン過程 SIR モデルを考える。人と人の接触をネットワークによって表現し、SIR モデルのパラメータである感染レート λ (単位時間あたりの感染確率) が均一だとする。このモデルは、近年では、様々なネットワークで研究されている [3]。例えば、様々なネットワークにおいて起こる普遍的な現象として、 λ がしきい値 λ_c を超えると感染症がマクロに広がり流行が発生することが知られている。つまり、流行の発生が相転移現象として記述されるのである。この現象は統計力学の問題

として研究され, 平均場理論 [4, 5], 次数分布の母関数を使った理論 [6, 7] によって解析されている.

SIR 模型の相転移現象は, 例えば, パーコレーションの相転移とは異なった様相をもっている. SIR 模型を相転移現象としてみたときの秩序変数は最終感染者数密度 n_R であり, 非流行発生相 ($\lambda > \lambda_c$) では 0 の値をとり, $\lambda = \lambda_c$ においてゼロから連続的にたちあがる. これはパーコレーションと同じであるが, パーコレーションにおいては, 熱力学極限において確率 1 で秩序変数が確定した値をもつ. それに対して, SIR 模型では熱力学極限において最終感染者数密度が一意に定まらないのである. 実際, ネットワーク上の離散時間 SIR 模型においては, 流行相において秩序変数が 0 と有限値に分岐する現象が生じることが報告され [8], 最終感染者の分布が理論的に考察されている [9]. また, SIR 模型以外の感染症模型においても同様の現象が確認されている [10, 11]. 秩序変数の分岐は, Ising 模型の低温相で見られるように, 対称性の破れを伴うときは自明に理解できる. しかし, この問題は対称性の破れとして理解されるものではないだろうし, 非流行相での値である 0 と有限値の分岐の例は標準的でない. つまり, この分岐が起こったときには, 熱力学極限における感染者密度の値を「0 でも 1 でもない有限の値」の確率でしか決定できなくなる. これは, いわば, 「ネットワーク上の感染症流行の規模に関する予測不可能性」ともいふべき現象である. ただし, このような場合でも, 流行相において感染者密度の値が 0 をとる確率を考えることは可能であることに注意したい.

本論文では, SIR 模型の相転移現象において, 秩序変数の分岐が起こる明晰な描像を与えたい. まず, もっとも簡単なネットワークのひとつであるレギュラーランダムグラフを考える. その上で定義されるポアソン過程 SIR 模型に対して, 流行相においてこの分岐が起こることを数値的に確認する. 次に, 模型を平均場近似によって感染のひろがりのダイナミクスを 2 変数のマスター方程式で書く. 系のサイズが十分大きい条件下で, その振る舞いをさらに Langevin 方程式で記述する. この Langevin 方程式を解析することで分岐が生じる機構を理解し, 転移点近傍で感染者数密度の値が 0 をとる確率を計算する.

3.2 モデル

N ノードからなる次数 k のレギュラーランダムグラフ G を考える. 各ノード $x \in G$ に対して, 隣接する k 個のノードの集まりを $B(x)$ と記す. 各ノードには状態 σ が定義され, $\sigma = S, I,$ and R の 3 状態をとり, それぞれ, Susceptible, Infectible, そして, Recovered を表すものとする. 系全体の状態は, $[\sigma(x)]_{x \in G}$ で指定され, 以下, これを σ とコレクティブにあらわす. ネットワーク上の SIR 模型とは, σ に対して遷移率 $W(\sigma \rightarrow \sigma')$ が与えられた連続時間マルコフ過程である. ここで, 遷移率 W は, I 状態にある隣接ノード

からの感染率 λ と I 状態にあるノードからの自然治癒率 μ をパラメータとして,

$$W(\sigma \rightarrow \sigma') = \sum_{x \in G} w(x),$$

$$w(x) = \lambda[\delta(\sigma_x, S)\delta(\sigma'_x, I) \sum_{y \in B(x)} \delta(\sigma_y, I)] + \mu\delta(\sigma_x, I)\delta(\sigma'_x, R) \quad (3.1)$$

と与えられる. 以下では一般性を失うことなく $\mu = 1$ と時間を無次元化する. 与えられた任意のサンプル時系列に対して, 十分に時間がたつと, グラフ G から I 状態のノードがなくなり, それ以上時間変化しなくなる. この状態を終状態とよぶ. 終状態における R 状態のノード数の N に対する割合 n_R を「最終感染者数密度」とよび, 感染症の蔓延度合いの指標として使う. 初期条件として, ノードをランダムにひとつ選びそのノードを I 状態とし, その他の全てのノードは S 状態にあるとする.

例として, $k = 3$, $N = 8192$ の場合, 様々な λ に対して, 数値実験を行い, 最終感染者数密度を調べる. 試行ごとに n_R の値は異なり, その頻度分布 $p(n_R; \lambda)$ を得ることができる. 図 3.2 は $\log p$ のカラー表示であり, λ がある閾値を超えたところから最終感染者数が有限になることを示唆している. 注目すべきは, このような相においても, n_R がゼロの近くにも有限の頻度をもっていることである. 図 3.2 の挿入図には $\lambda = 1.5$ の場合の $\log p$ のグラフが示されており, 分岐している様子がはっきり見える. 同じようなグラフは, [10] 等で提示された. この頻度が熱力学極限で残ることを確かめるために, 図 3.2 において, $n_R < 1/16$ の頻度と λ の関係のサイズ依存性を示した. この結果によると, 熱力学極限において, ある λ_c が存在し, それ以下では確率 1 で $n_R = 0$ となるが, それ以上ではある有限の確率 $q(\lambda)$ が確定し, その確率で n_R はゼロでないある値をとり, $1 - q(\lambda)$ の確率で $n_R = 0$ となることを示唆している. この論文で理解したいのは, この現象である.

3.3 解析

我々が理解したい現象はネットワークの構造の詳細に依存しないと予想し, $s \equiv \sum_x \delta(\sigma_x, S)/N$ および $i \equiv \sum_x \delta(\sigma_x, I)/N$ についての連続時間マルコフ過程によって近似的に記述しても調べたい現象は変わらないと期待する. 具体的には, $(s, i) \rightarrow (s, i - 1/N)$ の遷移率は Ni で与えられるので, $(s, i) \rightarrow (s - 1/N, i + 1/N)$ の遷移率を $\lambda k N s \psi$ とおき, ψ を以下のように仮定する. まず, ψ は, 任意に選んだ $\sigma_x = S$ となるノード x に対し, $\sigma_y = I$ となる y が x に隣接している確率である. ところで, 状態 I にあるサイトは孤立することはなく初期感染のノードからひろがっていき, ランダムグラフの loop の大きさは $O(\log(N))$ のオーダーなので, このひろがりにはツリー状 (局所的にベレー格子状) である. このツリー状にひろがった状態 I のクラスターからでてくるボンドの総数は近似的に $Ni(k - 2)$ とできる [12], 従って, ψ を全ボンドの総数 Nk に対するこのボンド数の比とし

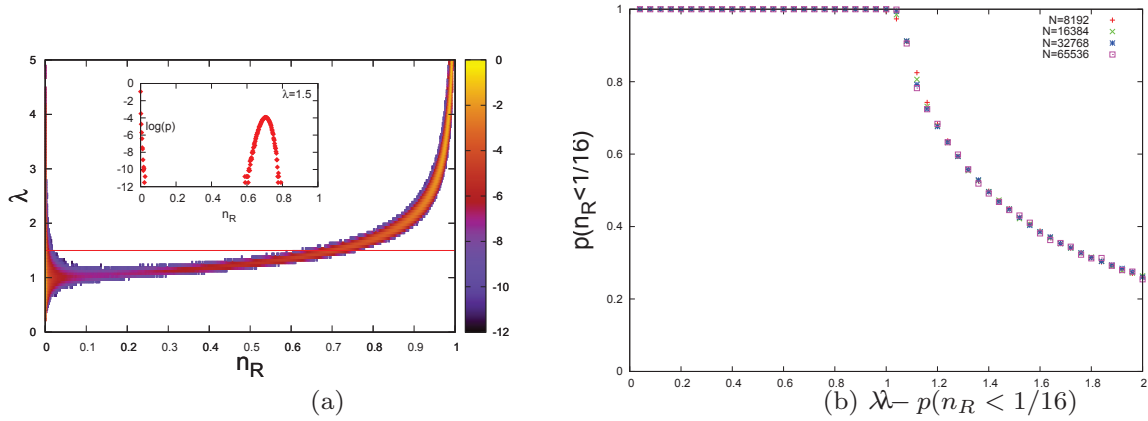


図 3.1 レギュラーランダムグラフ上の SIR 模型の数値実験結果. 左の図は, 横軸 n_R , 縦軸 $\lambda, \log p$ をカラー表示した. λ が閾値を超えたところで $\log p$ が有限の値をとることが分かる. 左の図の挿入図は, 横軸 n_R , 縦軸 $\log p, \lambda = 1.5$. 分岐している様子が見られる. $N = 8192, m = 1$. 右の図は, 横軸 λ , 縦軸 $p(n_R < 1/16)$. $N \rightarrow \infty$ においても, 流行層において $n_R < 1/16$ となる確率が有限に存在することが分かる.

て与える. 以下, $k = 3$ とする.

このマルコフ過程において, 時刻 t において (s, i) の値をとる確率を $P(s, i, t)$ とする. このとき, $P(s, i, t)$ はマスター方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, i, t)}{\partial t} = & N \left(i + \frac{1}{N} \right) P \left(s, i + \frac{1}{N}, t \right) - NiP(s, i, t) \\ & + N\lambda \left(s + \frac{1}{N} \right) \left(i - \frac{1}{N} \right) P \left(s + \frac{1}{N}, i - \frac{1}{N}, t \right) - N\lambda siP(s, i, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

を満たす. ここで, N が十分大きいという条件を課して, このマスター方程式を $1/N$ で展開し,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, i, t)}{\partial t} = & -\partial_i \left\{ [(\lambda s - 1) i P(s, i, t)] - \partial_i \left[\frac{(\lambda s + 1) i}{2N} P(s, i, t) \right] + \partial_s \left[\frac{\lambda si}{2N} P(s, i, t) \right] \right\} \\ & -\partial_s \left\{ -[\lambda si P(s, i, t)] - \partial_s \left[\frac{\lambda si}{2N} P(s, i, t) \right] + \partial_i \left[\frac{\lambda si}{2N} P(s, i, t) \right] \right\} \quad (3.3) \\ & + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (3.4) \end{aligned}$$

を得る. $O(1/N^2)$ の剰余項を無視できると仮定すると, これはフォッカープランク方程式である [13]. このフォッカープランク方程式について, 今回の分岐現象を示す解析解は見

つかっていない. フォッカープランク方程式の数値解や, 解析解を求める試行錯誤の詳細については 3.5.2 を参照のこと.

このフォッカープランク方程式 (3.4) は, 次のランジュバン方程式の確率密度の時間発展として与えられることを直接的な計算で確かめることができる. 計算の詳細は 3.5.3 を参照のこと. ここには結果だけ示すと,

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\lambda s i - \sqrt{\frac{\lambda s i}{N}} \cdot \xi_1 \\ \dot{i}(t) = \lambda s i - i + \sqrt{\frac{\lambda s i}{N}} \cdot \xi_1 + \sqrt{\frac{i}{N}} \cdot \xi_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

となる. ただし ξ_i はガウシアンホワイトノイズあり, $\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t')$ を満たす. (3.5) 式において ξ_1, ξ_2 の前にある \cdot は伊藤の意味での積を表す.

このランジュバン方程式 (3.5) の数値実験結果を示す. 式 (3.5) を数値実験のために離散化する

$$\begin{cases} s(t + \Delta t) = s(t) - \lambda s(t) i(t) \Delta t - \sqrt{\frac{\lambda s(t) i(t)}{N}} \Delta t N_1(0, 1) \\ i(t + \Delta t) = i(t) + (\lambda s(t) i(t) - i(t)) \Delta t + \sqrt{\frac{\lambda s(t) i(t)}{N}} \Delta t N_1(0, 1) + \sqrt{\frac{i(t)}{N}} \Delta t N_2(0, 1) \end{cases} \quad (3.6)$$

となる. ただし $N_i(0, 1)$ は平均 0, 分散 1 のガウス乱数. 図 3.2 に初期条件を $(s_0, i_0) = (1 - 1/N, 1/N)$ としたときの実験結果を示した. SIR 模型で見られたものと同じ分岐現象が見られる. 従って, (3.5) 式を解析することで分岐現象を理解することに帰着された.

次に, 変数 $Y = \sqrt{iN}$ を導入して, (3.5) を書きなおすと,

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{1}{N} \left[-\lambda s Y^2 - \sqrt{\lambda s Y^2} \cdot \xi_1 \right] \\ \dot{Y} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda s - 1) Y - \frac{1}{4} (\lambda s + 1) \frac{1}{Y} \right\} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda s} \cdot \xi_1 + \frac{1}{2} \sqrt{1} \cdot \xi_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

を得る. (3.5) 式にあったノイズ ξ_1, ξ_2 と変数 i の乗算が, (3.7) 式には表れないことに注意せよ. ランジュバン方程式の変数変換については 3.5.4 を参考のこと. この式において, 最終状態における n_R の確率分布が分かればよいが, これを直接求めるのはまだ簡単ではない. そこで, 熱力学極限において $n_R > 0$ となる確率 $q(\lambda)$ を考える. $n_R \neq 0$ の場合には, ある時刻で $Y \simeq O(N^{1/2})$ となっている. したがって, (3.7) 式においてその事象が発生する確率を求める.

ところで, 式 (3.7) は s の特徴的な時間尺度が Y の特徴的な時間尺度の N 倍であることをいっている. したがって, N が十分大きいとき, Y が運動しているとき s はほとんど変化しないと考えるよい. 特に, 時間が $O(N)$ より短い範囲では, $s = 1$ とおいてよい. この時間範囲においては, 式 (3.7) は Y のみのランジュバン方程式

$$\dot{Y} = -\partial_Y U(Y) + \sqrt{2D} \xi \quad (3.8)$$

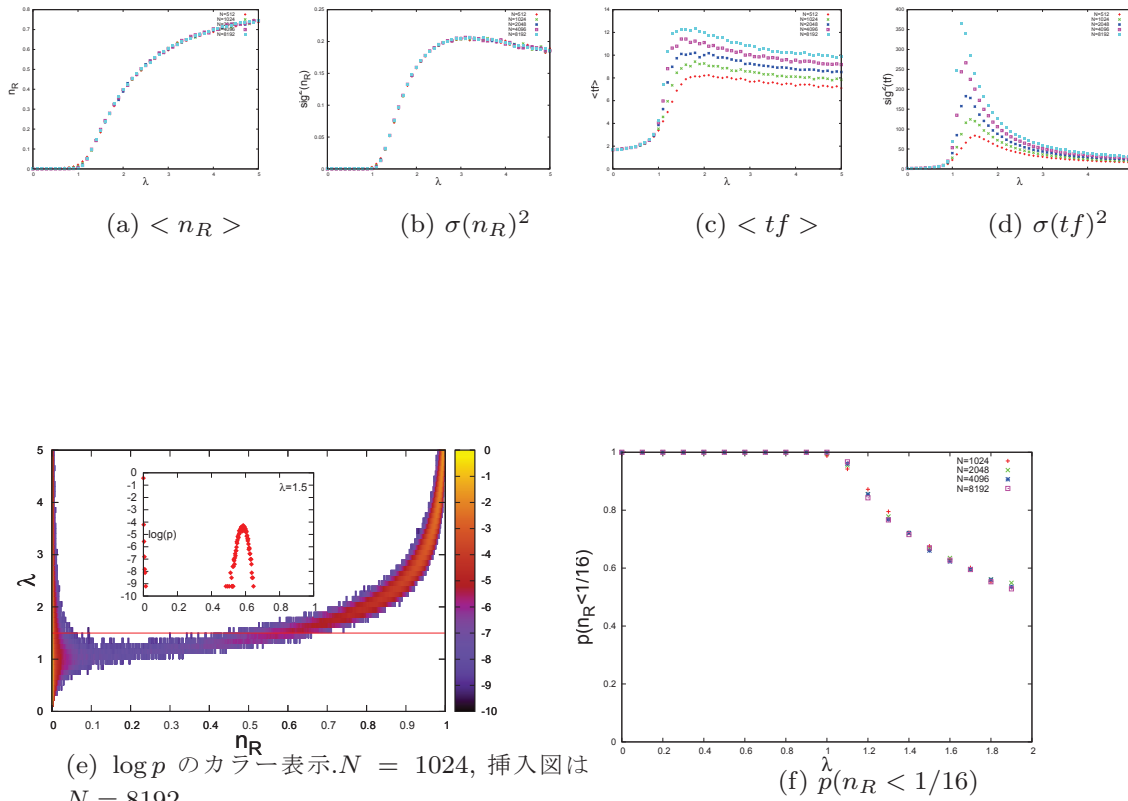


図 3.2 ランジューバン方程式 (3.5) の数値実験結果. $m = 1, N = 1024, 2048, 4096, 8192$. レギュラーランダムグラフにおける SIR 模型の結果 (図 2.3, 3.2, 3.2) と同じ分岐現象が起こることを確認した.

とかける. ただし, $D = (\lambda + 1)/8$ であり, ポテンシャル $U(Y)$ は

$$U(Y) = -\frac{1}{4}(\lambda - 1)Y^2 + \frac{1}{8}(\lambda + 1)\log(Y) \tag{3.9}$$

である. ξ はノイズ強度 1 のガウスノイズであり, ノイズの合成 $\sqrt{\lambda}/2 \cdot \xi_1 + 1/2 \cdot \xi_2 = \sqrt{\lambda + 1}/2 \cdot \xi$ を行った. 初期条件は $Y(0) = 1$ である. (3.8) 式は N に依存しないことに注意したい. したがって, この方程式で $Y \rightarrow \infty$ となる解は, (3.7) 式において $Y \simeq O(N^{1/2})$ となる事象が生じることに相当するだろう. 以下では, (3.8) 式において $Y \rightarrow \infty$ となる解が生じる確率を $q(\lambda)$ と同一視し, この確率を議論する.

3.5.5 にフォッカープランク方程式 (3.4) において $s = 1, I = Ni$ とした数値解を載せた.

時刻 t で Y の値をとる分布を $Q(Y, t)$ と書くと, $Q(Y, t)$ は

$$\partial_t Q(Y, t) = -\partial_Y \{ [\partial_Y U(Y)] Q(Y, t) \} + D \partial_Y^2 Q(Y, t) \tag{3.10}$$

を満たす. 初期条件は $Q(Y, 0) = \delta(Y, 1)$ である. 式 (3.10) は式 (3.4) において $s = 1, Y = \sqrt{Ni}$ としても導くことができる. 3.5.6 を参照のこと.

まず, ポテンシャルの $U(Y)$ の概形を調べる. すべての λ において $\lim_{Y \rightarrow +0} U(Y) = -\infty$ である. $\lambda < 1$ ならば $U(Y)$ は単調増加で $\lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) \rightarrow \infty$ である. $1 < \lambda$ ならば $\lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = -\infty$ を満たし, $Y = Y_*$ にピークを持つ. ここで

$$Y_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \quad (3.11)$$

である. 参考のために, $\lambda = 0.5, 1.2$ のときの概形を図 3.3 に示す.

最初に, $\lambda < 1$ の場合を調べる. このとき, $U(Y)$ は Y の単調増加関数であり, ランジュバン方程式 (3.8) の解で $Y \rightarrow \infty$ となる確率はゼロであろう. 実際, 十分に時間がたてば確率 1 で軌道は $Y = 0$ に吸収されることが分かる. つまり, $q(\lambda) = 0$ となる.

次に, $\lambda > 1$ の場合を調べる. ランジュバン方程式 (3.8) の解でもし Y が Y_* を超えたら, $Y \rightarrow \infty$ となる確率は高い. 図 3.3 において, Y が Y_* まで至ったときに $Y \rightarrow \infty$ となる確率を式 (3.8) の数値実験で, 初期条件を $Y = Y_*$ としたところから始めて $Y \rightarrow \infty$ となる確率として求めた. この結果から, その確率が λ によらないと仮定し, Y が Y_* をいつかは超える確率を評価する. $Y = 1$ から $Y = Y_*$ への遷移レートを W とすると, $t = 0$ で $Y = 1$ にいるとき, $t = \tau$ で $Y = Y_*$ にいる確率 $p(Y(\tau) = Y_* | Y(0) = 1)$ が $p(Y(\tau) = Y_* | Y(0) = 1) = W\tau$ とのように τ に比例するような τ の範囲があるだろう. 図 3.4 に式 (3.8) の数値実験で τ の分布を求めてプロットした. $\lambda \approx \lambda_c$ においてピークをもち, 明らかに $p(Y(\tau) = Y_* | Y(0) = 1) = W\tau$ となる τ の領域があることがわかる. この τ の領域において, 元の SIR 模型を考えれば $Y = 1$ から $Y = 0$ は治癒レート 1 で遷移しており, 他方レート W で Y_* を越えるので, $q = W/(1+W)$ と求められる. ここで, 確率 $q(\lambda)$ は 0 でも 1 でもない有限の値をとる. このように流行相における分岐現象を明快に理解することができた. 転移点 λ_c は,

$$\lambda_c = 1 \quad (3.12)$$

である. 図 3.3 はランジュバン方程式 (3.8) の数値実験を繰り返し, $Y = 1$ からスタートして Y_* に至る割合を λ についてプロットした. この割合は転移点近傍では線形に立ち上がり, $Y_* < 1$ となる $\lambda > 5/3$ において 1 となっている.

最後に, 定量的に $q(\lambda)$ を計算する. ただし, 一般的な場合ではなく, $\lambda = \lambda_c + \epsilon$ において ϵ が小さい正の数の場合を考える. このとき $Y_* \simeq O(\epsilon^{-1/2}), U(Y_*) \simeq O(\log \epsilon)$ という ϵ 依存性を持つ. $(Y_*, U(Y_*))$ と $(1, U(1))$ を結ぶ直線の傾きは $\epsilon \rightarrow 0$ において $(U(Y_*) - U(1))/(Y_* - 1) \simeq \sqrt{\epsilon} \rightarrow 0$ であるから, $Y = 1$ から $Y = Y_*$ への遷移は, 拡散係数 $D = (\lambda + 1)/8$ の自由ブラウン運動によると考えてよい. したがって, 遷移時間 τ_{tr} は

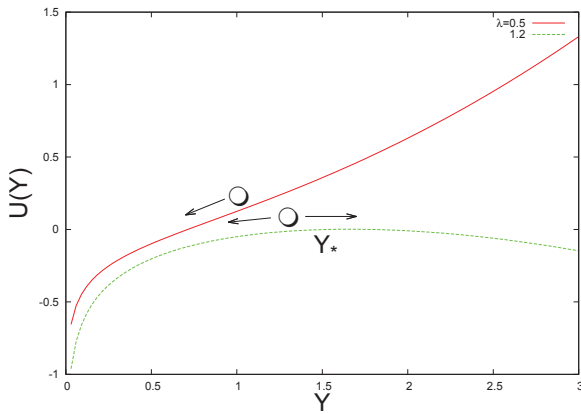


図 3.3 $U(Y)$ の概略図. $\lambda = 0.5$ のとき (red line), Y の単調増加関数であり, 時間がたてば確率 1 で軌道は $Y = 0$ となる. $\lambda = 1.2$ のとき (green line), $Y_* = \sqrt{11}/2$ にピークをもち, Y が Y_* を超えたら $Y \rightarrow \infty$ となる確率は高い.

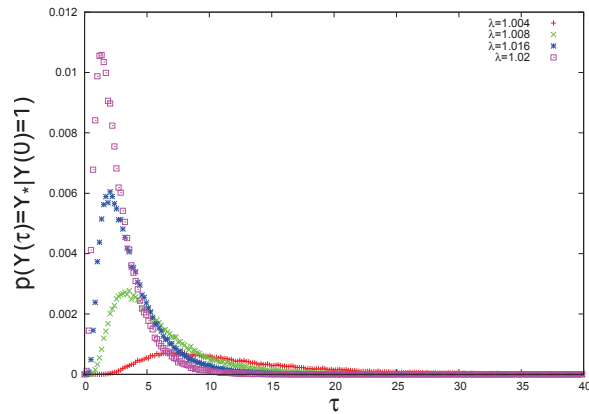


図 3.4 ランジュバン方程式 (3.8) の数値実験で, $Y = 1$ から $Y = Y_*$ への遷移にかかる時間 τ の分布 $pp(Y(\tau) = Y_* | Y(0) = 1)$ を求めた. 明らかに $pp(Y(\tau) = Y_* | Y(0) = 1) \propto W\tau$ となる τ の領域が存在することが分かる.

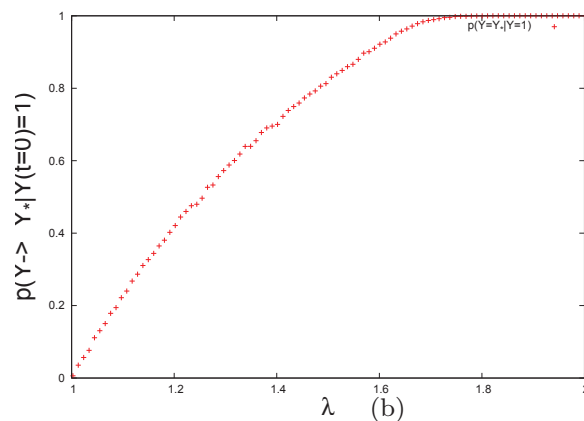
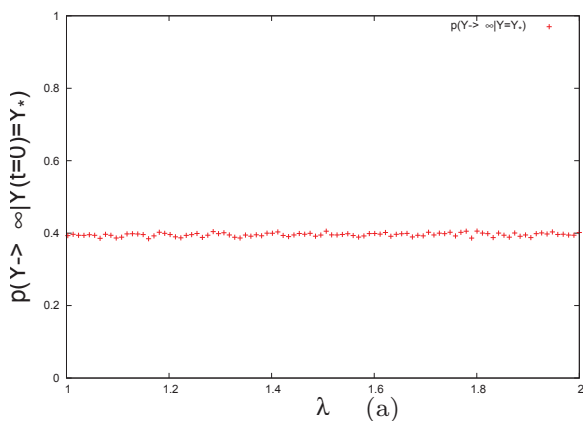


図 3.5 左の図はランジュバン方程式 (3.8) の数値実験における確率 $p(Y_* \rightarrow 0)$. $\lambda > \lambda_c$ において λ によらず $p(Y_* \rightarrow 0) = 0.4$ 程度である. 右の図はランジュバン方程式 (3.8) の数値実験結果. 繰り返し実験を行い, $Y = 1$ から始めて任意の時間で Y_* に至る割合 p .

$Y_*^2/(2D) = 1/\epsilon + O(\epsilon^0)$ と評価される. 遷移レート W はその逆数なので, $W = \epsilon + O(\epsilon^2)$ を得る. 従って,

$$q(\lambda) = \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (3.13)$$

を得る. 図 3.4 は式 (3.7) の数値実験から得た $n_R > 0.003$ となる頻度 $p(n_R > 0.003)$ ($\simeq q(\lambda)$) を $\epsilon = \lambda - 1$ の関数としてプロットした. その結果は, 解析から期待される結果 $p(n_R > 0.003) = \epsilon + O(\epsilon^2)$ と一致している. 図 3.4 は式 (3.7) の数値実験から得た $n_R > 0.003$ となる頻度 $p(n_R > 0.003)$ ($\simeq q(\lambda)$) を $\epsilon = \lambda - 1$ の関数としてプロットした. 式 (3.13) と同じ $p(n_R > 0.003) \simeq \epsilon^1$ の結果が得られた.

3.4 結論と注釈

この論文では, 我々は感染症流行の規模に関する予測不可能性について, その振る舞いを有効的に記述するランジュバン方程式の解析によって新しい知見を得た. すなわち, 流行相においては, ポテンシャル $U(Y)$ は極大点をもち, 解が無限に逃走するかゼロに収束するかに分岐する現象として定式化することができた. その描像にもとづいて, 転移点近傍で感染症が流行する確率を計算した.

この論文では, もっとも簡単な状況を調べたが, 様々なモデルに適用することができるだろう. 例えば, この論文では初期感染者数 m を 1 に固定したが, 一般の場合を拡張するのは容易である. 問題の本質は Y_* の存在にあるので, 初期感染者数が N と独立な有限数の場合でも結論は変わらない. ただし, $m = cN$ のように, 初期感染者数が全体の数に比例して生じる場合には, $Y(0)$ が無限の彼方にとぶことになり, 原点に吸着されることはない. つまり, 分岐現象は生じない. 例えば, 図 3.4 はレギュラーランダムグラフ上の SIR 模型の数値実験で, $c = 1/2561$ としたときの $n_R < 1/16$ となる頻度 p と λ の関係のサイズ依存性を示した. λ が閾値を超えると $q(\lambda) = 1$ となり, 分岐が起らないことを示している.

さらには, レギュラーランダムグラフ以外のネットワークについて調べることも重要であろう. この場合, 平均場近似による計算の妥当性は自明ではないが, 少なくとも同じような考え方を適用することはできるだろう. また, より現実的なネットワークに対して, 流行の確率的発生について限られたデータから予言するための方法を研究することも重要であろう. これらについては, 今後の研究の発展に委ねたい.

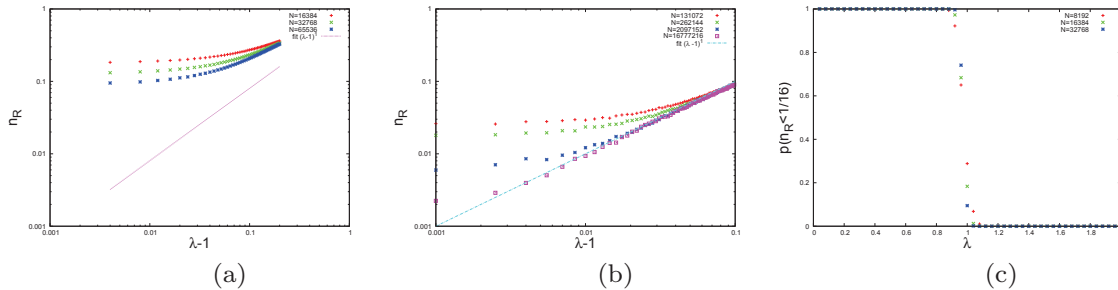


図 3.6 左の図は、レギュラーランダムグラフ上での SIR シミュレーションで、 $m = 1$ としたときの数値実験結果で、 $p(n_R > 0.003)$ の $\epsilon = \lambda - 1$ 依存性. $p(n_R > 0.003) < \epsilon$ となっているが、有限サイズ効果だと思われる. 中の図は、ランジュバン方程式 (3.7) の数値実験結果で、 $p(n_R > 0.003) \sim q(\lambda)$ の $\epsilon = \lambda - 1$ 依存性. $N \rightarrow \infty$ において $q(\lambda) \simeq \epsilon$ が示唆される. 右の図は、レギュラーランダムグラフ上での SIR シミュレーションで、 $m = N/128$ としたときの $n_R < 1/16$ となる度数 p の λ 依存性. λ が閾値を超えると確率 1 で $q(\lambda) = 1$ となることが示唆される.

3.5 追加説明・議論

3.5.1 SIR 模型とボンドパーコレーションの関係

Newman はネットワーク上の SIR 模型をボンドパーコレーションにマップして理解しようとした [6] が、ネットワーク上の SIR 模型はパーコレーションとは本質的に異なる現象であり、Newman はあくまでもボンドパーコレーションに近似しただけで、本質的に一対一に対応するものではないと考えている. 私の言葉で表現すれば、SIR 模型における無限回試行で求めた n_R の分布とボンドパーコレーションにおけるランダムに指定したノードを含むクラスタサイズの分布は置き換える事ができる. すべての情報を得るために無限回の試行が必要か、1 回の試行で済むかが本質的な違いであると思われる.

しかしながら、無限回の試行と 1 回の試行の対応関係はあるのかも知れない. この節で検証してみる. 始めに Newman のボンドパーコレーションの理論のレビューをする. この理論の範囲では、少なくともレギュラーランダムグラフの λ_c を正確に求めることができる. 次に、ベーテ格子 (次数が一定でループの存在しないノード無限のネットワーク) におけるボンドパーコレーションにおける「ランダムに選んだ特定のノードが無限クラスタに含まれる確率」を求める. この確率は $\lambda < \lambda_c$ において 0, $\lambda > \lambda_c$ において 1 より小さい有限確率を持つ. この「特定ノードが無限クラスタに含まれる」という設定はこの章で議

論してきた「初期感染者数 1 の SIR 模型」に対応するように一見思えるが, SIR 模型の実験結果はパーコレーションの理論的解析と定量的には一致しない. この違いは, SIR 模型をパーコレーションにマップする際に, 本来は指数分布に従うはずの, 治癒するまで時間 τ を平均時間として近似ことで生じるのか, それともレギュラーランダムグラフをベータ格子に近似したことによるのか (すなわち有限サイズ効果なのか), 考察した.

Newman のボンドパーコレーションの理論

Newman[6] と Durrett[14] によると, ネットワーク上の SIR モデルは近似的にネットワーク上のボンドパーコレーションにマップできるという. その理論を確認する.

■**近似** ノード i, j が隣接しており, i が I 状態, j が S 状態とする. i から s に感染するレートを γ_{ij} とするのポアソン過程であることを仮定し, i が治るまでにかかる時間を τ_i とする. i から j に感染せずに i が治癒する確率を $1 - T_{ij}$ と置くと

$$1 - T_{ij} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} (1 - \gamma_{ij} \delta t)^{\tau_i / \delta t} = e^{-\gamma_{ij} \tau_i} \quad (3.14)$$

となる. よって i が j に感染させる確率 T_{ij} は

$$T_{ij} = 1 - e^{-\gamma_{ij} \tau_i} \quad (3.15)$$

となる.

任意の i, j について γ_{ij} と τ_i は共に i, j によらず, それぞれ独立に分布 $P(\gamma), P(\tau)$ に従うと近似する. よって $T(\gamma, \tau) = 1 - e^{-\gamma\tau}$ とする. 実際の SIR 模型では感染レート λ , 治癒レート 1 のポアソン過程であるから,

$$\begin{cases} P(\gamma) &= \delta(\lambda - \gamma) \\ P(\tau) &= 1 - e^{-\tau} \end{cases} \quad (3.16)$$

とすれば, 平均的な感染確率として $\langle T \rangle = \int d\gamma \int d\tau T(\gamma, \tau)$ が得られる. 実際に計算すれば

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \int_0^\infty d\gamma \int_0^\infty d\tau P(\gamma) P(\tau) (1 - e^{-\gamma\tau}) \\ &= 1 - \int_0^\infty d\tau P(\tau) e^{-(\lambda+1)\tau} \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

として得られる. 以下 $T = T(\gamma, \tau)$ と書く.

■一般の次数分布を持つネットワークの場合 ネットワークは次数分布 $p(k)$ が与えられたコンフィグモデルとする。コンフィグモデルとは与えられた次数分布を実現するようにランダムにボンドを張ったノード数 $N \rightarrow \infty$ のネットワークモデルであり、すべてのノードが等価である。このモデルでは有限個の隣接ノードをたどって自分自身に帰るパスがほとんど存在しない、すなわち有限のループの数が非常に少ない、という強力な仮定を認める。

■次数分布の母関数 このモデル上で次数分布の母関数 $G_0(x)$ を以下のように定義する。

$$G_0(x) = \sum_k p(k)x^k \quad (3.18)$$

この母関数の微分を使って $\langle k \rangle, \langle k^2 \rangle$ などを作ることができる。

$$\begin{aligned} \partial_x G_0(1) &= \langle k \rangle \\ \partial_x^2 G_0(1) &= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \end{aligned}$$

ネットワーク上の任意のノードの次数分布の母関数は $G_0(x)$ である。そのノードに隣接するノードの次数分布を考える。任意のノードを第0世代、そのノードから距離 n のノードを第 n 世代と呼ぶことにする。任意のノード（第0世代のノード）の一つのボンドの先に次数 k のノード（第1世代のノード）が隣接している確率 $p_1(k)$ は、第1世代のノードの次数 k と次数分布 $p(k)$ に比例するので、

$$p_1(k) \propto kp(k)$$

となる。これが成立するのがコンフィグモデルであると考えてもよい。確率を規格化すると

$$p_1(k) = \frac{kp(k)}{\sum_k k'p(k')} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} \quad (3.19)$$

となる。よって $p_1(k)$ の母関数は

$$\frac{\sum_k kp(k)x^k}{\langle k \rangle} = \frac{x \sum_k kp(k)x^{k-1}}{G_0(1)} = x \frac{G_0(x)}{G_0(1)} \quad (3.20)$$

となる。第1世代のノードが第0世代のノード以外のノード（第2世代のノード）と隣接している次数が k となる確率 $p'_1(k)$ は、第1世代のノードの次数が $k+1$ であればよいので $(k+1)p(k+1)$ に比例するよって $p'_1(k)$ は

$$p'_1(k) = \frac{(k+1)p(k+1)}{\sum_k (k+1)p(k+1)} = \frac{(k+1)p(k+1)}{G'_0(1)} \quad (3.21)$$

となる. $p'_1(k)$ の母関数 $G_1(x)$ は

$$G_1(x) = \frac{\sum_k (k+1)p(k+1)x^k}{G_0(1)} = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} \quad (3.22)$$

となる.

次に第 2 世代のノードの次数が k の確率 $p'_2(k)$ の母関数 $G_2(x)$ を求める. 式で書くと

$$p'_2(k) = \sum_n p(n) \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} p'_1(k_1)p'_1(k_2)\dots p'_1(k_n) \quad (3.23)$$

$$G_2(x) = \sum_k p'_2(k)x^k = \sum_k \sum_n p(n) \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} p'_1(k_1)p'_1(k_2)\dots p'_1(k_n)x^k \quad (3.24)$$

となり, 式 (3.24) の $\sum_k \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k}$ を $\sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n}$ に書き直すと

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \sum_n p(n) \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} p'_1(k_1)p'_1(k_2)\dots p'_1(k_n)x^{k_1+k_2+\dots+k_n} \\ &= \sum_n p(n) \sum_{k_1} p'_1(k_1)x^{k_1} \sum_{k_2} p'_1(k_2)x^{k_2} \dots \sum_{k_n} p'_1(k_n)x^{k_n} \\ &= \sum_n p(n) \prod_{i=1}^n \sum_{k_i} p'_1(k_i)x^{k_i} \\ &= \sum_n p(n) \left(\sum_k p'_1(k)x^k \right)^n \\ &= \sum_n p(n) G_1(x)^n \\ &= G_0(G_1(x)) \end{aligned}$$

が得られる. 結局は $G_0(x)$ の x が第 1 世代のノード一つに対応していると考えて, 第 1 世代のノードの第 0 世代のノードに繋がっていない次数の分布の母関数 $G_1(x)$ を x に代入した形になる.

■ $T(\gamma, \tau)$ を与えたときの次数分布の母関数 次に, 与えられた $T(\gamma, \tau)$ についてクラスタの次数分布の母関数を考える. ネットワーク上のそれぞれのボンドを確率 $T(\gamma, \tau)$ で浸透するボンドにし, 確率 $1 - T(\gamma, \tau)$ で浸透しないボンドにする. 浸透するボンドのみの連結で作られたネットワークの次数分布の母関数を $G_0(x; T)$ とすると k 本のボンドのうち m 本が浸透するボンドになる確率は

$${}_k C_m T^m (1 - T)^{k-m} \quad (3.25)$$

である。 $G_0(x; T)$ は

$$\begin{aligned} G_0(x; T) &= \sum_k \sum_{m=0}^k p(k)_k C_m T^m (1-T)^{k-m} x^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \sum_{m=0}^k {}_k C_m (xT)^m (1-T)^{k-m} \end{aligned}$$

だから

$$G_0(x; T) = \sum_{m=0}^{\infty} p(k) (1-T + xT)^k \quad (3.26)$$

となる。 $G_1(x; T)$ を計算すると

$$\begin{aligned} G_1(x; T) &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P(k+1) \sum_{m=0}^k T^m (1-T)^{k-m} x^m}{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P(k+1)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P(k+1) (1+(x-1)T)^k}{G'_0(1)} \end{aligned}$$

となる。 $\langle a \rangle = \int_0^{\infty} a p(T) dT$ とすると $\tilde{G}_0(x) = \langle G_0(x; T) \rangle$, $\tilde{G}_1(x) = \langle G_1(x; T) \rangle$ は

$$\begin{cases} \tilde{G}_0(x) &= \langle \sum_{k=0}^{\infty} p(k) (1+(x-1)T)^k \rangle \\ \tilde{G}_1(x) &= \langle \frac{\sum_k p(k) k (1+(x-1)T)^{k-1}}{G'_0(1)} \rangle \end{cases} \quad (3.27)$$

となる.

■クラスタサイズ分布の母関数 第0世代のノードを含むパーコレーションクラスタサイズが s となる分布を $P_0(s)$ とすると, その母関数 $H_0(x)$ は

$$H_0(x) = \sum_s P_0(s) x^s \quad (3.28)$$

となる. 第1世代以降の世代によって形成されるクラスタのサイズが s となる分布とその母関数を $P_1(s), H_1(x)$ とすると

$$H_1(x) = \sum_s P_1(s) x^s \quad (3.29)$$

となる. ボンドが繋がったクラスタのサイズが $O(N)$ となる条件を考える. コンフィグモデルを仮定すれば, 第1世代以降のノードによって形成される部分クラスタサイズ s の分布と, 第2世代以降のそれが一致する. 第1世代に隣接する第0世代以外のノード数の分布の母関数は式 (3.22) で与えた $G_1(x)$ である. 第2世代以降のノードによって形成される部分クラスタサイズ s の分布は $P_1(s)$ と一致する. これを使って $H_1(x)$ を

$$H_1(x) = x \tilde{G}_1(H_1(x)) \quad (3.30)$$

と表すことができる. 第 1 世代のノードを 1 つ含むために x を掛けた. $H_0(x)$ も $H_1(x), \tilde{G}_0(x)$ を使って

$$H_0(x) = x\tilde{G}_0(H_1(x)) \quad (3.31)$$

と表すことができる. 同様に第 0 世代のノードを含むために x を掛けた.

■平均クラスタサイズ 平均クラスタサイズ $\langle s \rangle$ の表式を求める. 式 (3.31) を使うと

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= H'_0(1) \\ &= \left[\tilde{G}_0(H_1(x)) + \tilde{G}'_0([H_1(x)]_{x=1}) H'_1(x) \right]_{x=1} \\ &= \left[\tilde{G}_0(1) + \tilde{G}'_0(1) H'_1(x) \right]_{x=1} \end{aligned}$$

だから

$$\langle s \rangle = 1 + \tilde{G}'_0(1) H'_1(1) \quad (3.32)$$

となる. また式 (3.30) を使うと

$$\begin{aligned} [H'_1(x)]_{x=1} &= \left[\tilde{G}_1([H_1(x)]_{x=1}) + \tilde{G}'_1(H_1(x)) H'_1(x) \right]_{x=1} \\ &= \left[1 + \tilde{G}'_1(x) H'_1(x) \right]_{x=1} \end{aligned}$$

よって

$$H'_1(1) = \frac{1}{1 - \tilde{G}'_1(1)} \quad (3.33)$$

であるから式 (3.32), (3.33) を使って

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{\tilde{G}'_0(1)}{1 - \tilde{G}'_1(1)} \quad (3.34)$$

となる. $\tilde{G}'_0(1), \tilde{G}'_1(1)$ を計算する. $\langle \rangle$ と ∂_x は交換することを使う.

$$\begin{aligned} \tilde{G}'_0(1) &= \left[\tilde{G}'_0(x) \right]_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \left[\langle \partial_x (1 + (x-1)T)^k \rangle \right]_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) k \left[\langle (1 + (x-1)T)^{k-1} T \rangle \right]_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) \sum_{m=0}^{k-1} {}_{k-1}C_m [(x-1)^m]_{x=1} \langle T^{m+1} \rangle \\ &= \langle T \rangle \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) \end{aligned}$$

よって

$$\tilde{G}'_0(1) = \langle T \rangle G'_0(1) \quad (3.35)$$

となる. そして

$$\begin{aligned} \tilde{G}'_1(1) &= \left[\tilde{G}'_1(x) \right]_{x=1} \\ &= \left[\partial_x \left\langle \frac{\sum_k p(k) k (1 + (x-1)T)^{k-1}}{G'_0(1)} \right\rangle \right]_{x=1} \\ &= \left[\left\langle \frac{\sum_k p(k) k \partial_x (1 + (x-1)T)^{k-1}}{G'_0(1)} \right\rangle \right]_{x=1} \\ &= \left[\left\langle \frac{\sum_k p(k) k (k-1) T (1 + (x-1)T)^{k-2}}{G'_0(1)} \right\rangle \right]_{x=1} \\ &= \left[\left\langle \frac{\sum_k p(k) k (k-1) T \sum_{m=0}^{k-2} (x-1)^m T^m}{G'_0(1)} \right\rangle \right]_{x=1} \\ &= \frac{\sum_k p(k) k (k-1) \sum_{m=0}^{k-2} [(x-1)^m]_{x=1} \langle T^{m+1} \rangle}{G'_0(1)} \\ &= \frac{\sum_k p(k) k (k-1) \sum_{m=0}^{k-2} [(x-1)^m]_{x=1} \langle T^{m+1} \rangle}{G'_0(1)} \\ &= \frac{\langle T \rangle \sum_k p(k) k (k-1)}{G'_0(1)} \end{aligned}$$

だから

$$\tilde{G}'_1(1) = \frac{\langle T \rangle G''_0(1)}{G'_0(1)} \quad (3.36)$$

となる. 式 (3.35), (3.36) を (3.34) に代入する. $G''_0(1) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$, $G'_0(1) = \langle k \rangle$ であるので

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= 1 + \frac{\langle T \rangle G'_0(1)}{1 - \frac{\langle T \rangle G''_0(1)}{G'_0(1)}} \\ &= 1 + \frac{\langle T \rangle \langle k \rangle}{1 - \frac{\langle T \rangle (\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)}{\langle k \rangle}} \end{aligned}$$

となる. $\langle s \rangle$ が特異的になる $\langle T \rangle = T_c$ の条件は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{T_c (\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)}{\langle k \rangle} &= 0 \\ \Leftrightarrow T_c &= \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる. 式 (3.37), (3.17) を使って $\langle s \rangle$ が特異的になる λ を $\langle k \rangle$ の関数として求めると

$$\begin{aligned} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} &= \frac{\lambda_c}{\lambda_c + 1} \\ \Leftrightarrow \lambda_c &= \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle} \end{aligned} \quad (3.38)$$

が得られる.

■レギュラーランダムグラフの場合のクラスサイズ分布 レギュラーランダムグラフの場合には $\langle k \rangle = k, \langle k^2 \rangle = k^2$ であるから, 転移点は

$$\lambda_c = \frac{1}{k - 2} \quad (3.39)$$

として得られる. これは式 (3.12) や 2.3.2 の結果と一致している. ランダムグラフ (エルデシュ・レニーグラフ) の転移点もこの計算結果と概ね一致していることが §2 の結果から分かる.

また, $p(k') = \delta(k - k')$ であるから式 (3.27) から $\tilde{G}_0(x), \tilde{G}_1(x)$ が明示的に求まり,

$$\begin{cases} \tilde{G}_0(x) &= \langle (1 + (x - 1)T)^k \rangle \\ \tilde{G}_1(x) &= \left\langle \frac{k(1 + (x - 1)T)^{k-1}}{G'_0(1)} \right\rangle \end{cases} \quad (3.40)$$

また式 (3.35) より

$$\tilde{G}'_0(1) = \langle T \rangle k \quad (3.41)$$

となる. これらを使って式 (3.30), (3.31) を計算すれば

$$H_1(x) = x \frac{\langle [1 + (H_1(x) - 1)T]^{k-1} \rangle}{\langle T \rangle} \quad (3.42)$$

$$H_0(x) = x \langle [1 + (H_1(x) - 1)T]^k \rangle \quad (3.43)$$

式 (3.42) は k の値を決めなければ計算を進められない. ここで $k = 3$ の場合を考えれば,

$$H_1(x)_{k=3} = \frac{1 - 2(1 - T)x - \sqrt{1 - 4(1 - T)x}}{2Tx} \quad (3.44)$$

となり,

$$H_0(x)_{k=3} = \frac{\left[1 - \sqrt{1 - 4(1 - T)x} \right]^3}{8x^2} \quad (3.45)$$

が得られる. 例えば $x = 1$ のときに $H_0(1) = \sum_s P_0(s) = 1$ となるはずだが, 実際に代入すると

$$H_1(1)_{k=3} = \frac{1 - 2T + \sqrt{4T - 3}}{2T} \quad (3.46)$$

$$H_0(1)_{k=3} = \frac{1 - 2T + \sqrt{4T - 3}}{8} \quad (3.47)$$

となり, $T \geq 3/4$ すなわち $\lambda \geq 2$ でしか定義されていないことになる. しかし実際には $\lambda > 0$ においてクラスタサイズ分布は定義されるはずなので, なにかがおかしい. 以下, 無限クラスタになる分布を計算する別のアプローチ [15] を紹介する.

ボンドパーコレーションの厳密解

ネットワーク上のボンドパーコレーションを考えれば, 浸透率が転移点よりも大きいとき, すなわち上記議論において $\langle T \rangle > T_c$ のとき, 確率 1 で無限クラスタができる. しかし, ランダムに選んだ特定ノードを含むクラスタが無限クラスタになる確率は 1 ではない有限確率であろう. この設定は, 一見, SIR 模型において初期感染ノード数を 1 としたときの終状態における R 状態のノード数が無限大になる確率が 1 でないこと, すなわち SIR 模型において分岐現象が起こることと対応するように思われる. 次数 $k \geq 3$ のベータ格子はレギュラーランダムグラフの近似として使え, また無限クラスタが特定ノードを含む確率を厳密に計算できる [15] ため, これを紹介する.

■あるボンドの先に無限クラスタが生じる確率 3.5.1 に習って, あるボンドの先に無限クラスタが存在する確率を考える. 次数 k のベータ格子を考える. ボンドが開く確率を上記議論に習って $\langle T \rangle$ とする. 任意のボンドの先に無限クラスタが生じない確率を q とする. q は, そのボンドが閉じている確率 $1 - \langle T \rangle$ と, そのボンドの先についているノードから展開する $k - 1$ 個のボンドそれぞれについて, その先に無限クラスタが生じない確率 $\langle T \rangle q^{k-1}$ の和で求められるので,

$$\begin{aligned} q &= 1 - \langle T \rangle + \langle T \rangle q^{k-1} \\ \Leftrightarrow (1 - q) - \langle T \rangle (1 - q^{k-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - q) \left(1 - \langle T \rangle \sum_{j=0}^{k-2} q^j \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

となる. よって q は $k \geq 3$ において 1 とそれ以外の正の解を 1 つ持つ. 1 以外の解を q_* とおく.

■特定のノードが無限クラスタに含まれる確率 特定のノードが無限クラスタに含まれない確率を $1 - p$ とする. p は, そのノードがもつ k 個のボンド全ての先に無限クラスタが

生じない確率であるから

$$p = q^k$$

$$\Rightarrow p = \begin{cases} 1 & \text{for } q = 1 \\ q_*^k & \text{for } q = q_* \end{cases} \quad (3.49)$$

である.

■具体例: $k = 3$ の場合 具体例として $k = 3$ の場合を考える. 式 (3.48) の解として

$$q = 1, \frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \quad (3.50)$$

が得られる. これを式 (3.49) に代入すれば p は

$$p = \begin{cases} 1 & \text{for } q = 1 \\ \left(\frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}\right)^3 & \text{for } q = \frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \end{cases} \quad (3.51)$$

となる. $q = 1, p = 1$ の解は $\langle T \rangle < T_c$ すなわち $\lambda < \lambda_c$ に対応しており, $q = q_*, p = q_*^3$ は $\langle T \rangle > T_c$ すなわち $\lambda > \lambda_c$ に対応している.

SIR 模型との比較と考察

式 (3.17) より

$$\langle T \rangle = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad (3.52)$$

が得られている. これを $p = \left(\frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}\right)^3$ に代入すれば

$$p = \begin{cases} 1 & \text{for } \lambda < \lambda_c \\ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 & \text{for } \lambda > \lambda_c \end{cases} \quad (3.53)$$

が得られる. これをレギュラーランダムグラフ上の SIR 模型の結果 (図 3.2) と比較した (図 3.7). $\lambda > \lambda_c$ においてボンドパーコレーションの結果の方が p が小さい. すなわち無限クラスタに含まれる確率が大きい. これはループの影響であろうと思われる. ボンドパーコレーションの解析はベータ格子で行った. ベータ格子はループが存在しない. レギュラーランダムグラフはループが存在する. ループが存在すると, 一つの S 状態のノードに対して複数の I 状態のノードからボンドが張られているような状況が起こる. この状況は, $\lambda > \lambda_c$ において有限確率で起こるだろう. この場合, S 状態のノードがある I 状態のノード a に感染させ

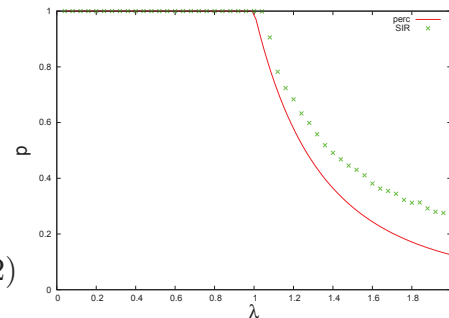


図 3.7 赤い線は式 (3.53) における p . すなわちベータ格子上のボンドパーコレーションにおいて特定ノードが無限クラスタに含まれる確率. $k = 3$. 緑のポイントはレギュラーランダムグラフ上の SIR 模型の終状態において $n_R < 1/16$ となる割合 $p(n_R < 1/16)$. $k = 3, m = 1, N = 65536$.

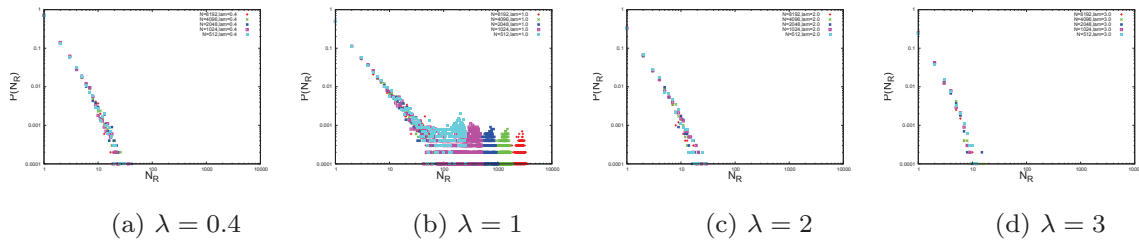


図 3.8 平均場 SIR 模型の N_R のヒストグラムの数値実験結果. $m = 1, N = 1024, 2048, 4096, 8192$.

られて I 状態に変わる前に, 他の I 状態のノード b が感染させた場合, a が S 状態のノードを感染させることができなくなってしまう. それぞれのボンドにおける $\langle T \rangle_a, \langle T \rangle_b$ は独立ではなく, 感染の広がりやすさがループが存在しない場合に比べて小さくなってしまふ. その影響で $\lambda > \lambda_c$ において感染が蔓延しない確率がベーテ格子よりも小さくなると思われる.

しかし疑問が残る. たしかに終状態における感染蔓延率 n_R の値はループの影響をうけて, ベーテ格子よりもレギュラーランダムグラフの方が小さくなるであろう. しかし, 感染が蔓延しない場合は I 状態のノードのチェーンによって S 状態のノードが挟み撃ちにされるようなことがさほど起こるだろうか. レギュラーランダムグラフのループの大きさの平均値は $O(\log N)$ であるから, 熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ においてループの影響は無視できる. 図 3.2) を見れば N に関して十分収束しているので, 有限サイズ効果とは思えない. 図 3.8 に平均場 SIR 模型の N_R のヒストグラム $p(N_R; \lambda, N)$ を示した. これを見ると $\lambda > \lambda_c$ において N 依存性は見られない. この結果からも有限サイズ効果の影響とは思えない.

もう一つ気になるのは治癒時間の近似である. ポアソン過程ではなくなってしまう. 私はこの近似は妥当ではなく, その結果として SIR 模型とボンドパーコレーションの違いが現れるのではないかと. SIR 模型の場合, τ はそれぞれの I 状態のノードで異なる値を取るが, この近似は後に τ の分布関数 $P(\tau)$ を用いて τ を平均化することで, 「全ての I 状態のノードが平均的な時間で治る」ことを仮定することになる. これは感染も治癒もポアソン過程とする SIR 模型の定義とは異なっている. これによって違いが現れているのであれば, SIR 模型とボンドパーコレーションは無限回試行と 1 回試行で一対一対応するものではなく, 本質的に異なる現象であるという結論が得られる. しかしながら, 実際の感染症の治癒を念頭におけば, 治癒にかかる時間は指数分布よりも平均値に局在したガウス分布に近い分布を持つと思われるため, その意味では感染症模型としては妥当なのかもしれない.

3.5.2 フォッカー・プランク方程式の解析解を求めるための試行錯誤

フォッカー・プランク方程式 (3.4) の定常解は $i = 0$ において特異性があり, 解析解, 数値解共に求めることが難しい. ここには解析解を求める試行錯誤をここに示す.

式 (3.4) の定常解を $P(s, i)$ が満たす方程式は

$$0 = -\partial_i \left\{ [(\lambda s - 1) i P(s, i)] - \partial_i \left[\frac{(\lambda s + 1) i}{2N} P(s, i) \right] + \partial_s \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s, i) \right] \right\} - \partial_s \left\{ -[\lambda s i P(s, i)] - \partial_s \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s, i) \right] + \partial_i \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s, i) \right] \right\} \quad (3.54)$$

となる. 元の SIR 模型において考えれば, 定常状態 (終状態) の定義として $i = 0$ である. すなわち定常解は $i > 0$ において $P(s, i) = 0$ となる. よって

$$P_\epsilon(s, i) = P(s) \delta(i - \epsilon) \quad (3.55)$$

としてみる. ただし $i = 0$ において特異的であるため, $i = \epsilon$ においてのみ $P_\epsilon(s, i)$ は正の値を持つことにし, 解を求めた後に $\epsilon \rightarrow 0$ とすることを考える. これを式 (3.54) に代入して両辺を i で積分する. i の定義域は $[0, 1]$ である.

$$f(s) = - \left\{ [(\lambda s - 1) i P(s) \delta(i - \epsilon)] - \partial_i \left[\frac{(\lambda s + 1) i}{2N} P(s) \delta(i - \epsilon) \right] + \partial_s \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s, i) \right] \right\}_{i=0}^{i=1} - \int_0^1 di \partial_s \left\{ -[\lambda s i P(s) \delta(i - \epsilon)] - \partial_s \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s) \delta(i - \epsilon) \right] + \partial_i \left[\frac{\lambda s i}{2N} P(s) \delta(i - \epsilon) \right] \right\} = -\partial_s \left\{ -[\lambda s \epsilon P(s)] - \partial_s \left[\frac{\lambda s \epsilon}{2N} P(s) \right] \right\} \quad (3.56)$$

となる. $f(s)$ は任意関数なので, このままでは $P(s)$ を解くことはできない. $f(s) = 0$ の場合を考えると解は定数 c を使って

$$P(s) = c \frac{e^{-2Ns}}{s} \quad (3.57)$$

が得られるが, これは現象を表す解ではない. $i = 0$ における特異性を $\delta(i)$ とおいても計算が上手くいかないことが分かった.

3.5.3 フォッカー・プランク方程式とランジュバン方程式の関係

2変数のランジュバン方程式とフォッカー・プランク方程式の関係を導く. 伊藤の演算法則に基づいた2変数 $x(t), y(t)$ に関するランジュバン方程式の一般形を

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_x + b_{xx} \cdot \xi_x + b_{xy} \cdot \xi_y \\ \dot{y}(t) = a_y + b_{yx} \cdot \xi_x + b_{yy} \cdot \xi_y \end{cases} \quad (3.58)$$

として与える. ξ_i はガウシアンホワイトノイズであり, 以下の性質を満たす.

$$\langle \xi_i \rangle = 0 \quad (3.59a)$$

$$\xi_i(t)\xi_j(t') = \delta_{ij}\delta(t-t') \quad (3.59b)$$

ξ_j の前の \cdot は伊藤積を表す. また, 2 変数 x, y に関するフォッカープランク方程式の一般形を

$$\partial_t P(x, y, t) = -\partial_x [PA_x + \partial_x PB_x + \partial_y PC_x] - \partial_y [PA_y + \partial_y PB_y + \partial_y PC_y] \quad (3.60)$$

として与える. このとき x, y の関数 $a_x, a_y, b_{xx}, b_{xy}, b_{yx}, b_{yy}$ と $A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y$ の関係式を求めることが目的である.

■関係式の導出 確率密度 $P(x, y, t)$ は x, y を使って以下のように書き下せる.

$$P(x, y, t) = \langle \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle \quad (3.61)$$

$\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を表す. $P(x, y, t + \Delta t)$ を Δt について展開する. まず, $x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta x_i$ として Δx_i を以下のように求める.

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \\ &= [a_i + b_{yj} \cdot \xi_j] \Delta t + O(\Delta t^{3/2}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ において $O(\Delta t^{3/2})$ の項は無視できる.

次に $P(x, y, t + \Delta t) = \langle \delta(x - x(t + \Delta t))\delta(y - y(t + \Delta t)) \rangle$ を式 (3.62) を使って書き下す.

$$\begin{aligned} \delta(x_i - x_i(t + \Delta t)) &= \delta(x_i - x_i(t) - \Delta x_i) \\ &= \delta(x_i - x_i(t)) - \delta'(x_i - x_i(t))\Delta x_i + \frac{1}{2}\delta''(x_i - x_i(t))\Delta x_i^2 \\ &= \delta(x_i - x_i(t)) - \delta'(x_i - x_i(t)) [a_i + b_{yj} \cdot \xi_j] \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta''(x_i - x_i(t)) [a_i + b_{yj} \cdot \xi_j]^2 \Delta t^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

であるから式 (3.59) を使って $\delta(x - x(t + \Delta t))\delta(y - y(t + \Delta t))$ を計算すると

$$\begin{aligned}
 & \delta(x - x(t + \Delta t))\delta(y - y(t + \Delta t)) \\
 &= \left[\delta(x - x(t)) - \delta'(x - x(t)) [a_x + b_{xj} \cdot \xi_j] \Delta t + \frac{1}{2} \delta''(x - x(t)) [a_x + b_{xj} \cdot \xi_j]^2 \Delta t^2 \right] \\
 & \quad \times \left[\delta(y - y(t)) - \delta'(y - y(t)) [a_y + b_{yj} \cdot \xi_j] \Delta t + \frac{1}{2} \delta''(y - y(t)) [a_y + b_{yj} \cdot \xi_j]^2 \Delta t^2 \right] \\
 &= \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \\
 & \quad - \delta(x - x(t))\delta'(y - y(t)) [a_y + b_{yj} \cdot \xi_j] \Delta t + \delta(x - x(t)) \frac{1}{2} \delta''(y - y(t)) [a_y + b_{yj} \cdot \xi_j]^2 \Delta t^2 \\
 & \quad - \delta(y - y(t))\delta'(x - x(t)) [a_x + b_{xj} \cdot \xi_j] \Delta t + \delta(y - y(t)) \frac{1}{2} \delta''(x - x(t)) [a_x + b_{xj} \cdot \xi_j]^2 \Delta t^2 \\
 & \quad + \delta'(x - x(t))\delta'(y - y(t)) [a_x + b_{xj} \cdot \xi_j] [a_y + b_{yj} \cdot \xi_j] \Delta t^2 \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

が得られる. ただし j は $j = x, y$ の和を取る. 式 (3.64) の両辺のアンサンブル平均 $\langle \cdot \rangle$ をとって $\frac{P(x, y, t + \Delta t) - P(x, y, t)}{\Delta t}$ を計算する. 式 (3.64) の右辺は Δt の一次項だけを残せばよいので,

$$\langle \delta'(x_i - x_i(t))\delta'(x_j - x_j(t)) \rangle = \partial_{x_i} \partial_{x_j} P(x_i, x_j, t) \tag{3.65a}$$

$$\xi_j \Delta t = 0 \tag{3.65b}$$

$$\xi_j \xi_j \Delta t = 1 \tag{3.65c}$$

を使って計算する. $\Delta t \rightarrow 0$ の極限において

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial P a_x}{\partial x} - \frac{\partial P a_y}{\partial y} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P (b_{yx}^2 + b_{yy}^2)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P (b_{xx}^2 + b_{xy}^2)}{\partial x^2} \\
 & \quad + \frac{\partial^2 P (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy})}{\partial x \partial y} + O(\Delta t^{1/2}) \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

が得られる. $O(\Delta t^{1/2})$ を無視すれば, これはフォック-プランク方程式である. $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}$ でくくって整理すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial t} &= -\partial_x \left[P a_x - \frac{1}{2} \partial_x [P (b_{xx}^2 + b_{xy}^2)] - \frac{1}{2} \partial_y [P (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy})] \right] \\
 & \quad - \partial_y \left[P a_y - \frac{1}{2} \partial_y [P (b_{yy}^2 + b_{yx}^2)] - \frac{1}{2} \partial_x [P (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy})] \right] \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$A_x = a_x \quad (3.68a)$$

$$B_x = -\frac{1}{2} (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) \quad (3.68b)$$

$$C_x = -\frac{1}{2} (b_{xx}b_{yx} + b_{xy}b_{yy}) \quad (3.68c)$$

$$A_y = a_y \quad (3.68d)$$

$$B_y = -\frac{1}{2} (b_{yy}^2 + b_{yx}^2) \quad (3.68e)$$

$$C_y = -\frac{1}{2} (b_{xx}b_{yx} + b_{xy}b_{yy}) \quad (3.68f)$$

が得られる.

■ 今回の計算 $x \rightarrow s, y \rightarrow i$ として式 (3.4) に式 (3.68) を当てはめれば

$$-\lambda si = a_s \quad (3.69a)$$

$$-\frac{1}{2N}(\lambda s + 1)i = -\frac{1}{2} (b_{ss}^2 + b_{si}^2) \quad (3.69b)$$

$$\frac{1}{2N}\lambda si = -\frac{1}{2} (b_{ss}b_{is} + b_{si}b_{ii}) \quad (3.69c)$$

$$(\lambda s - 1)i = a_i \quad (3.69d)$$

$$\frac{1}{2N}\lambda si = -\frac{1}{2} (b_{ii}^2 + b_{is}^2) \quad (3.69e)$$

$$\frac{1}{2N}\lambda si = -\frac{1}{2} (b_{ss}b_{is} + b_{si}b_{ii}) \quad (3.69f)$$

が得られる. これから $a_s, a_i, b_{ss}, b_{si}, b_{is}, b_{ii}$ について解く. a_s, a_i は値が確定して

$$a_s = -\lambda si \quad (3.70a)$$

$$a_i = (\lambda s - 1)i \quad (3.70b)$$

となる. $b_{ss}, b_{si}, b_{is}, b_{ii}$ については値が確定しないが, 例えば解の組として

$$b_{ss} = -\sqrt{\frac{\lambda si}{N}} \quad (3.71a)$$

$$b_{si} = 0 \quad (3.71b)$$

$$b_{is} = \sqrt{\frac{\lambda si}{N}} \quad (3.71c)$$

$$b_{ii} = \sqrt{\frac{i}{N}} \quad (3.71d)$$

が存在する.

3.5.4 ランジュバン方程式の変数変換

x, y を変数とするランジュバン方程式について, (x, y) を $(u(x, y), v(x, y))$ に変数変換する. x, y のランジュバン方程式を

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_x + b_{xx} \cdot \xi_x + b_{xy} \cdot \xi_y \\ \dot{y}(t) = a_y + b_{yx} \cdot \xi_x + b_{yy} \cdot \xi_y \end{cases} \quad (3.72)$$

として与える.

■準備 準備として, $dx(t), dy(t)$ を以下のように与える.

$$\begin{cases} dx(t) = a_x dt + b_{xx} \cdot \xi_x dt + b_{xy} \cdot \xi_y dt + O(dt^{3/2}) \\ dy(t) = a_y dt + b_{yx} \cdot \xi_x dt + b_{yy} \cdot \xi_y dt + O(dt^{3/2}) \end{cases} \quad (3.73)$$

この先使うために, $dx^2, dy^2, dx dy$ を dt^1 まで計算する.

$$\begin{cases} dx^2 = (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) dt O(dt^2) \\ dy^2 = (b_{yx}^2 + b_{yy}^2) dt + O(dt^2) \\ dx dy = (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy}) dt + O(dt^2) \end{cases} \quad (3.74)$$

■変数変換 さて, 実際に u, v が満たす方程式を導く. du, dv を変数 x, y の全微分形式で与え.

$$\begin{cases} du = u_x dx + \frac{1}{2} u_{xx} dx^2 + u_y dy + \frac{1}{2} u_{yy} dy^2 + u_{xy} dx dy \\ dv = v_x dx + \frac{1}{2} v_{xx} dx^2 + v_y dy + \frac{1}{2} v_{yy} dy^2 + v_{xy} dx dy \end{cases} \quad (3.75)$$

ただし添字は偏微分を表す. たとえば $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 等とする. 式 (3.74) を代入して整理すると

$$\begin{cases} du = [u_x a_x + \frac{1}{2} u_{xx} (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) + u_y a_y + \frac{1}{2} u_{yy} (b_{yx}^2 + b_{yy}^2) + u_{xy} (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy})] dt \\ \quad + (u_x b_{xx} + u_y b_{yx}) \cdot \xi_x dt + (u_x b_{xy} + u_y b_{yy}) \cdot \xi_y dt + O(dt^{3/2}) \\ dv = [v_x a_x + \frac{1}{2} v_{xx} (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) + v_y a_y + \frac{1}{2} v_{yy} (b_{yx}^2 + b_{yy}^2) + v_{xy} (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy})] dt \\ \quad + (v_x b_{xx} + v_y b_{yx}) \cdot \xi_x dt + (v_x b_{xy} + v_y b_{yy}) \cdot \xi_y dt + O(dt^{3/2}) \end{cases} \quad (3.76)$$

となる. 両辺を dt で割ると u, v のランジュバン方程式が得られる.

$$\begin{cases} \dot{u} = u_x a_x + \frac{1}{2} u_{xx} (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) + u_y a_y + \frac{1}{2} u_{yy} (b_{yx}^2 + b_{yy}^2) + u_{xy} (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy}) \\ \quad + (u_x b_{xx} + u_y b_{yx}) \cdot \xi_x + (u_x b_{xy} + u_y b_{yy}) \cdot \xi_y + O(dt^{1/2}) \\ \dot{v} = v_x a_x + \frac{1}{2} v_{xx} (b_{xx}^2 + b_{xy}^2) + v_y a_y + \frac{1}{2} v_{yy} (b_{yx}^2 + b_{yy}^2) + v_{xy} (b_{xx} b_{yx} + b_{xy} b_{yy}) \\ \quad + (v_x b_{xx} + v_y b_{yx}) \cdot \xi_x + (v_x b_{xy} + v_y b_{yy}) \cdot \xi_y + O(dt^{1/2}) \end{cases} \quad (3.77)$$

$u_x b_{xy} + u_y b_{yy}, v_x b_{xy} + v_y b_{yy}$ が u, v の関数とならないような変数変換を見つければ, 解析が容易になる.

■今回の計算 $x \rightarrow s, y \rightarrow i$ として $u = s, v = \sqrt{Ni}$ に変数変換する.

$$u_s = 1 \quad (3.78a)$$

$$u_{ss} = u_i = u_{ii} = u_{si} = 0 \quad (3.78b)$$

$$v_s = v_{ss} = v_{si} = 0 \quad (3.78c)$$

$$v_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{i}} = \frac{N}{2} \frac{1}{v} \quad (3.78d)$$

$$v_{ii} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{N}{i^3}} = -\frac{N^2}{4} \frac{1}{v^3} \quad (3.78e)$$

であるから式 (3.70), (3.71) を使えば

$$\begin{cases} \dot{u} &= \frac{1}{N} \left[-\lambda uv^2 - \sqrt{\lambda uv^2} \cdot \xi_1 \right] + O(dt^{1/2}) \\ \dot{v} &= \frac{\lambda u - 1}{2} v - \frac{\lambda u + 1}{8} \frac{1}{v} + \frac{\sqrt{\lambda u}}{2} \cdot \xi_1 + \frac{1}{2} \cdot \xi_2 + O(dt^{1/2}) \end{cases} \quad (3.79)$$

となる. 式 (3.7) は式 (3.79) (u, v) を (s, Y) に置き換えた式そのものである.

3.5.5 フォッカー・プランク方程式の数値解

■モデル フォッカー・プランク方程式 (3.4) において $s = 1, I = Ni$ とすれば

$$\partial_t P(I, t) = -\partial_I \left[(\lambda - 1)IP(I, t) - \partial_I \left[\frac{(\lambda + 1)I}{2} P(I, t) \right] \right] \quad (3.80)$$

が得られる. これを数値的に解く. 式 (3.80) を確率保存の式とみなせば,

$$\begin{cases} \partial_t P(I, t) &= -\partial_I J(I, t) \\ J(I, t) &= (\lambda - 1)IP(I, t) - \partial_I \left[\frac{(\lambda + 1)I}{2} P(I, t) \right] \end{cases} \quad (3.81)$$

となる.

■離散化 始めに空間を離散化する. $\partial_+ f(x) = (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x, \partial_- f(x) = (f(x) - f(x - \Delta x))/\Delta x$ として, 式 (3.81) において

$$\begin{cases} \partial_t P(I, t) &= -\partial_+ J(I, t) \\ J(I, t) &= (\lambda - 1)IP(I, t) - \partial_- \left[\frac{(\lambda + 1)I}{2} P(I, t) \right] \end{cases} \quad (3.82)$$

とする. 時間を離散化する.

$$P(I, t + \Delta t) = P(I, t) - \partial_+ J(I, t) \Delta t \quad (3.83)$$

3.5 追加説明・議論

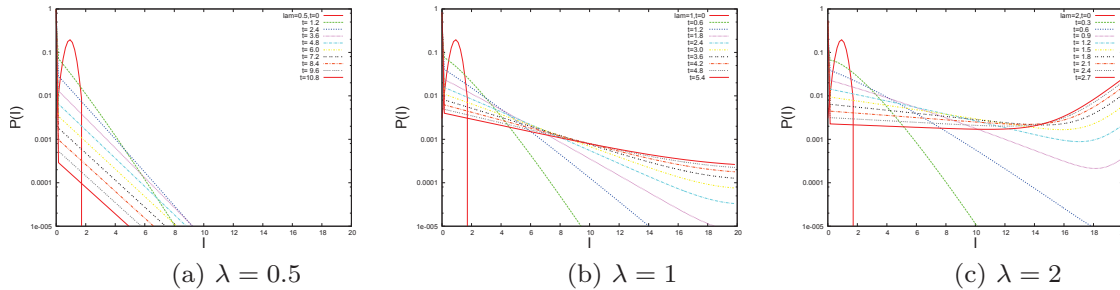


図 3.9 各 λ におけるフォッカー・プランク方程式 (3.80) の数値解. ポイントの色はそれぞれの時刻を表す. 左の図は $\lambda = 0.5$ のとき. 確率が時間経過とともに $I = 0$ に溜まっていく様子が分かる. 中の図は $\lambda = 1$, 右の図は $\lambda = 2$ のとき. λ を大きくすると確率が一定程度 $I = L$ にも溜まり始める様子が分かる.

■境界条件 I の定義域は本来 $[0, \infty]$ であるが, 十分大きい L を使って $[0, L]$ とする. $I = 0, I = L$ において反射境界とした. すなわち

$$\begin{cases} J(0, t) = 0 \\ J(L, t) = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

を満たす. 式 (3.82) を使えば

$$\begin{cases} J(0, t) = [(\lambda - 1)IP(I, t)]_{I=0} - \left[\frac{(\lambda+1)I}{2\Delta I} P(I, t) - \frac{(\lambda+1)(I-\Delta I)}{2\Delta I} P(I - \Delta I, t) \right]_{I=0} \\ J(L, t) = [(\lambda - 1)IP(I, t)]_{I=L} - \left[\frac{(\lambda+1)I}{2\Delta I} P(I, t) - \frac{(\lambda+1)(I-\Delta I)}{2\Delta I} P(I - \Delta I, t) \right]_{I=L} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P(-\Delta I, t) = 0 \\ P(L, t) = \frac{(\lambda+1)/2}{(\lambda-1)\Delta t - (\lambda+1)/2} \frac{L-\Delta I}{L} P(L - \Delta I, t) \end{cases} \quad (3.85)$$

が得られる. これが境界条件である.

■初期条件, 系の設定 初期条件は I の範囲 $[0, 2]$ において平均 $\mu = 1$, 分散 $\sigma^2 = 0.1$ のガウス分布, それ以外の範囲で 0 とする. $\Delta I = L/128, L = 20, \Delta t = 1/4096, N = 128$ とした.

$\lambda = 0.5, 1, 2$ としたときの結果を図 3.9 に示した.

3.5.6 $Q(Y, t)$ のフォッカープランク方程式 (3.10) の別導出

式 (3.4) から $s = 1, Y = \sqrt{Ni}$ として式 (3.10) を導出する. s を止める. $s = 1$ として, s での微分は 0 とする. $P(i, t) = P(1, i, t)$ とする.

$$\frac{\partial P(i, t)}{\partial t} = -\partial_i \left\{ [(\lambda - 1) iP(i, t)] - \frac{1}{2N} \partial_i [(\lambda + 1) iP(i, t)] \right\} \quad (3.86)$$

$Y = \sqrt{Ni}$ に変数変換する. $\partial_i = \frac{N}{2Y} \partial_Y, P(i, t) di = Q(Y, t) dY$ すると $Q(Y, t) = \frac{2Y}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right)$ となる. $Q(Y, t)$ の方程式を求める.

$$\frac{\partial P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right)}{\partial t} = -\frac{N}{2Y} \partial_Y \left\{ \left[(\lambda - 1) \frac{Y^2}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right) \right] - \frac{1}{2N} \frac{N}{2Y} \partial_Y \left[(\lambda + 1) \frac{Y^2}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right) \right] \right\} \quad (3.87)$$

両辺に $\frac{2Y}{N}$ をかける. 左辺は $\partial_t Q(Y, t)$ となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{2Y}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right)}{\partial t} &= -\partial_Y \left\{ \left[\frac{\lambda - 1}{2} Y \frac{2Y}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right) \right] - \frac{\lambda + 1}{8Y} \partial_Y \left[Y \frac{2Y}{N} P\left(\frac{Y^2}{N}, t\right) \right] \right\} \\ \frac{\partial Q(Y, t)}{\partial t} &= -\partial_Y \left\{ \left[\frac{\lambda - 1}{2} Y Q(Y, t) \right] - \frac{\lambda + 1}{8Y} \partial_Y [Y Q(Y, t)] \right\} \\ \frac{\partial Q(Y, t)}{\partial t} &= -\partial_Y \left\{ \left[\frac{\lambda - 1}{2} Y - \frac{\lambda + 1}{8Y} \right] Q(Y, t) - \left[\frac{\lambda + 1}{8} \right] \partial_Y Q(Y, t) \right\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

この結果は式 (3.10) と一致している.

3.5.7 SIS 模型ランジュバン方程式の議論はできるか?

SIS モデル平均場マスター方程式は

$$\dot{P}(I, t) = \frac{\lambda}{N} (S + 1) (I - 1) P(I - 1, t) - \frac{\lambda}{N} SIP(I, t) \quad (3.89)$$

$$+ (I + 1) P(I + 1, t) - IP(I, t) \quad (3.90)$$

となる. $S = N - I, i = \frac{I}{N}$ として $\frac{1}{N}$ 展開する.

$$\dot{P}(i, t) = -\partial_i \left[(\lambda(1 - i) - 1) iP(i, t) - \partial_i \frac{(\lambda(1 - i) + 1)i}{2N} P(i, t) \right] \quad (3.91)$$

一般論として

$$i = a + b \cdot \xi \Leftrightarrow \dot{P}(i, t) = -\partial \left[aP(i, t) - \partial_i \frac{b^2}{2} P(i, t) \right] \quad (3.92)$$

だから式 (3.91) から

$$a(i) = (\lambda(1-i) - 1) i \quad (3.93)$$

$$b(i) = \sqrt{\frac{(\lambda(1-i) + 1) i}{N}} \quad (3.94)$$

が得られる.

ノイズと変数の乗算を消す変数変換は 3.5.4 を参考にする.

$$df(i) = f' di + \frac{1}{2} f'' di^2 \quad (3.95)$$

$$\frac{df(i)}{dt} = f' a + \frac{1}{2} f'' b^2 + f' b \cdot \xi \quad (3.96)$$

$f'(i)b(i) = \text{const.}$ となる様な変数変換 $y = f(i)$ として

$$y(i) = \text{ArcTan} \left(\sqrt{\frac{i}{\frac{\lambda+1}{\lambda} - i}} \right) \quad (3.97)$$

$$i(y) = \frac{\lambda+1}{\lambda} \sin^2(y) \quad (3.98)$$

が存在する. このとき

$$a(i(y)) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-3+(\lambda+1)\cos(2y)) \sin^2(y)}{2\lambda} \quad (3.99)$$

$$b(i(y)) = \frac{(\lambda+1) \cos(y) \sin(y)}{\sqrt{\lambda N}} \quad (3.100)$$

$$f'(i(y)) = \frac{\lambda}{2(\lambda+1) \cos(y)} \quad (3.101)$$

$$f''(i(y)) = -\frac{\lambda^2 (1-2\sin^2(y))}{4(\lambda+1)^2 \cos^3(y) \sin^3(y)} \quad (3.102)$$

$$(3.103)$$

となる. 更に $f'(i(y))a(i(y))$, $f''(i(y))b(i(y))^2$, $f'(i(y))b(i(y))$ を計算すると

$$f'(i(y))a(i(y)) = \frac{\sin(y)}{4\cos(y)} (\lambda-3+(\lambda+1)\cos(2y)) \quad (3.104)$$

$$f''(i(y))b(i(y))^2 = -\frac{\lambda \cos(2y)}{4N \sin(y) \cos(y)} \quad (3.105)$$

$$f'(i(y))b(i(y)) = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{N} \quad (3.106)$$

となる. よって y のランジュバン方程式は

$$\dot{y} = f'(i(y))a(i(y)) + \frac{1}{2} f''(i(y))b(i(y))^2 + f'(i(y))b(i(y)) \cdot xi \quad (3.107)$$

$$= \frac{\sin(y)}{4\cos(y)} (\lambda-3+(\lambda+1)\cos(2y)) - \frac{1}{2} \frac{\lambda \cos(2y)}{4N \sin(y) \cos(y)} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{N} \cdot xi \quad (3.108)$$

となる. $u(y)$ を求めると

$$u(y) = \frac{((1 + \lambda)N \cos(2y) + (\lambda - 8N) \log(\cos(y)) + \lambda \log(\sin(y))) \tan(y)}{8N \tan(y)} \quad (3.109)$$

となる. また定常分布は $Q(y) \propto e^{-\frac{u(y)}{8N}}$ となり, ヤコビアンをかけた変数 i の分布関数 $P(i)$ は $P(i) = Q(y) \frac{dy}{di}$ となる. このように非常に複雑な表式となり, 簡単に評価することができない.

参考文献

- [1] 佐々教授は 2012 年 11 月より京都大学に籍を移した. 論文は著者の修士過程修了までに投稿することを目指し, 只今執筆中である (2012 年 12 月現在).
- [2] Ping Yan. Distribution theory, stochastic processes and infectious disease modelling. *Mathematical Epidemiology*, pp. 229–293, 2008.
- [3] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, and J.F.F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 80, No. 4, p. 1275, 2008.
- [4] V.M. Eguiluz and K. Klemm. Epidemic threshold in structured scale-free networks. *Physical Review Letters*, Vol. 89, No. 10, p. 108701, 2002.
- [5] DA Rand. Correlation equations and pair approximations for spatial ecologies. *Advanced ecological theory: principles and applications*, pp. 100–142, 1999.
- [6] M.E.J. Newman. Spread of epidemic disease on networks. *Physical Review E*, Vol. 66, No. 1, p. 016128, 2002.
- [7] E. Kenah and J.M. Robins. Network-based analysis of stochastic sir epidemic models with random and proportionate mixing. *Journal of theoretical biology*, Vol. 249, No. 4, p. 706, 2007.
- [8] L.K. Gallos and P. Argyrakis. Distribution of infected mass in disease spreading in scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 330, No. 1, pp. 117–123, 2003.
- [9] A. Lančić, N. Antulov-Fantulin, M. Šikić, and H. Štefančić. Phase diagram of epidemic spreading—unimodal vs. bimodal probability distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 390, No. 1, pp. 65–76, 2011.
- [10] H.C. Tuckwell, L. Toubiana, and J.F. Vibert. Epidemic spread and bifurcation effects in two-dimensional network models with viral dynamics. *Physical Review E*, Vol. 64, No. 4, p. 041918, 2001.

-
- [11] D.H. Zanette. Critical behavior of propagation on small-world networks. *Physical Review E*, Vol. 64, No. 5, p. 050901, 2001.
- [12] M.J. Keeling and K.T.D. Eames. Networks and epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 2, No. 4, pp. 295–307, 2005.
- [13] C. Gardiner. Handbook of stochastic methods: for physics, chemistry & the natural sciences,(series in synergetics, vol. 13). 2004.
- [14] R. デュレット. ランダムグラフダイナミクス: 確率論からみた複雑ネットワーク, pp. 95–100. 産業図書, 2011.
- [15] D. Stauffer, A. Aharony, 小田垣孝. パーコレーションの基本原理, pp. 48–53. 吉岡書店, 2001.

第4章

多様な流行現象の分類に向けて

感染症を念頭に置いたネットワーク上のダイナミクス模型として、SIR 模型を取り上げてきたが、この章では、対象を広げてグッズやファッションなどの文化に見られる多様な流行現象を対象とする。研究自体はコンプリート出来ていないので、「～に向けて」という章題としたことをお許し願いたい。

4.1 イントロダクション

4.1.1 背景

グッズやファッションなどの流行現象は、テレビや雑誌などのメディアから得た情報やお店などで実際に見聞きした情報を、社会の構成メンバーが互いに交換し合い、互いを模倣することによって生じる非常に複雑な現象である。瞬時に社会全体に広まるものや、時間をかけてゆっくりと広まるもの、すぐに廃れてしまうものや、長期間継続するもの、少数のコミュニティだけで流行して閉じて広がりを見せないものなど、流行には様々なパターンがある。依然テレビの影響力は非常に強大であると思われるが、昨今はインターネットの影響力が大きくなっており、ネット上のクチコミによって飲食店の売上が左右されたりテレビの視聴率が大きな影響を受けるなど、新たな現象も生まれている。

例えばキャラクターグッズやペットボトル飲料の流行を考えると、現実には新たに生み出された商品の中からほんの一部が流行し、ほとんどの場合は流行せずに廃れてしまう。そして、メーカーは様々な差別化を図ってはいるが、消費者側の立場からすると、流行しなかったものに対して流行したものの自体に明らかな優位性があるようには思えない。むしろどれが流行してもおかしくない中で、結果的に特定の商品だけが流行しているように思われる場合も多い。これらの流行を理解するために、複雑な人間関係の中での情報がどのように伝搬していくかや、テレビや雑誌・インターネットなどの膨大な情報を人々がどのよ

うに利用しているかが、非常に重要であると考えられる。

3までに見てきたように、流行に関する先行研究として、ネットワーク上の SIR モデルまたは SIS モデルが盛んに研究されてきた。しかしこれらのモデルは流行現象のミニマルモデルであり、単純な現象しか説明できない。現実の流行現象に目を向けてみると、これらのモデルが示す単純な結果ではなく、先の例のような多様な振る舞いを示す。

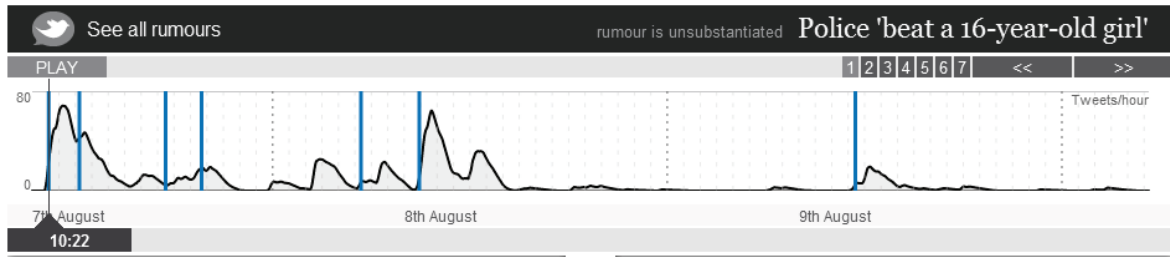
■具体例 1: twitter でのデマ拡散 図 4.1.1 に twitter におけるデマ拡散の時系列の例を示した。英国における「警官が 16 歳の少女を暴行した」というデマの拡散の様子を表している。横軸は時間、縦軸はその瞬間における流行の度合いである。大小のピークが繰り返され、非常に複雑な流行現象が見られている。

■具体例 2: ご当地キャラ 図 4.1.1 に特定キーワードの Google[1] における検索頻度の時系列の例を示した。キーワードとしてご当地キャラクターの名称である「カピバラさん [2]」と「せんとくん [3]」の検索頻度の時間経過を表している。横軸は時間、縦軸は検索頻度を表す。現在 (2012 年 12 月) において共に大変人気のあるキャラクターであるが、検索頻度の時系列は大きく異なる。カピバラさんが発明されたのは 2002 年ごろだが、検索頻度は 2007 年頃から有限の値を持ちはじめ、そのままほとんど増減せずに現在に至っている。一方せんとくんの検索頻度は 2008 年頃に大きなピークを持ち、その後も小さなピークを数回繰り返している。このような検索頻度時系列の違いは、マスコミによる影響に起因する部分が大いと考えられる。カピバラさんはクレーンゲームの景品として誕生し [4]、徐々に人気を博した。主に景品を目にした人から口コミで流行したと思われる。一方せんとくんは平城遷都 1300 年祭 (遷都祭) の公式キャラクターとして誕生した [5]。遷都祭開催 2 年前の 2008 年に公式キャラクターとして決定した直後からマスコミに大きく報道され、知名度が一気に上昇した [6]。

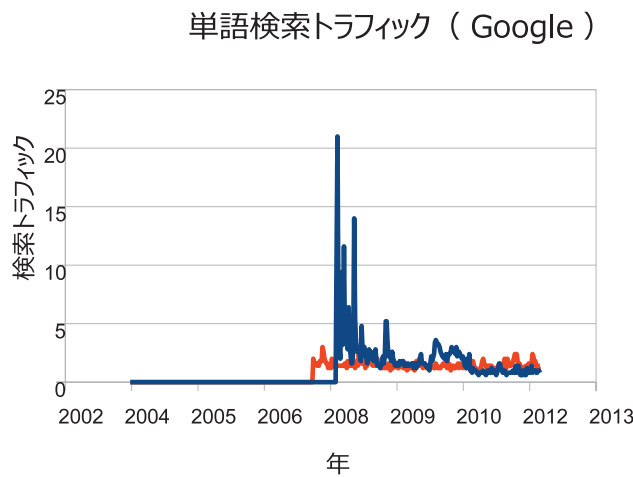
上で見たような SNS・口頭の口コミ・マスコミなどが関わる複雑な流行現象のモデル化を考えたとき、結局は情報伝播のダイナミクスとネットワークの 2 つを指定することになる。このバリエーションが多様な流行現象が実現していると考えられる。では、ダイナミクスとネットワークの様々な組み合わせで実現する流行パターンを区別し分類することは可能だろうか。そしてその結果から、現実の流行現象の説明ができるだろうか。

4.1.2 目標

本研究の目標は、ネットワーク上のダイナミクスのモデルを用いて様々な流行パターンを説明することである。多様な現象を示すモデルを作るために、従来のネットワーク上の SIR モデルを出発点として、以下の様な効果をモデルに取り入れたい。



(a) twitter でのデマ拡散の時系列. 英国の新聞「ガーディアン」の記事 [7] より引用.



(b) google 検索トラフィック [8]. 横軸は時間, 縦軸は検索頻度を表す.



著作権

(c) 「カピ
バラさん
[2]」



著作権

(d) 「せ
んとくん
[3]」

■ **知人からの影響の効果** それぞれの人間は周りの人間の振る舞いを見ながら自らが流行に乗るかどうかを判断していると考えられる. 知人のうち多くの人が流行に乗っていると自分も乗ってしまうことも多いであろう. 加えて, 知人の多くが流行に乗っていたら自分だけが飽きてしまってもやめることができないということも考えられる. オフィスソフトなどは顕著な例である.

■ **人間の繋がり方の影響の効果** 実際に情報交換する人間同士の繋がりはどのような構造か. 比較的大きな影響力をもつオピニオンリーダーの存在や, ローカルなコミュニティの存在などが考えられる.

■ **マスコミの影響の効果** マスコミが発信する情報は多くの人にリーチし, 絶大な影響力を持っていると思われる. そしてその情報は, 少数意見であったとしても, あたかもそれが

多くの人間の意見であるかのように解釈されることがある [9]. この「少数意見があたかも多数意見のように見える」という意味において, インターネットも同様の性質を持っていると思われる.

■インターネットの影響の効果 少数意見がクラスタを作ることで淘汰されにくい性質があると考えられる. かなりマニアックな趣味でもネット上では簡単に同じ趣味を持つ人を見つけられ, その結果, 少数意見が淘汰されにくくなる効果があると思われる.

4.2 モデル (案)

モデルの骨格として各ノードの取りうる状態, 隣接関係の関数としての状態遷移のダイナミクスルール, ノードの隣接ネットワークのトポロジーの3つに分けてモデルを説明する. 確立したモデルではなく, 構想・案の提示で終る.

4.2.1 各ノードが取りうる状態

各ノードが取りうる状態は, ネットワーク上の SIR 模型と等しいとする. すなわち, ネットワーク上のそれぞれのノードが S, I, R の3状態をとり, S は通常の状態, I は感染して流行に乗っている状態, R は飽きて二度と感染しない状態を表す. S 状態のノードは I 状態のノードが隣接している場合に感染して流行状態 I になる. I 状態のノードは自発的に R 状態になる (図 4.1). この過程はポアソン過程とする.

4.2.2 ダイナミクスルール

隣接ノード間の感染ダイナミクスルールとして, 非線形ルールを提案する. 先に紹介した「知人からの影響の効果」を実現するルールである.

非線形ルールでは, 感染レート λ , 治癒レート μ を, そのノードの次数 k と隣接する I 状態のノードの数 k_I の比 $\tilde{k}_I = \frac{k_I}{k}$ の関数 $\lambda(\tilde{k}_I), \mu(\tilde{k}_I)$ とする. $\lambda(\tilde{k}_I), \mu(\tilde{k}_I)$ の関数型を図 4.2.1 のように \tilde{k}_I に関して非線形に与える. このような関数型を実現する簡単な関数として

$$\lambda(\tilde{k}_I) = \begin{cases} \frac{\lambda k}{2} \left(\frac{\tilde{k}_I}{c_\lambda}\right)^{\alpha_\lambda} & \text{for } \tilde{k}_I \leq c_\lambda \\ \lambda k - \frac{\lambda k}{2} \left(\frac{1-\tilde{k}_I}{1-c_\lambda}\right)^{\alpha_\lambda} & \text{for } \tilde{k}_I > c_\lambda \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mu(\tilde{k}_I) = \begin{cases} \mu - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\tilde{k}_I}{c_\mu}\right)^{\alpha_\mu} & \text{for } \tilde{k}_I \leq c_\mu \\ \frac{\mu}{2} \left(\frac{1-\tilde{k}_I}{1-c_\mu}\right)^{\alpha_\mu} & \text{for } \tilde{k}_I > c_\mu \end{cases} \quad (4.2)$$

などが考えられる. ただし $0 \leq c_\lambda \leq 1, 0 \leq c_\mu \leq 1, \alpha_\lambda \geq 0, \alpha_\mu \geq 0$ とする.

4.2 モデル (案)

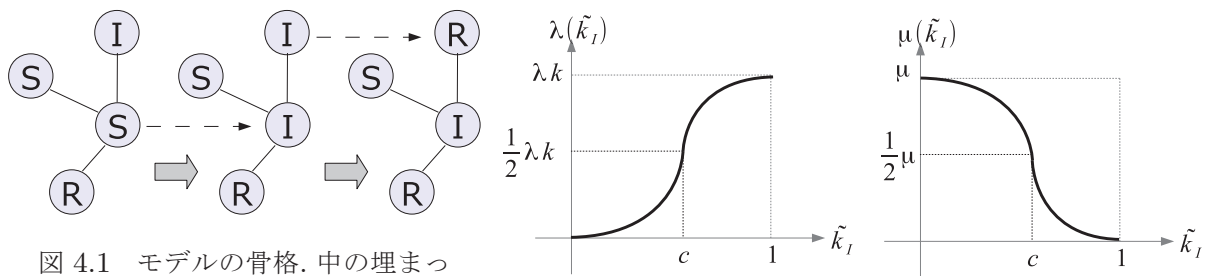
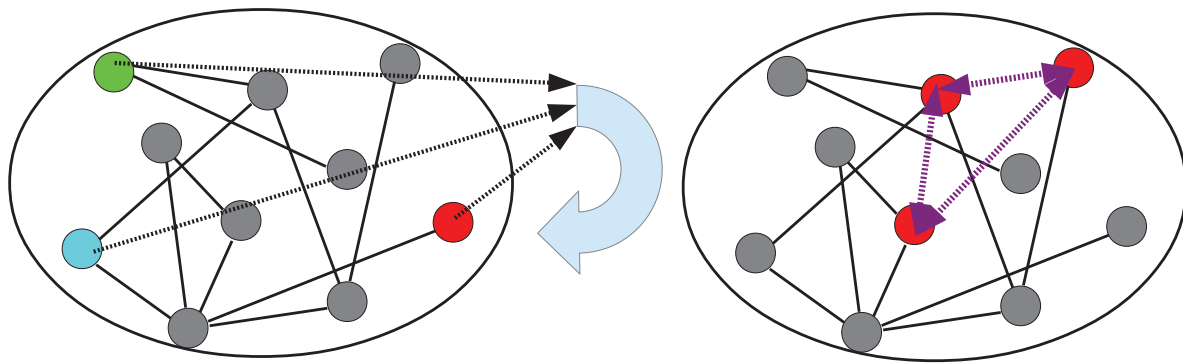


図 4.1 モデルの骨格. 中の埋まった矢印は時間経過を, 点線の矢印は状態遷移を表す.

(a) $\lambda(\tilde{k}_I), \mu(\tilde{k}_I)$



(b) マスコミによる影響 (左) とインターネットによる影響 (右) の概念図.

図 4.2 上右の図 (a) は $\lambda(\tilde{k}_I), \mu(\tilde{k}_I)$ の概略図. $\alpha > 1$. 下の図 (b) はネットワークの概略図. 左の図はマスコミによる影響を表している. 特定の少数意見を全体にフィードバックするネットワークである. 右の図はインターネットによる影響を表している. 直接隣接していない同じ意見を持ったノード間に新たなエッジ (紫矢印) の追加・張替えが起こるネットワークである.

通常の SIR 模型では, S 状態のノード j に隣接する I 状態のノードの数を k_I とすると, j が隣接する I 状態のノードのいずれかから感染して I 状態に変化する感染レートは

$$\lambda k_I \tag{4.3}$$

となり, 隣接する I 状態のノードの数に比例する. また, I 状態のノードが治癒するレートは, その隣接ノードによらず μ で一定である. これは式 (4.2) において $c_\lambda = 1/2, \alpha_\lambda = 1, c_\mu = 1, \alpha_\mu = 0$ とすることに対応する.

4.2.3 ネットワーク

■**口コミによる情報伝搬ネットワーク** 実際の口コミによる情報伝播ネットワークは2.2.2で定義したHY ネットが基本になっていると思われる。なぜなら家族と職場のワーキンググループは毎日顔を合わせて情報交換することが多いと思われるからである。加えて、どちらにも所属しない信頼出来る友人の存在も大きいと思われるので、HY ネットに加えて、スモールワールドモデル [10] のようにランダムにエッジを張りかえたネットワークを考えてもよい。

■**フィードバック** 特定の少数意見を選択してネットワーク全体にフィードバックする効果を導入する。図4.2.1の左の図は、特定ノードの状態を全体にフィードバックする概念図を示した。例えばI状態を全体にフィードバックして、確率的にS状態のノードを感染させてI状態に変化させたり、R状態を全体にフィードバックして、確率的にI状態のノードをR状態に変化させたりすることが考えられる。特定ノードをどのように特定するかには任意性がある。

■**エッジの追加・張替え** 直接隣接していないI状態のノード同士を、エッジの追加・張替えを行なって隣接させる効果を導入する。図4.2.1の右の図はその概念図を示した。I状態ノード同士を隣接させれば、上のダイナミクスルールにおいて、 $\mu(\tilde{k}_I)$ が小さくなり、R状態への変化がしにくくなると思われる。どのような条件が揃ったときに新たにエッジを追加・張替えするのかには任意性がある。

4.3 考察

これらのモデルを実装すれば、かなり多くのバリエーションの流行現象が見られるのではないかと考えているが、その検証やモデルのブラッシュアップをするには修士の2年間というのはあまりにも短かった。

参考文献

- [1] インターネット検索大手企業. <http://www.google.co.jp>.
- [2] tryworks. カピバラさん 公式ブログ. <http://ameblo.jp/tryworks>, 2012.
- [3] 奈良県. 奈良県マスコットキャラクターせんたくんのご利用について. <http://www.pref.nara.jp/secure/62295/riyou.pdf>, 2011.
- [4] 西川留美, ITmedia. 「カピバラさん」ヒットに見る“女だけチーム”の底力.

- <http://www.itmedia.co.jp/news/articles/0803/07/news044.html>, 3 2008.
- [5] 奈良県. 奈良県マスコットキャラクターせんとくん. <http://www.pref.nara.jp/secure/69837/top.html>, 2011.
- [6] J-CAST ニュース. 奈良の「せんとくん」宣伝効果 なんと 15 億円. <http://www.j-cast.com/2008/04/21019250.html>, 2008.
- [7] Alastair Dant and Jonathan Richards. Behind the rumours: how we built our twitter riots interactive. <http://www.guardian.co.uk/news/datablog/2011/dec/08/twitter-riots-interactive>, 2011.
- [8] グーグルトレンド. google トレンドより引用. <http://www.google.com/trends>, 2012.
- [9] E. Noelle-Neumann, 池田謙一, 安野智子. 沈黙のらせん理論. 世論形成過程の社会心理学, ブレーン出版, 1993.
- [10] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, Vol. 393, No. 6684, pp. 440–442, June 1998.

第 5 章

結論と展望

5.1 結論

§2 では、季節性インフルエンザを念頭に置いた感染経路ネットワークを定義し、その上での SIR ダイナミクスを数値実験で調べた。 n_R と終状態に至るまでの時間 tf を計測し、初期条件やネットワークを変化させたとき、その違いの特徴付けを試みた。先行研究では主に n_R の平均値ばかり計測されていなかったが、本研究では n_R や tf の揺らぎを計測することにより、初期感染者数の違いを明解に示すことができた。また、レギュラーランダムグラフにおいて転移点 λ_c と $\lambda \rightarrow \infty$ における $tf, \sigma(tf)^2$ を理論的に導出した。これらの結果は実験結果と概ね一致した。そして、ネットワークの違いに関しては、初期感染者数を ϵN としたときの n_R の揺らぎがカスプシンギュラリティをもち、カスプエクスポネントによって特徴づけを試みたが、有限サイズの効果によってカスプエクスポネントを求めることが出来ず断念した。

§3 では、SIR 模型の流行相において流行するか否かが一意に定まらない現象について解析した。ネットワーク上の SIR 模型はパーコレーションにマップできるという理解がなされていたが、本研究では、これまで注目されて来なかった、初期感染者数を定数とするか系のサイズに比例する形で与えるかの違いによって十分時間が経った後の状態への影響を明らかにした。特に初期感染者数を 1 とした場合は、熱力学極限において系の状態が一意に定まらないことをランジュバン方程式の解析によって理解した。具体的にはランジュバン方程式のポテンシャル $U(Y)$ が $\lambda > 1$ のとき $Y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}$ にピークを持ち、初期値 $Y = 1$ からスタートした方程式の解が、このピークを超えるか否かが $n_R = 0$ になるか $n_R > 0$ になるかを決定していることを理解した。そして、転移点近傍 ($\lambda = \lambda_c + \epsilon$) での感染が蔓延する確率 $q(\epsilon)$ は理論的に $q(\epsilon) = \epsilon$ と導出できて、これはランジュバン方程式の実験結果と一致した。追加の議論として、まず、ベータ格子上的のボンドパーコレーションについての解析を紹介し、その結果を比較をした。このとき転移点近傍では両者の結果が

ほぼ厳密に一致するが、 λ が大きくなると異なる結果となる。これはボンドパーコレーションの解析がベータ格子のときの厳密な解析であり、ループが存在するレギュラーランダムグラフとは異なるためだと思われる。また、SIS 模型でランジュバン方程式の議論ができるか検証したが、式が煩雑になって SIR 模型ほど上手くいかなかった。

§4 では、SIR 模型では表現しきれない現実の多様な流行現象を分類すべく、新たなダイナミクス模型を考案した。具体的には、S 状態のノードの感染レート、I 状態のノードの治癒レートをそれぞれ隣接する I 状態のノード数に関する非線形関数とした模型である。また、特定の少数ノードを選択してただし、時間の都合上、その模型を計算機上で実装し、有効なデータを得るには至らなかった。

5.2 展望

本研究について今後の展望をここに記す。

§2 において初期感染者数を系のサイズに比例する形で導入した場合、 n_R, tf の揺らぎにカスプシンギュラリティが見られたが、その指数を数値的にも理論的にもはっきりさせられていない。この指数を求めることによって、これまで区別出来ていなかった、平均場ネットワーク、レギュラーランダムグラフ、ランダムグラフの区別が可能になるかもしれない。

また、§3 においては、流行の確率的発生について、レギュラーランダムグラフ以外のネットワークでは結果がどのようになるかはわかっていない。そして、SIS モデルにおいても同様の議論ができるだろうか。更には、流行の確率的発生について実データから予言することが最終目標になるだろう。

そして §4 に関しては、提案した模型を計算機実験で検証し、パラメータを変化させることで多様な流行現象を示すかどうかの検証と模型の改良が必要である。最終的には、流行に影響を与える効果として主なものを特定し、その効果の組み合わせでどのような流行現象が生じるか、あり得るパターンを全て示し、現実の流行がどのパターンに属するかを分類することが目標である。

そもそものきっかけは、§1 に書いた通り「複雑系の制御可能性」であった。わかりやすい対象として感染症の制御可能性を探るつもりで研究をスタートさせたが、これに関しては何の主張も出来ていない。関連する §3 からの帰結として「初期条件によっては、感染症流行の規模は確率的にしか予言出来ない」という主張は、感染症の制御がより難しいものであることを示しているようにも思える。少なくとも与えられた模型の範囲では、何をすれば感染者数を減らせるか、またはできるだけ早く流行を抑えることができるか、という問題は問として成立するし、現実に近いネットワークやダイナミクスをモデルにして議論することも可能である。これらの問題については、今後の発展に託したい。

付録 A

プログラムアルゴリズム

この章では、数値実験に使ったプログラムのアルゴリズムの概要を記す。

A.1 ネットワーク生成アルゴリズム

ネットワークのデータは一次元配列に格納する。 N ノードからなる平均次数 $\langle k \rangle$ の場合、総ボンド数は $\langle k \rangle N/2$ となる。一つのボンドに対して対応する両端のノードを配列に記録していくため、配列の要素数は $\langle k \rangle N$ 必要である。例えば $N = 4$ で、ノード 1 とノード 2,3 と 4, ノード 1 と 3 が隣接している場合には、配列は $\{1, 2, 3, 4, 1, 3\}$ となる。

A.1.1 レギュラーランダムグラフ

N ノードからなる次数 k のレギュラーランダムグラフを作るアルゴリズムを説明する。次数の制限と自己ループや二重ボンドを作らない制限を両立させるアルゴリズムは少々複雑である。今回紹介したものは、 $k \ll N$ において実用上問題ないが、 $k \simeq N$ の場合は上手くネットワークが生成されない場合も有り得ると考えられるので注意が必要だ

ノード i は k 個の隣接ノードを持つ。 i の隣接ノードリストを $e_i[j], j = 0, 1, \dots, k-1$ とする。 $f[i]$ を i のボンドのうち、隣接ノードの番号が決まっていないものの数とする。各ノードの次数は k で固定されているため、初期条件として $f = k, k, \dots, k$ となる。 g を隣接ノードが決まっていないボンドのノード番号のリストとする。初期条件では $0, 1, \dots, N-1$ がそれぞれ k 存在する kN 成分を持つ。 $rand(j)$ を $0 \sim j$ の一様乱整数とする。定めるべきボンドのペアは $kN/2$ 個存在する。

1. $j = 0$ とする。
2. 以下の順序で j 番目のボンドペアを決定する。
3. $0 \leq i \leq N-1$ において $f[i]$ が f の成分の中で最大となる i を見つけ、それを i_{max}

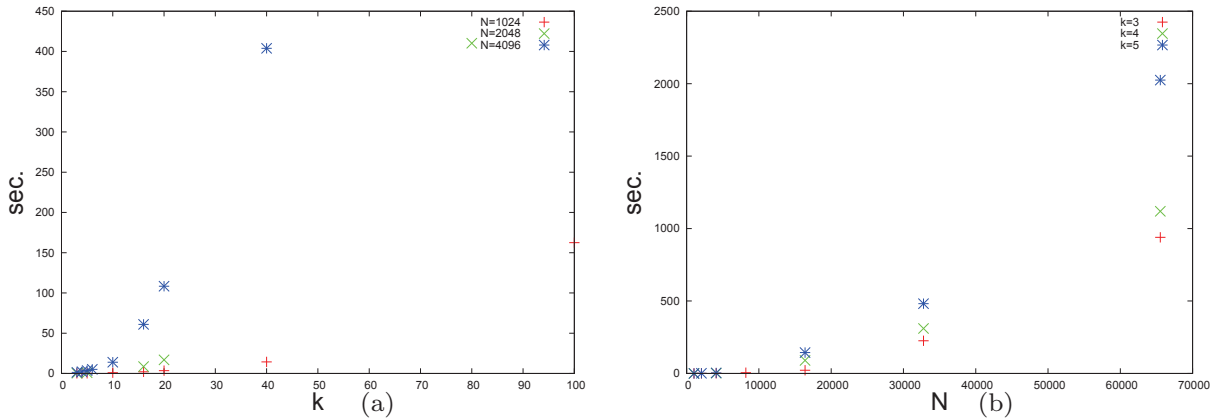


図 A.1 様々な N, k でレギュラーランダムグラフを生成するのにかかる時間を計測した。

とする。

4. $r = \text{rand}(kN - 2j - 1)$ とする。
5. $g[r]$ が $e_{i_{max}}$ に含まれなくなるまで, また $r = i_{max}$ にならなくなるまで 4 を続ける. その r を j' とする。
6. $e_{i_{max}}$ の要素の一つとして j' を加え, $e_{j'}$ の要素の一つとして i_{max} を加える. $f[i_{max}]$ に -1 を施す. g から i_{max}, j' を消す. この (i_{max}, j') ペアが隣接ペアである. 配列などに記録する。
7. $f[i_{max}] \neq 0$ ならば 4 に戻る. $f[i_{max}] = 0$ となれば $j+ = 1$ として 2 に戻る. $j = kN/2$ となれば終了。

c++ では g を [multiset] で, e_i を [set] で作った. $f[i] = k - e_i.size()$ となる. 自己ループや二重ボンドが生じにくいように, f が最大のものから隣接ノードを決定していく. $k \ll N$ においては実用上問題ないが, このアルゴリズムでも上手くボンドを張れない場合が考え得るので, 2~7 の繰り返し回数が N より十分大きくなったときに初めからやり直す, というループを加えておく方が安全である. 図 A.1 に, 様々な N, k でレギュラーランダムグラフを生成するのにかかる時間を示した. 例えば我が研究室の計算機では, $N = 65536, k = 3$ で約 15 分, $N = 32768, k = 40$ で約 8 時間, $N = 16384, k = 80$ で約 7 時間であり, 本修士論文の研究の実用には十分耐えうる。

A.1.2 ランダムグラフ

ランダムグラフの場合のアルゴリズムは次数の制限がないために難しくない。

1. $j = 0$ とする.
2. 以下の順序で j 番目のボンドペアを決定する.
3. 2つの乱数 $r_0 = \text{random}(N - 1)$, $r_1 = \text{random}(N - 1)$ を生成する.
4. $r_0 \neq r_1$ かつ e_{r_0} の要素に r_1 が存在しなくなるまで 3 を繰り返す.
5. e_{r_0} の要素の一つとして r_1 を, e_{r_1} の要素の一つとして r_0 を加える. この (r_0, r_1) ペアが j 番目の隣接ペアである. 配列などに記録する.
6. $j + 1$ として 2 に戻る. $j = kN/2$ となれば終了.

A.2 SIR 模型アルゴリズム

A.2.1 標準的な模型

治癒レートは I ノードについてレート 1 , 感染レートは $S-I$ ペアそれぞれについてレート λ である. I ノードの数 I は簡単にわかるので, 治癒レートの合計は I となる. しかし $S-I$ ペアの数にはわからないので, I ノードの次数の合計 $P[I-1]$ を使って $\lambda P[I-1]$ とする. $P[i]$ を累積次数 $P[i] = \sum_0^i k[Ilist[i]]$ とした. ただし, I ノードには新たに $0 \sim I-1$ の番号を振りなおし, 全ノードに振られているノード番号 j との対応を $j = Ilist[i]$ とする.

1. 初期条件として $I = m$, $S = N - I$ とする. 初期感染ノードはランダムに選ぶ. $P, Ilist$ を格納する.
2. $I = 0$ となれば終了. 全事象のレートの和 $rate$ を計算をする. $rate = \lambda P[I-1] + I$ となる.
3. 経過時間を計算する. レート $rate$ のポアソン過程の待ち時間分布は指数分布なので, 待ち時間 τ は範囲 $(0, 1)$ の一様乱実数 r を使って $\tau = -\log(1 - r)/rate$ となる. τ だけ時間発展させる.
4. $(0, rate)$ 一様乱実数 r_{rate} を発生させ, $r_{rate} < I$ の時は 5 に進む. $r_{rate} \leq I$ のときは 6 に進む.
5. ノード番号 $Ilist[(int)(r_{rate})]$ のノードを R 状態にする. $Ilist, P, I$ を再計算する. 2 に戻る.
6. $P[i_r] \geq (r_{rate} - I)/\lambda < P[i_r + 1]$ となる i_r を求める.
7. ノード $Ilist[i_r]$ に隣接するノードをランダムに一つ選ぶ.
8. 選ばれたノードが S 状態でなければ 2 に戻る. S 状態であれば I 状態にする. $Ilist, P, I$ を再計算する. 2 に戻る.

A.2.2 §4 の模型 (案)

基本的なアルゴリズムは標準的な模型と同じなので, ここではここでは違いについて説明する. 感染レートや治癒レートが隣接ノードの状態によって変化する模型の場合は隣接ノードの情報を保存せねばならず, 複雑になる. 例えばレートの計算を考える. k_I を隣接している I ノードの数, $\lambda p_{sj}[k_I, k]$ をそのノードが S 状態の時に感染して I 状態になるレートとする. また $pi_j[k_I, k]$ をそのノードが I 状態のときに R 状態になるレートとする. $st[j]$ をノード j の状態とすると, $rate = \sum_j [\lambda p_{sj}[k_I, k]\delta(S, st[j]) + pi_j[k_I, k]\delta(I, st[j])]$ となる. 実際に $\delta(S, st[j]), \delta(I, st[j])$ の計算をするためには, $Ilist$ のほか $Slist$ も必要であり, 感染させるノードを決定するためには P が必要である.

謝辞

まず、形式上の指導教員である福島孝治准教授には、事務手続きのみならず、本修士論文をまとめるに際してアドバイスを頂きました。そして実質上の指導教員である佐々真一教授（現所属は京都大学理学研究科非線形動力学研究室，前所属は東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻相関基礎科学系非平衡理論研究室，図 A.3）と、私を暖かく迎えて下さった佐々研究室の皆さんには、修士課程の間、本当にお世話になりました。

私のこの2年間の研究生活は、「佐々さんから課題をもらう」→「考え悶え苦しむ」→「わからないので研究室の皆さんに教えてもらう」→「佐々さんに（さも自分が考えたかのように）報告する」→「佐々さんから新たな課題を頂く、に戻る」というサイクルが基本になっていました。この修士論文に書いたような研究ができたのは、皆さんのおかげです。佐々さんには、研究の全編について助言をいただき、適切に私を導いてくださいました。佐々さんの部屋でのディスカッションの際には、何も知らない私を怒ることなく（いや、たまに怒りながらも）やさしく色々と教えてくださいました。私の理解力が足りず、話が噛み合わないことも多々ありましたが、「この人に付いていく事が自分にとって最善の策である」と心から思えるほどの凄みがありました。修士課程以降の指導教員と学生の関係は様々な悲惨な話を耳にしますが、佐々さんに関しては理不尽に思えることはほとんどなく、自由にのびのびと研究その他の生活を送らせて頂きました。

小林未知数助教には数値計算や相転移現象その他幅広く助けて頂きました。何度か昼ごはんをおごっていただきました。研究室を代表して笹（図 A.2:sasa だけに...）やケーキを買っていただきました。



図 A.2 2012 年七夕企画における笹の様子。私の東大在籍中の七夕前後に、東大駒場キャンパス 15・16 号館玄関に七夕の笹を設置し、住人の皆さんに七夕を楽しんで頂いた。



図 A.3 イタリアの島での会議で質問中の佐々教授。この写真、ご本人も気に入っているようだ(; ^ _ ^)

中村道大さんとは、隣の席で研究に限らず様々な話を楽しくさせていただきました。重要な参考文献(ネットワークの赤い本:「複雑ネットワーク 基礎から応用まで(増田, 今野)」)を頂き、ネットワーク上のダイナミクスの理解を助けていただきました。また、中村さんのアドバイスによって、M2の5月までに一つ内定をとれ、精神的に楽になりました。根本孝裕さんは後の席で、日常生活から研究発表まで、「これぞ研究者」という後ろ姿を見せて頂きました。伊丹くんと3人でキャッチボールをしたり、下北沢へ飲みにも付き合ってくださいました。私が比較的早い段階で博士課程に進学しないことを決めたのは、根本さんの姿を見たことが大きかったと思います。若杉誠さんには、研究室にいらっしゃる貴重な時間帯に、C言語やC++のプログラミングに関するレクチャーをしていただきました。神田大樹さんには、研究室の計算機管理で大変お世話になりましたし、やシェルスクリプトなどのレクチャーをして頂き、数値計算が非常に効率的になりました。その他研究の相談をさせていただきました。伊丹将人さんは、ただ一人の同期として、非常に仲良くさせていただきましたし、フォッカープランク方程式やランジュバン方程式のいろはを含め、多く研究の相談に乗っていただきました。院試において研究科3位の枠を争った、また、キャッチボールでドラフト指名を目指したライバルでもありました。

また、研究室以外の方にもお世話になりました。東北大学大学院情報科学研究科数学連携推進室の長谷川雄央助教には、twitterでの情報提供や研究会等でのディスカッションなど、ネットワークの専門家として様々な助言を頂きました。東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻の増田直紀准教授には、時間を取っていただいて居室に招いてくださり、アドバイスを頂き、またサマースクールや研究会・学会などでもコメントを頂きました。東京大学大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻の津村幸治准教授には、制御論の専門家として助言をいただきました。下調べが不足したままお伺いしてしまいまして、ご迷惑をお掛けしました。申し訳ございませんでした。高知工業高等専門学校電気情報工学科の谷澤俊弘准教授や大学院人間文化創成科学研究科情報科学科の郡宏准教授、

中村道大さんとは、隣の席で研究に限らず様々な話を楽しくさせていただきました。重要な参考文献(ネットワークの赤い本:「複雑ネットワーク 基礎から応用まで(増田, 今野)」)を頂き、ネットワーク上のダイナミクスの理解を助けていただきました。また、中村さんのアドバイスによって、M2の5月までに一つ内定をとれ、精神的に楽になりました。根本孝裕さんは後の席で、日常生活から研究発表まで、「これぞ研究者」という後ろ姿を見せて頂きました。伊丹くんと3



図 A.4 佐々研関係者の皆さん。小林さんの結婚式にて。左から観山さん、大きい中村さん、佐々さん、小林さん、小林さんの奥さん、伊丹くん、根本さん、神田さん。私(右上合成)がトイレに行っている間に撮ったらしい(´・ω・`)

佐々研出身であり現在は東北大学原子分子材料科学高騰研究機構インターフェースユニットの中村壮伸助教 (大きい中村さん) には, 研究会*¹において有益なコメントや励ましを頂きました. お世話になった皆さん, ありがとうございます.

金銭面の援助をしてくれた両親にも感謝の意を表します.

2013年6月1日

*¹ 2012年9月13日(木)~14日(金)CMRU研究会”ネットワーク科学の数理と展開”