

ダークソリトンのある冷却原子系における ゼロモードの役割

早稲田大学大学院基幹理工学研究科 電子光システム学専攻

山中由也研究室 高橋 淳一 *1

目次

1	序論	3
2	凝縮体の記述	5
2.1	中性原子気体のハミルトニアン	5
2.2	大域的位相変換不変性と変換の生成子	6
2.3	Bose-Einstein 凝縮と自発的対称性の破れ	7
3	Bogoliubov-de Gennes の方法	8
3.1	Bogoliubov-de Gennes 方程式	9
3.2	Bogoliubov-de Gennes 方程式の解の性質	10
3.2.1	内積の定義と固有関数の分類	10
3.2.2	直交性	10
3.2.3	ゼロモード	11
3.2.4	共役モード	13
3.2.5	完全系	14
3.3	複素モードの性質	14
3.3.1	複素モードの分類	14
3.3.2	直交性と完全系	15
3.4	ハミルトニアンの対角化	16
3.5	Bogoliubov-de Gennes 解析と不安定性	17

*1 E-mail: phyco-sevenface@asagi.waseda.jp

4	ダークソリトン解	18
4.1	Gross-Pitaevskii 方程式のダークソリトン解	18
4.2	ダークソリトンの存在する系に対する Bogoliubov-de Gennes 解	18
4.2.1	$\omega = 0$ のとき	20
4.2.2	$\omega \neq 0$ のとき	20
4.2.3	Bogoliubov-de Gennes 解のまとめ	21
4.3	共役モード	21
4.3.1	位相の共役モード	22
4.3.2	並進の共役モード	22
5	ゼロモードの摂動展開	22
5.1	GP 方程式の摂動展開	22
5.2	Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動展開	23
5.2.1	励起モードに対する Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動論	23
5.2.2	ゼロモードに対する Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動論	24
5.3	ゼロモードの対称性と Y の対称性	25
5.4	固有値	26
6	1次元ソリトン系に対する摂動計算	27
6.1	モデル 1	27
6.2	モデル 2	28
7	まとめ	29
付録 A	複数ゼロモードが存在する場合のゼロモードと共役モードの直交化について	31
付録 B	流れがある場合の 1次元一様系ダークソリトンにおける BdG ゼロモード	32
B.1	1次元一様系ダークソリトン (流れあり)	32

1 序論

1924年, Bose は光が粒子性を持つものとし, それらの粒子が互いに区別できない同種粒子であると仮定すると Planck の輻射式が導けることを示した. 1925年, それに注目した Einstein は相互作用がない質量をもった同種粒子の系がある温度 (転移温度) 以下になると, 巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態を占めるということを示した [1]. これが現在でいう Bose-Einstein 凝縮 (BEC) である.

Einstein の理論以降, ^4He の超流動 [2] や半導体中のエキシトン [3] などが本質的に BEC であると指摘された. しかし, これらの現象は粒子間の相互作用が強く, 相互作用がない理論である Einstein の予言からのずれが非常に大きいものであった. 例えば, 絶対零度ではほぼ 100% の粒子が凝縮するという予言に対し ^4He の超流動における粒子の凝縮は高々 10% である. その後, BEC についての様々な理論が展開されたが, それらの多くは摂動論を基礎としており ^4He の超流動のように相互作用の強い実験可能な系と比較することはできなかった. そこで摂動論を基礎にした理論と比較可能な相互作用が弱い系で BEC の実現が望まれていた.

Einstein の予言から 70 年後の 1995 年, レーザー冷却の技術を用いて中性冷却原子気体の BEC が実現された [4, 5, 6]. レーザー冷却を用いた BEC の生成過程は次のようなものである. まず, 光の Doppler 効果を利用したレーザー冷却法により真空中の中性原子気体を冷却し, 磁気光学トラップで捕捉する. 次に磁気トラップによってこれを断熱圧縮する. 最後に, 蒸発冷却を行うことでエネルギーの高い原子を磁気トラップ中から追い出し, 原子集団の温度を μK オーダーまで下げる過程を経ることにより BEC を出現させる. BEC 出現は time of flight (TOF) 法を行うことで確認することができる [7]. TOF 法は原子団の運動量分布を観測する方法であり, 運動量零付近で原子密度が鋭いピークを示しているならば BEC が出現したと言える. この冷却原子系は ^4He の超流動や半導体中のエキシトンなどとは異なり, 非常に希薄かつ原子間相互作用が弱く, 摂動論による理論との比較に適した特性を備えている点で重要である. その上この系は, 磁気・光学的に補足されるという特性上, トラップを光学格子型としたり, トラップの締めつけを調整することにより 1 次元や 2 次元の系を実現することが可能である. また, Feshbach 共鳴 [8, 9] の技術を用いることで相互作用を斥力から引力に変えることもできる. すなわち, 冷却原子系は様々なパラメータでの実験を可能するため, 理論の検証の場として非常に重要な系であると言える. さらに, ダークソリトン [10, 11], ブライトソリトン [12, 13], 量子渦 [14, 15, 16, 17], 超流動-絶縁体転移 [18], Bloch 振動 [19], BEC の干渉 [20, 21, 22] 等の新たな興味深い現象も確認されているため, 冷却原子系は現在盛んに研究されている.

他方, 理論的な側面では, 素粒子物理学の発展に伴い場の量子論の研究が進んだ. 場の量子論は本質的に多体系の量子論と等価な理論であり, 現在では素粒子物理, 宇宙論, 原子核物理, 量子光学, 物性物理等と幅広い分野の基礎理論として扱われている. この場の量子論の発展の中で, 自発的対称性の破れという普遍的な概念が生まれた [23]. 例えば, BEC は場の量子論の枠組みでは大域的位相変換対称性の自発的破れとして説明される. 自発的対称性の破れとは, 系を記述するハミルトニアンを持つ連続対称性を真空が破り, その結果, 量子場の真空期待値が有限の値を持ち, その値は系の秩序変数として働くというものである. さらに, 自発的対称性の破れが起こるとき, ハミルトニアンの連続対称性を保持するためエネルギーがゼロのモードであるゼロモード (南部-Goldstone モード) が出現する (南部-Goldstone の定理) [23, 24]. このゼロモードは理論の自己無撞着性を保つ役割を担う重要なモードである. しかし, ゼ

ロモードは赤外発散の問題が存在するために扱いが非常に困難である。そのため、ゼロモードを考慮しない理論が大多数であり、ゼロモードの詳しい役割というのは十分に理解されているとは言えない。

本研究の主題はゼロモードの役割を理解するということにある。特に今回注目したのは対称性を陽に破るような摂動をかけたときの対応するゼロモードの振る舞いについてである。ゼロモードが現れるのは対称性が自発的に破れている場合である。すなわち、対称性を陽に破るような摂動ポテンシャルをかけた場合はゼロモードが消失する。この消失したゼロモードの推移について明らかにしていく。そこで本研究では、ソリトンのある1次元一様系の凝縮体を考える。これは後述のように位相以外に並進対称性の自発的破れに対するゼロモードが存在するという状況である。この系に並進対称性を陽に破る摂動を加えたときゼロモードがどのような影響を受けるか調べる。

本論文の構成は以下の通りである。

2章では中性冷却原子系についての基本的な議論を行う。初めに捕捉された中性冷却原子気体の作用を与え、ハミルトニアンを導出する。続いて、中性冷却原子気体の BEC を扱うために、自発的対称性の破れの機構を通して凝縮体を記述する秩序変数を与え、凝縮体が従う方程式である時間依存 Gross-Pitaevskii (TDGP) 方程式 [25], Gross-Pitaevskii (GP) 方程式 [26] を導出する。GP 方程式は非線形 Schrödinger 方程式の一種であり、凝縮体の振る舞いをよく記述することが知られている。さらに、凝縮体の安定性を解析する方程式である Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式 [27, 28] を導出する。BdG 方程式は凝縮体の微小変位を記述する 2×2 の非エルミート行列に対する固有値方程式である。

3章では BdG 方程式の解の性質について議論する。BdG 方程式が 2×2 の非エルミート行列に対する固有値方程式であることから、BdG 方程式の固有関数の間には通常用いられる定計量内積の下での直交関係は成り立たない。そこで BdG 行列の対称性を考慮し、新たに計量を Pauli の第 3 行列とする不定計量内積を導入する。この不定計量内積の下、各固有関数間に直交関係が成立することを示す。ただし、不定計量内積の代償として自身同士の内積(定計量内積のときと同じくノルムと名付ける)は正でなくなるということも示す。さらに、BdG 方程式には固有値がゼロとなるモードが存在することも見る。このモードは自発的対称性の破れ機構から生じるゼロモードと等価なモードであり(今後は BdG 方程式のゼロ固有値に属するモードもゼロモードと呼ぶ)、不定計量内積の下でそのノルムはゼロとなる。また、ゼロモードの存在は BdG 行列の退化の原因でもある。続いて、BdG 方程式を用いた非摂動ハミルトニアンの対角化法である BdG の方法 [33, 34] についても議論する。このようにハミルトニアンを対角化することで、BdG 解に実固有値しか存在しない場合に固有値は励起スペクトルとして解釈できることを示す。

4章では、一様系における GP 方程式の解としてソリトン解が存在することを示す。相互作用が正のときのソリトン解は凝縮体の密度が周りより低くなるダークソリトン解となり、相互作用が負のときは凝縮体の密度が周りより高くなるブライトソリトン解となる。この解はハミルトニアンに並進対称性があるにもかかわらず凝縮体の密度分布は並進対称性を破っている、つまり非一様であるという特徴を持つ。本研究では一貫して相互作用が正の場合を扱うので、本章で導出するのはダークソリトン解である。また、ダークソリトン解に対する BdG 方程式を解き、固有値・固有モードの具体形を与える。一様系に対するダークソリトン解は明らかに並進対称性を破る解である。そのため、BdG 解には BEC が存在することに対して現れる大域的位相変換対称性の自発的破れに対応するゼロモード(今後は簡単に位相のゼロモードと呼ぶ)に加え、並進対称性の自発的破れに対応するゼロモード(今後は簡単に並進のゼロモードと呼ぶ)が現れることも具体的に示す。

5章では、ゼロモードに対する BdG 方程式の摂動論について考える。励起モードに対する BdG 方程式の摂動論については中村 [29] により調べられている。しかし、ゼロモードに対しての摂動論は未だに行われていなかった。この理由はゼロモードに関する BdG 方程式はゼロモードの赤外発散由来の発散により通常の摂動論を用いることができないことにある。

6章では、厳密に解けるモデルを解き、固有値、固有モードの具体形を示す。この解析により並進対称性を破る摂動を加えることにより、並進のゼロモードは退化が解け、“2つの実モード”もしくは“2つの純虚数モード”を生むことを確認する。

5章ではこれらの研究結果をまとめ、今後の展望について述べる。

2 凝縮体の記述

この章では冷却原子気体の BEC を記述するための基礎事項を記述する。まず、中性原子気体を記述する作用を与え、場のハミルトニアンを導く。その後、大域的位相変換についての基礎事項を確認し、自発的対称性の破れに基づく BEC の議論を行う。なお、本論文では通して $\hbar = 1$ とする。

2.1 中性原子気体のハミルトニアン

捕捉された希薄中性原子気体を記述するラグランジアン密度 \mathcal{L} と作用 S は次のように仮定される

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger(x)(T - K - V + \mu)\psi(x) - \frac{g}{2}\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x), \quad (2.1)$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

ただし

$$x = (\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

$$T = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$K = -\frac{1}{2m}\nabla^2, \quad (2.5)$$

$$V = V_{ex}(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

であり、 m は原子の質量、 μ は化学ポテンシャル、 V は外部ポテンシャルである。ここで、この系は十分希薄であるため相互作用は2体の接触型で記述されるとした。また、この相互作用係数 g は扱う系が低温であることより s 波散乱長 a を用いて

$$g = \frac{4\pi a}{m}, \quad (2.7)$$

と表される。相互作用 g は $g > 0$ のとき斥力で、 $g < 0$ のとき引力である。本論文では通して $g > 0$ 、つまり斥力を仮定する。

$\psi(x)$ の共役量 $\Pi(x)$ を以下のように定義する：

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^\dagger(x). \quad (2.8)$$

$\psi(x)$ と $\Pi(x)$ の間に同時刻交換関係

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.9)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.10)$$

を課し, 場を量子化する. なお (2.8) を用いると同時刻交換関係は

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.11)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.12)$$

となる. ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d\mathbf{x} [\hat{\Pi}(x)\partial_t\hat{\psi}(x) - \mathcal{L}] \\ &= \int d\mathbf{x} [\hat{\psi}^\dagger(x)(K + V - \mu)\hat{\psi}(x) + \frac{g}{2}\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

と求まる.

2.2 大域的位相変換不変性と変換の生成子

ハミルトニアン (2.13) は大域的位相変換

$$\hat{\psi}(x) \rightarrow e^{i\theta}\hat{\psi}(x), \quad (2.14)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\theta}\hat{\psi}^\dagger(x), \quad (2.15)$$

の下で不変である. 従って, Nöther の定理より大域的位相変換不変性に対する保存量が存在する. 以下でその保存量を導く.

まず \mathbf{c} 数場で議論を始める. 大域的位相変換について連続の方程式

$$\partial_\mu N^\mu(x) = 0, \quad (2.16)$$

を満たす Nöther 流 N^μ は

$$N^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi(x))} \delta\psi(x), \quad (2.17)$$

ただし, 大域的位相変換における $\delta\psi(x)$ は

$$\delta\psi(x) = i\theta\psi(x), \quad (2.18)$$

である. 保存量は Nöther 流の第 0 成分を用いて

$$N = \int d^3\mathbf{x} N^0(x), \quad (2.19)$$

となる. つまり, 大域的位相変換における保存量は

$$N = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x)\psi(x), \quad (2.20)$$

と書ける. この右辺は粒子数を表している. したがって, この結果は大域的位相変換不変な系において粒子数が保存されることを意味する.

ここで場 $\psi(x)$ に同時刻交換関係を課し, 場を量子化する. このとき保存量は

$$\hat{N} = \int d^3\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x), \quad (2.21)$$

と書ける. これが局所的位相変換不変性に対する保存量である. それは (2.21) がハミルトニアン (2.13) と可換であることからわかる.

最後に, 保存量は変換の生成子であることを注意しておく. 実際 (2.21) を用いると

$$e^{i\theta\hat{N}} \hat{\psi}(x) e^{-i\theta\hat{N}} = e^{-i\theta} \hat{\psi}(x), \quad (2.22)$$

となり, \hat{N} は大域的位相変換の生成子であることを確認することができる. また, ハミルトニアンが大域的位相変換に対し不変であることは \hat{N} を用いて

$$e^{i\theta\hat{N}} \hat{H} e^{-i\theta\hat{N}} = \hat{H}, \quad (2.23)$$

と表すことができる.

2.3 Bose-Einstein 凝縮と自発的対称性の破れ

場の量子論における量子相転移の機構として自発的対称性の破れが知られている. 自発的対称性の破れとは, 場の連続変換に対しハミルトニアン (もしくはラグランジアン) は不変であるが真空が連続変換に対し不変でない状態をいう. 場の量子論において BEC は大域的位相変換対称性の自発的破れ機構により説明される. これは, BEC が起こると真空は大域的位相変換について不変ではなくなる, すなわち真空の位相は確定した状態となるのである.

BEC 発現時の真空を $|\Omega\rangle$ とする. このとき真空は位相変換対称性が破れているため

$$e^{i\theta\hat{N}} |\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle, \quad (2.24)$$

すなわち

$$\hat{N} |\Omega\rangle \neq 0, \quad (2.25)$$

となり, 場は 0 ではない真空期待値

$$\langle \Omega | \hat{\psi}(x) | \Omega \rangle = \xi(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

を持つようになる.

この $\xi(\mathbf{x})$ は凝縮体を記述する秩序変数であり, 凝縮原子の密度分布 $\rho_c(\mathbf{x})$, 凝縮原子数 N_c と

$$\rho_c(\mathbf{x}) = |\xi(\mathbf{x})|^2, \quad (2.27)$$

$$N_c = \int d^3\mathbf{x} \rho_c(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} |\xi(\mathbf{x})|^2, \quad (2.28)$$

の関係にあると解釈される.

ここで場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ を凝縮相と非凝縮相に分離する

$$\hat{\psi}(x) = \xi(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}(x). \quad (2.29)$$

非凝縮相の場の演算子 $\hat{\varphi}(x)$ の同時刻交換関係は (2.11), (2.12) より

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.30)$$

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.31)$$

であり, 真空期待値は

$$\langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0, \quad (2.32)$$

である.

次に (2.29) を用いてハミルトニアン \hat{H} を書き直し, 量子場 $\hat{\varphi}(x)$ の 2 次形式で構成された非摂動ハミルトニアン \hat{H}_0 とそれ以外の摂動ハミルトニアン \hat{H}_I に分ける

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \quad (2.33)$$

具体的に \hat{H}_0, \hat{H}_I は,

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = \int d^3\mathbf{x} & \left[\hat{\varphi}^\dagger(x)(K + V - \mu + 2g|\xi(\mathbf{x})|^2)\hat{\varphi}(x) \right. \\ & \left. + \frac{g}{2}(\xi^{*2}(\mathbf{x})\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x) + \xi^2(\mathbf{x})\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}^\dagger(x)) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = \int d^3\mathbf{x} & \left[\xi^*(\mathbf{x})(K + V - \mu + g|\xi(\mathbf{x})|^2)\hat{\varphi}(x) \right. \\ & + \hat{\varphi}^\dagger(x)(K + V - \mu + g|\xi(\mathbf{x})|^2)\xi(\mathbf{x}) + g\xi^*(\mathbf{x})\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x) \\ & \left. + g\xi(\mathbf{x})\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x) + \frac{g}{2}\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x) \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

である. ここでハミルトニアン内の場の 1 次の項は摂動項に含めた. 上記のハミルトニアン \hat{H} は量子場 $\hat{\varphi}(x)$ の大域的位相変換

$$\hat{\varphi}(x) \rightarrow e^{i\theta'} \hat{\varphi}(x), \quad (2.36)$$

$$\hat{\varphi}^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\theta'} \hat{\varphi}^\dagger(x), \quad (2.37)$$

に対して明らかに不変ではない. このような変換の生成子は準粒子の数

$$\hat{N}_q = \int d^3\mathbf{x} \hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x), \quad (2.38)$$

である. すなわち, BEC 発現時に準粒子の数 N_q は保存しないことがわかる.

3 Bogoliubov-de Gennes の方法

この章ではまず, Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式を導出する. その後, BdG 方程式の固有関数の直交性, 完全性について議論をして, 最後に BdG の方法による非摂動ハミルトニアンの対角化の議論をする.

3.1 Bogoliubov-de Gennes 方程式

まず、凝縮体の従う方程式である Gross-Pitaevskii (GP) 方程式を導出する。Heisenberg 方程式より場 $\hat{\psi}(x)$ の時間発展は

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(x) &= [\hat{\psi}(x), \hat{H}] \\ &= (K + V - \mu + g\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x))\hat{\psi}(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。非凝縮相の効果が十分小さいとすると、場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ は c 数場 $\psi(x)$ とできる：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = (K + V - \mu + g|\psi(x)|^2)\psi(x). \quad (3.2)$$

この方程式を時間依存 Gross-Pitaevskii (TDGP) 方程式という。さらに今、定常状態であるとして場 $\psi(x)$ を $\xi(\mathbf{x})$ とすると、定常 GP 方程式

$$(K + V - \mu + g|\xi(\mathbf{x})|^2)\xi(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.3)$$

を導くことができる。

次に TDGP 方程式 (3.4) より、定常状態からの微小変位を記述する BdG 方程式を導く。まず、TDGP 方程式において場 $\psi(x)$ を定常状態から $\psi(x) = \xi(\mathbf{x}) + \delta\psi(x)$ と微小変位させる。 $\delta\psi(x)$ は場の微小変位を表しているため、 $\delta\psi(x)$ の 2 次以上の項を落としてまとめると

$$i\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi(x) = (K + V - \mu + 2g|\xi(\mathbf{x})|^2)\delta\psi(x) + g\xi^2(\mathbf{x})\delta\psi^*(x), \quad (3.4)$$

となる。ここで、式を見やすくするため

$$\mathcal{L} = K + V - \mu + 2g|\xi(\mathbf{x})|^2, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{M} = g\xi^2(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

とし、さらに $\delta\psi(x)$ を

$$\delta\psi(x) = u_n(\mathbf{x})e^{-i\omega_n t} + v_n^*(\mathbf{x})e^{i\omega_n^* t}, \quad (3.7)$$

と変数分離し、(3.4) を整理すると

$$T\mathbf{y}_n(\mathbf{x}) = \omega_n\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

を得る。ただし、 T, \mathbf{y}_n はそれぞれ

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y}_n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{x}) \\ v_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

とした。この方程式を BdG 方程式という。

ここで注意すべきことは、行列 T が非エルミートであるため、固有値 ω_n が一般に複素数であることである。BdG 方程式の固有値 ω_n に虚部が存在する場合、凝縮体の変位 $\delta\psi$ は指数関数的に変動し定常状態が崩れてしまう。そのため、固有値 ω_n に虚部が存在する場合、凝縮体は動的に不安定であると言える。

3.2 Bogoliubov-de Gennes 方程式の解の性質

この節では前節で議論した BdG 方程式の解の性質を調べる.

3.2.1 内積の定義と固有関数の分類

行列 T には

$$\sigma_1 T \sigma_1 = -T^*, \quad (3.11)$$

$$\sigma_3 T \sigma_3 = T^\dagger, \quad (3.12)$$

という対称性が存在する. ただし, σ_1, σ_3 は Pauli 行列である.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

行列 T は非エルミートであるので固有関数 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$ には通常の意味での直交関係はない. そこで T の対称性を考慮し新たに不定計量の内積

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \equiv \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{s}^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 \mathbf{t}(\mathbf{x}), \quad (3.14)$$

を導入する. これは内積の計量に Pauli の第 3 行列を採用したものである. このように内積を定義することにより T は擬エルミート性

$$(\mathbf{s}, T\mathbf{t}) = (T\mathbf{s}, \mathbf{t}), \quad (3.15)$$

を示すこととなる. なお, この証明には T の対称性 (3.12) と Pauli 行列の性質 $\sigma_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, 3$) を用いた.

ノルムもこの内積の下

$$\|\mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{s}, \mathbf{s}) = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{s}^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 \mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

と定義する. このとき内積中の不定計量 σ_3 の影響でノルムの 2 乗である $\|\mathbf{s}\|^2$ が正である保証はなくなる. つまり, 負ノルムを持つ固有関数やゼロでない固有関数に対してゼロノルムとなる固有関数も存在することとなる. 規格化ではノルムの 2 乗の符号を変えることは出来ないので BdG 方程式の固有関数はノルムの 2 乗の符号により分類することができる. ノルムの 2 乗の符号が正である固有関数, 符号が負である固有関数, ゼロである固有関数をそれぞれ正ノルム, 負ノルム, ゼロノルムと呼ぶことにする.

3.2.2 直交性

以下しばらく $\omega \in \mathbb{R}$ を仮定する. $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_m(\mathbf{x})$ を固有値 ω_n , ω_m に属する固有関数とする. このとき

$$(\mathbf{y}_n, T\mathbf{y}_m) = \omega_m(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m) = (T\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m) = \omega_n(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m), \quad (3.17)$$

より

$$(\omega_n - \omega_m)(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m) = 0, \quad (3.18)$$

となり, $\omega_n \neq \omega_m$ の場合 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_m(\mathbf{x})$ は不定計量の内積の下直交する. また $\omega_n = \omega_m$ の場合は Gram-Schmidt の直交化法を用いることで, 縮退した固有関数 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_m(\mathbf{x})$ を直交するようにできる.

さらに対称性 (3.11) より, 固有値 ω_n に属する固有関数 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$ が存在するならば固有値 $-\omega_n$ を持つ固有関数

$$\mathbf{z}_n(\mathbf{x}) \equiv \sigma_1 \mathbf{y}_n^*(\mathbf{x}), \quad (3.19)$$

が存在することが以下により示せる

$$T\mathbf{z}_n(\mathbf{x}) = T\sigma_1 \mathbf{y}_n^*(\mathbf{x}) = -\sigma_1 T^* \mathbf{y}_n^*(\mathbf{x}) = -\omega_n \sigma_1 \mathbf{y}_n^*(\mathbf{x}) = -\omega_n \mathbf{z}_n(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

この $\mathbf{z}_n(\mathbf{x})$ のノルムの2乗は

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_n\|^2 &= \int d^3\mathbf{x} (\sigma_1 \mathbf{y}_n^*)^\dagger \sigma_3 (\sigma_1 \mathbf{y}_n^*) \\ &= \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{y}_n^*)^\dagger \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 \mathbf{y}_n^* \\ &= - \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{y}_n^*)^\dagger \sigma_3 \mathbf{y}_n^* \\ &= -\|\mathbf{y}_n\|^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

となり, $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$ と逆の符号をもつ. したがって, 正ノルムと負ノルムの固有関数は必ずペアで表れる. 以降, 正ノルムは $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$, 負ノルムは $\mathbf{z}_n(\mathbf{x})$ と表すこととする.

$\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x})$ をそれぞれ規格化すると正規直交関係

$$(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m) = \delta_{nm}, \quad (3.22)$$

$$(\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_m) = -\delta_{nm}, \quad (3.23)$$

$$(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_m) = 0, \quad (3.24)$$

を得る.

3.2.3 ゼロモード

系の対称性が自発的に破れているとき, BdG 方程式はゼロ固有値に属するモード

$$T\mathbf{y}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.25)$$

が存在する. これは自発的対称性の破れに伴うゼロモードに対応するモードである. そこで, 今後このモードはゼロモードと呼ぶことにする.

BdG 方程式のゼロモードは次の方法で求めることができる. GP 方程式を不変とする微小変換 $\xi \rightarrow \xi + i\delta\xi$ を考える. このような変換が存在する場合, $\delta\xi$ の1次の項が満たす方程式は

$$T \begin{pmatrix} \delta\xi(\mathbf{x}) \\ -\delta\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.26)$$

となる. すなわち, GP 方程式を不変とする微小変換が存在すればゼロモードを求めることができる.

- 大域的位相変換に対するゼロモード

GP 方程式は大域的位相変換に対し不変である．そこで，ここでは大域的位相変換対称性に対するゼロモードを考える．

η を微小な定数とすると，大域的位相変換の微小変換は

$$\xi(\mathbf{x}) \rightarrow \xi(\mathbf{x}) + i\eta\xi(\mathbf{x}), \quad (3.27)$$

である．すなわち，(3.26) より大域的位相変換対称性に対するゼロモードは

$$\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ -\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

である．BEC が存在する場合，系は大域的位相変換対称性が自発的に破れている．そのため，少なくとも位相のゼロモードが存在する [33, 34].

- 並進変換に対するゼロモード

一様系の GP 方程式は並進変換に対し不変である．そこで，ここでは並進対称性に対するゼロモードを考える．ここでは簡単のため一方向への並進のみ考える．

d を微小な定数とすると， x 方向への並進の微小変換は

$$\xi \rightarrow \xi + d\frac{\partial}{\partial x}\xi, \quad (3.29)$$

である．すなわち，(3.26) より並進変換対称性に対するゼロモードは

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial\xi}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ -i\frac{\partial\xi^*}{\partial x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

である．

また，今後はゼロモードを複数持つ場合の議論を行う．そこで，各対称性に対応するゼロモードを見分けるためにゼロモードにはそれぞれの対称性に関するラベルを貼っておく．例えば，大域的位相変換対称性に対するゼロモードは

$$\mathbf{y}_{0,\theta} = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ -\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

x 方向の並進対称性に対するゼロモードは

$$\mathbf{y}_{0,x} = \begin{pmatrix} i\frac{\partial\xi}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ -i\frac{\partial\xi^*}{\partial x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

と書く事にする．

ゼロモード $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ (i はゼロモードのラベル) のノルムを考える．式 (3.26) より

$$\|\mathbf{y}_{0,i}\|^2 = \int d^3\mathbf{x} (|\delta\xi(\mathbf{x})|^2 - |\delta\xi^*(\mathbf{x})|^2) = 0, \quad (3.33)$$

となる．つまり，ゼロモードはゼロノルムである．

$\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ がゼロノルムであることより $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ の直交関係は

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_n) = 0, \quad (3.34)$$

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{z}_n) = 0, \quad (3.35)$$

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_{0,i}) = 0, \quad (3.36)$$

となり, 自身と全ての励起モードと直交するという性質を持つ. また, ゼロモード間には常に直交化可能である. そこで, この章ではゼロモード間には全て直交しているものとする.

また, 最後にゼロモード $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ には

$$\sigma_1 \mathbf{y}_{0,i}^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}), \quad (3.37)$$

という対称性が成立するため, ゼロモード $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ には対となる独立な固有関数 $\mathbf{z}_{0,i}(\mathbf{x})$ は存在しないことも注意しておく.

3.2.4 共役モード

$\mathbf{y}_0(\mathbf{x})$ の直交性より, BdG 方程式の解 $\{\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})\}$ のみでは完全系を張れない. したがって, BdG 方程式の固有関数系を用いて完全系を作るためには, BdG 方程式の解ではないが $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ とは直交せず $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x})$ とは直交する関数を導入し, 完備化する必要がある. そこで次の方程式を考える [33, 34]

$$T \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) = I_i \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}). \quad (3.38)$$

$\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ は共役モード (adjoint モード) と呼ばれ, BdG 行列 T とゼロモード $\mathbf{y}_{0,i}$ の対称性より関数 $h_i(\mathbf{x})$ を用いて

$$\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_i(\mathbf{x}) \\ h_i^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

と表される. ただし, I_i は実数であり, これは $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ の内積を 1 にするための因子である. $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ は BdG 方程式の固有関数ではなく, T^2 の固有値ゼロの固有関数である. (3.38) を満たす関数は適切な直交関係

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_n) = 0, \quad (3.40)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{z}_n) = 0, \quad (3.41)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{0,i}) = 1, \quad (3.42)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{-1,i}) = 0, \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

を持ち, 異なるラベルを持つゼロモードや共役モードとの間には直交化を施すことにより

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{0,j}) = 0, \quad (i \neq j) \quad (3.45)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{-1,j}) = 0, \quad (i \neq j) \quad (3.46)$$

とすることができる (付録 A). つまり, $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ は BdG 方程式の固有関数系を完備化する役割を担っている. このような方法は退化行列の三角化で用いられるものと同様である.

位相のゼロモード (3.31) に対応する共役モードに関しては次のような特解が知られている.

$$\mathbf{y}_{-1,\theta}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial N} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ \xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, I_\theta = \frac{\partial \mu}{\partial N} \quad (3.47)$$

これは位相のゼロモードが満たす BdG 方程式の両辺 N で微分することで得られる [32]. なお, 位相以外の共役モードについてはその特解を求める一般的な方法は知られていない.

また、共役モードの特解にゼロモードの線形結合を加えたものも共役モードの決定方程式 (3.38) を満たす。つまり、共役モードは一意には決まらない。しかし、共役モードはゼロモードと非直交であり、その他のモードと直交するという性質さえ持てば良い。ゼロモードは他のモードの直交関係に影響を与えない。そのため、ゼロモードの不定性は共役モードの性質に影響を与えないため、決定方程式 (3.38) の特解を 1 つ求めれば十分である。

最後に、共役モード $\mathbf{y}_{-1}(\mathbf{x})$ には

$$\sigma_1 \mathbf{y}_{-1,i}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}), \quad (3.48)$$

という対称性が成立するため、共役モード $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ には対となる独立な関数 $\mathbf{z}_{-1,i}(\mathbf{x})$ は存在しないことにも注意しておく。

3.2.5 完全系

これまでの議論より $\{\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\}$ で張られる完全性を

$$\sum_{n=1} \{\mathbf{y}_n(\mathbf{x}) \mathbf{y}_n^\dagger(\mathbf{x}') - \mathbf{z}_n(\mathbf{x}) \mathbf{z}_n^\dagger(\mathbf{x}')\} + \sum_{i=1} \{\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{-1,i}^\dagger(\mathbf{x}') + \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{0,i}^\dagger(\mathbf{x}')\} = \sigma_3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.49)$$

で仮定する。この完全性を用いると任意の 2 重項 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1} \{a_n \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) - b_n \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\} + \sum_{i=1} \{c_i \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) + d_i \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\}, \quad (3.50)$$

と展開することができる。ただし、その展開係数は $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ の直交性より

$$a_n = (\mathbf{y}_n, \mathbf{s}), \quad (3.51)$$

$$b_n = (\mathbf{z}_n, \mathbf{s}), \quad (3.52)$$

$$c_i = (\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{s}), \quad (3.53)$$

$$d_i = (\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{s}), \quad (3.54)$$

となる。

また、これ以降 BdG 方程式の固有関数系に共役モードを加えたものを BdG 完全系と呼ぶこととする。

3.3 複素モードの性質

この節では複素固有値モード (複素モード) の持つ性質について調べる。

3.3.1 複素モードの分類

まず、BdG 方程式が複素固有値を持つ場合の固有関数の性質を調べる。複素固有値 ω_μ に属する固有関数を $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ とおく。 $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ は

$$(\mathbf{y}_\mu, T \mathbf{y}_\mu) = \omega_\mu (\mathbf{y}_\mu, \mathbf{y}_\mu) = (T \mathbf{y}_\mu, \mathbf{y}_\mu) = \omega_\mu^* (\mathbf{y}_\mu, \mathbf{y}_\mu), \quad (3.55)$$

より

$$(\omega_\mu - \omega_\mu^*) \|\mathbf{y}_\mu\|^2 = 0, \quad (3.56)$$

ω_μ は複素固有値なので $\text{Im } \omega_\mu \neq 0$ である. よって

$$\|\mathbf{y}_\mu\|^2 = 0, \quad (3.57)$$

である. つまり, 複素モードは必ずゼロノルムである.

3.3.2 直交性と完全系

他のモードとの直交性を調べる. 複素モード同士の直交性は

$$(\mathbf{y}_\nu, T\mathbf{y}_\mu) = \omega_\mu(\mathbf{y}_\nu, \mathbf{y}_\mu) = (T\mathbf{y}_\nu, \mathbf{y}_\mu) = \omega_\nu^*(\mathbf{y}_\nu, \mathbf{y}_\mu), \quad (3.58)$$

より

$$(\omega_\mu - \omega_\nu^*)(\mathbf{y}_\nu, \mathbf{y}_\mu) = 0, \quad (3.59)$$

つまり, $\omega_\mu \neq \omega_\nu^*$ のとき直交することがわかる. また, 実モード, ゼロモードの場合も同様な計算により

$$(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_\mu) = 0, \quad (3.60)$$

$$(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_\mu) = 0, \quad (3.61)$$

となり常に複素モードと直交することが示せる. これらより固有値 ω_μ に属する複素モード $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ と非直交である固有関数は固有値 $\omega_\nu = \omega_\mu^*$ に属する複素モード $\mathbf{y}_\nu(\mathbf{x})$ のみであることが分かる. ここで, 完全性を保つためには $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ と非直交である固有関数が必要である. そのため固有値 ω_μ に属する複素モード $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ が存在するならば固有値 ω_μ^* に属する固有関数が存在しなければならないが, この存在は対称性 (3.12) が保証している. すなわち, 固有値 ω_μ に属する複素モード $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})$ が存在するならば

$$\text{Det}|T - \omega_\mu| = 0, \quad (3.62)$$

である. したがって,

$$0 = \text{Det}|T - \omega_\mu|^* = \text{Det}|T^\dagger - \omega_\mu^*| = \text{Det}|\sigma_3 T \sigma_3 - \omega_\mu^*| = \text{Det}|T - \omega_\mu^*|, \quad (3.63)$$

よって, $T\mathbf{y}'_\mu(\mathbf{x}) = \omega_\mu^* \mathbf{y}'_\mu(\mathbf{x})$ は意味ある解を持つと言える.

この ω_μ^* に属する固有関数を今後 $\mathbf{y}_{*\mu}(\mathbf{x})$ と書く. さらに $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{*\mu}(\mathbf{x})$ は今後

$$(\mathbf{y}_\mu, \mathbf{y}_{*\nu}) = \delta_{\mu\nu}, \quad (3.64)$$

を満たすように規格化されているものとする.

さらに, 実固有値の場合と同様の議論で

$$\mathbf{z}_\mu \equiv \sigma_1 \mathbf{y}_\mu^*, \quad (3.65)$$

は固有値 $-\omega_\mu^*$ に属する固有関数であり

$$\|\mathbf{z}_\mu\|^2 = 0, \quad (3.66)$$

$$(\mathbf{z}_\mu, \mathbf{z}_{*\nu}) = -\delta_{\mu\nu}, \quad (3.67)$$

$$(\mathbf{z}_\mu, \mathbf{y}_\nu) = 0, \quad (3.68)$$

$$(\mathbf{z}_\mu, \mathbf{y}_{*\nu}) = 0, \quad (3.69)$$

及び、全ての実モード、ゼロモードと直交することがわかる。

ここで注意すべきことは複素モードは $\text{Re}\omega_\mu \neq 0$ のとき $\omega_\mu, -\omega_\mu^*, \omega_\mu^*, -\omega_\mu$ に属する固有モード $\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x}), \mathbf{z}_\mu(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{*\mu}(\mathbf{x}), \mathbf{z}_{*\mu}(\mathbf{x})$ の4つ組で現れるということである。

以上より、複素固有値が存在する場合の完全性は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1} \{\mathbf{y}_n(\mathbf{x})\mathbf{y}_n^\dagger(\mathbf{x}') - \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\mathbf{z}_n^\dagger(\mathbf{x}')\} + \sum_{i=1} \{\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})\mathbf{y}_{-1,i}^\dagger(\mathbf{x}') + \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\mathbf{y}_{0,i}^\dagger(\mathbf{x}')\} \\ & + \sum_{\mu} \{\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x})\mathbf{y}_{*\mu}^\dagger(\mathbf{x}') + \mathbf{y}_{*\mu}(\mathbf{x})\mathbf{y}_\mu^\dagger(\mathbf{x}') - \mathbf{z}_\mu(\mathbf{x})\mathbf{z}_{*\mu}^\dagger(\mathbf{x}') - \mathbf{z}_{*\mu}(\mathbf{x})\mathbf{z}_\mu^\dagger(\mathbf{x}')\} \\ & = \sigma_3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (3.70)$$

で仮定する。この完全性を用いると任意の2重項 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1} \{a_n \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + a_n^\dagger \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\} + \sum_{j=1} \{-iQ_j \mathbf{y}_{0,j}(\mathbf{x}) + P_j \mathbf{y}_{-1,j}(\mathbf{x})\} \quad (3.71)$$

$$+ \sum_{\mu} \{A_\mu \mathbf{y}_\mu(\mathbf{x}) + B_\mu \mathbf{y}_{*\mu}(\mathbf{x}) + A_\mu^\dagger \mathbf{z}_\mu(\mathbf{x}) + B_\mu^\dagger \mathbf{z}_{*\mu}(\mathbf{x})\}, \quad (3.72)$$

と展開することができる。ただし、その展開係数は直交性より

$$a_n = (\mathbf{y}_n, \mathbf{s}), \quad a_n^\dagger = -(\mathbf{z}_n, \mathbf{s}), \quad (3.73)$$

$$Q_j = i(\mathbf{y}_{-1,j}, \mathbf{s}), \quad P_j = (\mathbf{y}_{0,j}, \mathbf{s}), \quad (3.74)$$

$$A_\mu = (\mathbf{y}_{*\mu}, \mathbf{s}), \quad B_\mu = (\mathbf{y}_\mu, \mathbf{s}), \quad (3.75)$$

$$A_\mu^\dagger = -(\mathbf{z}_{*\mu}, \mathbf{s}), \quad B_\mu^\dagger = -(\mathbf{z}_\mu, \mathbf{s}), \quad (3.76)$$

3.4 ハミルトニアンに対角化

BdG 完全系を用いて非摂動ハミルトニアン (2.34) を対角化していく。ただし、ここでは複素固有値が存在しない場合のみ扱う。また、簡単のためこの節では位相変換対称性の自発的破れのみ起きた系を想定する。まず、次式で定義する2重項場 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

を用いて非摂動ハミルトニアンを書き換える。

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}) & \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 T \hat{\Phi}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\Phi}, T \hat{\Phi}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

次に、 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$ を BdG 完全系で展開する

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1} \{\hat{a}_n \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + \hat{a}_n^\dagger \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\} - i\hat{Q} \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \hat{P} \mathbf{y}_{-1}(\mathbf{x}). \quad (3.79)$$

ただし、それぞれの係数は

$$\hat{a}_n = (\mathbf{y}_n, \hat{\Phi}), \quad (3.80)$$

$$\hat{a}_n^\dagger = -(\mathbf{z}_n, \hat{\Phi}), \quad (3.81)$$

$$\hat{Q} = i(\mathbf{y}_{-1}, \hat{\Phi}), \quad (3.82)$$

$$\hat{P} = (\mathbf{y}_0, \hat{\Phi}), \quad (3.83)$$

である。ここで、 \hat{Q}, \hat{P} はエルミートであり、 $\hat{Q}, \hat{P}, \hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger$ の間の交換関係は以下のようになる

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i, \quad (3.84)$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad (3.85)$$

$$\text{others} = 0. \quad (3.86)$$

式 (3.79) を非摂動ハミルトニアンに代入すると

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{1}{2}(\hat{\Phi}, T\hat{\Phi}) \\ &= \frac{\hat{P}^2}{2} I + \sum_{n=1} \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + (\text{c-number}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

となる。

(3.87) の第 1 項目はゼロモードの項であり、第 2 項は励起モードの項である。この式より、BdG 方程式の固有値は系のエネルギーであると解釈することができる。ただし、ゼロモード部分は共役モード導入の影響により対角化されておらず、励起モードとは異なり Fock 空間からはみ出しているためにこのような量子座標で記述される。しかし、励起モード項のようにまとまらないということは、ゼロモードの固有値 $\omega_0 = 0$ にも係わらず、系に影響を及ぼす可能性があることを示唆している。

3.5 Bogoliubov-de Gennes 解析と不安定性

前節で行った非摂動ハミルトニアンの対角化において、正ノルムの固有値が励起スペクトルに対応することがわかる。つまり、正の固有値 $\omega_n > 0$ のモードかつ正ノルムであるモードと、その対となるモードのハミルトニアンに対する寄与は同等であり、正のエネルギーを与える。このように固有値とノルムが同符号ならばハミルトニアンに対して正の寄与をする。固有値とノルムが異符号の場合を考える。そのようなモードはハミルトニアンに負のエネルギーを与える。すなわち、もしもそのような励起モードが存在すればエネルギーに下限がなくなり、系は不安定となるのである。

実際、BdG 解析において負の固有値を持ちながら正ノルムであるモードが現れる状況があることが知られている [35]。これは散逸を伴う不安定性が存在することを意味している。この機構を起源とする系の不安定性は Landau 不安定性と呼ばれるものである。Landau 不安定性による凝縮体の崩壊はエネルギーの散逸を伴う熱力学的な過程である。3 体衝突以上の高次散乱過程を無視できる場合、冷却原子系におけるエネルギーの散逸の原因は熱励起した非凝縮相と凝縮相の間の散乱にある。ゼロ温度に近い系において、非凝縮相の割合は少なくなり、エネルギーの散逸は起こりにくくなる。そのため系の粒子がほとんど全て凝縮していると考えられるゼロ温度の理論においてこのような不安定性は現れない。

また、第 3 章で述べた通り複素モードが現れるとき系は動的に不安定であることが知られている。動的不安定性を起源とした凝縮体の崩壊はエネルギーの散逸を必要としない量子論特有の崩壊過程であ

る. すなわち, この動的不安定性を起源とする崩壊はゼロ温度においても起き得るものであり, Landau 不安定性を起源とする崩壊とは明確に異なる.

本研究の対象はゼロ温度である. つまり, この研究において不安定と言った場合, それは動的不安定性のことであることを注意しておく.

4 ダークソリトン解

本章では, 1次元一様系に対する GP 方程式を解き, 流れがない場合のソリトン解を導出する. 続いて, この解に対する BdG 方程式も解き固有値・固有モードを求める. なお, 本論文では通じて相互作用を正としているためここではダークソリトン解を想定している. また, 本章より x は 1次元の位置座標の意味で用いることとする.

4.1 Gross-Pitaevskii 方程式のダークソリトン解

一様系に対する 1次元 GP 方程式

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \mu + g\xi(x)^2 \right\} \xi(x) = 0, \quad (4.1)$$

において, $\xi(x_0) = 0$, $\xi(\infty) = \sqrt{n_c}$ となる特解を探す. この特解は

$$\xi(x) = \sqrt{n_c} \tanh\{\alpha(x - x_0)\}, \quad (4.2)$$

$$\mu = gn_c, \quad (4.3)$$

である. ただし, $\alpha = \sqrt{m\mu} = \sqrt{mgn_c}$ とした. この解は, 位置 x_0 にソリトン中心が存在するダークソリトン解である. ダークソリトン解は系が一様であるにも係わらず, 凝縮体の密度分布は一様でない. そのため, ダークソリトンが存在するとき, 系の並進対称性は自発的に破れている. なお, ソリトン中心は一般性を失わず原点にとることができるので, 今後は $x_0 = 0$ とする.

4.2 ダークソリトンの存在する系に対する Bogoliubov-de Gennes 解

ダークソリトンの存在する 1次元一様系に対する BdG 方程式は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

ただし,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - gn_c + 2gn_c \tanh^2(\alpha x), \quad \mathcal{M} = gn_c \tanh^2(\alpha x), \quad (4.5)$$

である. ここで, $u(x), v(x)$ の特解として \tanh の冪型を考える

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N_A} A_n \tanh^n(\alpha x) e^{ipx}, \quad (4.6)$$

$$v(x) = \sum_{n=0}^{N_B} B_n \tanh^n(\alpha x) e^{ipx}. \quad (4.7)$$

ただし, N_A, N_B は有限の整数である.

BdG 方程式に代入すると \tanh の冪の最高次は

$$\dots + \mu \left\{ \frac{N_A(N_A + 1)}{2} - 2 \right\} A_{N_A} \tanh^{N_A+2}(\alpha x) + \mu B_{N_B} \tanh^{N_B+2}(\alpha x) = 0, \quad (4.8)$$

$$\dots + \mu \left\{ \frac{N_B(N_B + 1)}{2} - 2 \right\} B_{N_B} \tanh^{N_B+2}(\alpha x) + \mu A_{N_A} \tanh^{N_A+2}(\alpha x) = 0, \quad (4.9)$$

となることがわかる. 前提より $A_{N_A}, B_{N_B} \neq 0$ であり, 自明解も除くと (4.8), (4.9) がそれぞれ成立するためには少なくとも $N_A = N_B (= N$ と書く) が必要. したがって, \tanh の最高次数の係数は

$$\left\{ \frac{N(N+1)}{2} - 2 \right\} A_N + B_N = 0, \quad (4.10)$$

$$\left\{ \frac{N(N+1)}{2} - 2 \right\} B_N + A_N = 0, \quad (4.11)$$

となる. 上の 2 式より最高次数 N は 1 か 2 に限られる. また, 最高次数の係数にはそれぞれ $N_A = N_B = 1$ のとき $A_1 = -B_1$, $N_A = N_B = 2$ のとき $A_2 = B_2$ という関係が成立する.

凝縮体に流れがない場合, つまり秩序変数が本質的に実数である今回の場合は $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$ ととることができる. このとき, BdG 方程式は

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L} - \mathcal{M} \\ \mathcal{L} + \mathcal{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) + v(x) \\ u(x) - v(x) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u(x) + v(x) \\ u(x) - v(x) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

とした方が解きやすい. そこで,

$$u(x) + v(x) = (A + iB \tanh(\alpha x) + C \tanh^2(\alpha x)) e^{ipx}, \quad (4.13)$$

$$u(x) - v(x) = (A' + iB' \tanh(\alpha x)) e^{ipx}, \quad (4.14)$$

とし, 係数と固有値を決定する. ここで, \tanh の 1 次の項の i は後の便利のために付けた.

(4.13), (4.14) を BdG 方程式 (4.12) に代入すると係数と固有値の決定方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_p - \mu & \alpha p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_p \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\alpha p \\ \epsilon_p - \mu & \alpha p & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_p & -2\alpha p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ A' \\ B' \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ A' \\ B' \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$3\mu A - \alpha p B + (\epsilon_p + 3\mu)C = 0, \quad (4.16)$$

$$\mu B + \alpha p C = 0, \quad (4.17)$$

が得られる. ただし, $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ とした.

まず, (4.15) を解くと, BdG 方程式の固有値は

$$\omega = 0, \pm\epsilon_p, \pm\sqrt{\epsilon_p(\epsilon_p + 2\mu)}, \quad (4.18)$$

と求まる. 続いて, それぞれの固有値に対する係数を求める.

4.2.1 $\omega = 0$ のとき

$\omega = 0$ のときは式 (4.15) - (4.17) から直ちに

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = -\frac{C}{2} \begin{pmatrix} 1 - \tanh^2(\alpha x) \\ 1 - \tanh^2(\alpha x) \end{pmatrix} + i\frac{B'}{2} \begin{pmatrix} \tanh(\alpha x) \\ -\tanh(\alpha x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dx} \\ \frac{d\xi}{dx} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

と求まる. 2 行目の等号では係数を見やすい形に再定義した. (4.19) は独立な 2 つのモードの線形結合である. これはダークソリトン解が位相変換対称性の自発的破れに加え, 並進対称性も自発的に破っていることを反映している.

4.2.2 $\omega \neq 0$ のとき

まず, (4.15) の第 1 式から第 3 式に ω を乗する

$$(\epsilon_p - \mu)\omega A' + \alpha p E B' = \omega^2 A, \quad (4.20)$$

$$\epsilon_p \omega B' = \omega^2 B, \quad (4.21)$$

$$\mu \omega A' - \alpha p \omega B' = \omega^2 C, \quad (4.22)$$

上式に (4.15) の第 4 項と第 5 項に代入すると

$$\{(\epsilon_p - \mu)^2 - \omega^2\}A + \alpha p(2\epsilon_p - \mu)B - \mu(5\epsilon_p - \mu)C = 0, \quad (4.23)$$

$$(\epsilon_p^2 - \omega^2)B - 2\alpha p\epsilon_p C = 0, \quad (4.24)$$

$$\mu(\epsilon_p - \mu)A + \alpha p(\mu - \epsilon_p)B + (4\mu\epsilon_p - \mu^2 - \omega^2)C = 0, \quad (4.25)$$

となる.

- $\omega = \epsilon_p$ のとき

このとき, (4.23), (4.24), (4.25) より

$$\epsilon_p = 0 \quad (p = 0) \quad \text{or} \quad C = 0, \quad (4.26)$$

となる.

- $p = 0$ のとき

このとき $\omega = 0$ となるためゼロモードとなる.

- $C = 0$ のとき

このとき $A \sim B'$ は全てゼロとなる. すなわち, この解は自明解である.

- $\omega = \pm\sqrt{\epsilon_p(\epsilon_p + 2\mu)}$ のとき

- $p = 0$ のとき

このとき $\omega = 0$ となるためゼロモードとなる.

- $p \neq 0$ のとき

$$A = -\frac{\epsilon_p + \mu}{\mu}C, \quad B = -\frac{p}{\alpha}C, \quad A' = -\frac{\omega}{\mu}C, \quad B' = -\frac{2\omega}{\alpha p}C, \quad (4.27)$$

すなわち,

$$u(x) + v(x) = C \left\{ -\frac{\epsilon_p + \mu}{\mu} - i\frac{p}{\alpha} \tanh(\alpha x) + \tanh^2(\alpha x) \right\}, \quad (4.28)$$

$$u(x) - v(x) = C \left\{ -\frac{\omega}{\mu} - i\frac{2\omega}{\alpha p} \tanh(\alpha x) \right\}, \quad (4.29)$$

となる.

4.2.3 Bogoliubov-de Gennes 解のまとめ

この節をまとめると, 1次元一様系の励起スペクトルは

$$\omega = \pm \sqrt{\epsilon_p(\epsilon_p + 2\mu)}, \quad (4.30)$$

である. このときの BdG 解は

$$u(x) + v(x) = C \left\{ -\frac{\epsilon_p + \mu}{\mu} - i\frac{p}{\alpha} \tanh(\alpha x) + \tanh^2(\alpha x) \right\}, \quad (4.31)$$

$$u(x) - v(x) = C \left\{ -\frac{\omega}{\mu} - i\frac{2\omega}{\alpha p} \tanh(\alpha x) \right\}, \quad (4.32)$$

であり, $p \rightarrow 0$ 極限においてゼロモード

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{y}_{0,\theta} + c_2 \mathbf{y}_{0,x}, \quad (4.33)$$

となる. つまり, ここで求めたゼロモードの具体形は第 3 章で述べた位相と位置のゼロモードの線形結合になっていることがわかる.

4.3 共役モード

この節ではゼロモードに対応する共役モードを求める. ゼロモードが複数存在する場合, 共役モードもそれと同数定義しなくてはならない. 今回の場合は系の対称性が 2 つ破れていることに対応し, 共役モードも 2 つ定義する

$$T\mathbf{y}_{-1,\theta}(x) = I_\theta \mathbf{y}_{0,\theta}(x), \quad (4.34)$$

$$T\mathbf{y}_{-1,x}(x) = I_x \mathbf{y}_{0,x}(x). \quad (4.35)$$

なお, 今後は $\mathbf{y}_{-1,\theta}, \mathbf{y}_{-1,x}$ をそれぞれ位相の共役モード, 並進の共役モードと呼ぶことにする. 位相, 並進の共役モードはゼロモードの対称性からそれぞれ

$$\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_i(\mathbf{x}) \\ h_i^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

型となる. ただし, $i = \theta, x$ である.

4.3.1 位相の共役モード

この小節では位相の共役モードを求める。共役モードはゼロモードと非直交であり、その他のモードと直交するという性質さえ持てば良いため、特解を1つ求めれば十分である。位相の共役モードは(4.34)より、特解

$$h_\theta(x) = \frac{1}{2} (\tanh \alpha x + \alpha x (1 - \tanh^2 \alpha x)), \quad (4.37)$$

$$I_\theta = \alpha^2, \quad (4.38)$$

を持つことがわかる。そこで、今後は位相の共役モードの具体形を上式に選ぶ。

4.3.2 並進の共役モード

この小節では並進の共役モードを求める。位相の共役モードの議論と同じく、特解を1つ求めれば十分であるので(4.35)の特解

$$h_x(x) = -i, \quad (4.39)$$

$$I_x = 1, \quad (4.40)$$

を持つことがわかる。そこで、今後は並進の共役モードの具体形を上式と選ぶ。

5 ゼロモードの摂動展開

この章では対称性を陽に破るような摂動をかけたとき、対応するゼロモードがどのように失われるか調べる。その結果、ゼロモードの退化が解けることにより複素モードが現れる可能性があることを示す。

5.1 GP 方程式の摂動展開

この節ではGP方程式の摂動計算をする。 ε を微小パラメータとする摂動 $\delta V_\varepsilon = \varepsilon \delta V(\mathbf{x})$ をかけたとする。このときGP方程式

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + \varepsilon \delta V(\mathbf{x}) - \mu_\varepsilon + g |\xi_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 \right\} \xi_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.1)$$

が微小パラメータ ε の整数次で展開できたとする

$$\xi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \xi^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (5.2)$$

$$\mu_\varepsilon = \mu^{(0)} + \varepsilon \mu^{(1)} + \dots. \quad (5.3)$$

このとき ε の1次の項が満たすべき方程式は

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu^{(0)} + 2g |\xi^{(0)}(\mathbf{x})|^2 \right\} \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + g \xi^{(0)2}(\mathbf{x}) \xi^{(1)*}(\mathbf{x}) = (\mu^{(1)} - \delta V(\mathbf{x})) \xi^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

となる。

(5.4) は非線形方程式なのでその特解は無数に存在する. しかし, 少なくとも粒子数を保存する特解

$$\begin{aligned} N &= \int d\mathbf{x} |\xi_\varepsilon|^2 \\ &= \int d\mathbf{x} \left\{ |\xi^{(0)}|^2 + \varepsilon(\xi^{(0)*}\xi^{(1)} + \xi^{(0)}\xi^{(1)*}) \right\} + O(\varepsilon^2) \\ &= N + 2\varepsilon \operatorname{Re} \int d\mathbf{x} \xi^{(0)}\xi^{(1)*} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

すなわち,

$$\operatorname{Re} \int d\mathbf{x} \xi^{(0)}\xi^{(1)*} = 0, \quad (5.6)$$

を満たす特解が採用されるべきであることに注意する.

5.2 Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動展開

BdG 方程式の励起モードは GP 方程式と同様に摂動展開することができる [29]. しかし, ゼロモードの摂動展開については行われてはいない. ゼロモードには赤外発散由来の特異性が存在するので, GP 方程式と同様の展開をすることができないためである. その理由は以下の議論から理解できる. まず, ゼロモードはその対称性を陽に破る摂動の下, 有限固有値を持つモードに変化する. このとき, BdG 行列の対称性から異符号を持つモードが現れる. つまり, ゼロモードから 2 本の励起モードに変化する. ゼロモードと対となるのは共役モードである. したがって, 2 本の励起モードは摂動の 0 次において BdG 固有モードであるゼロモードと BdG 非固有モードである共役モードとなるべきものである. これは, 摂動をかける前後でモードの従う方程式が異なることを意味する. 以上がゼロモードに対して単純な摂動展開が不可能であることの理由である. そこでこの節では励起モードとは異なる手法を用いた, BdG ゼロモードの摂動展開について議論する.

5.2.1 励起モードに対する Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動論

この小節では励起モードの BdG 方程式の摂動展開を [29] に基づき行う. 摂動 $\delta V_\varepsilon = \varepsilon \delta V(\mathbf{x})$ が加わるとき BdG 方程式

$$T_\varepsilon \mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \omega_n^\varepsilon \mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (5.7)$$

が次のように展開できたとする

$$T_\varepsilon = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_n^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots. \quad (5.8)$$

このとき BdG 方程式の 1 次が満たす方程式は,

$$(T^{(0)} - \omega_n^{(0)}) \mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x}) + (T^{(1)} - \omega_n^{(1)}) \mathbf{y}_n^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.9)$$

となる. ここで, $T^{(0)}, T^{(1)}$ は

$$\mathcal{L}_\varepsilon = -\frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu_\varepsilon + 2g|\xi_\varepsilon(\mathbf{x})|^2, \quad \mathcal{M} = g\xi_\varepsilon(\mathbf{x})^2, \quad (5.10)$$

より

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \mu^{(0)} + 2g|\xi^{(0)}(\mathbf{x})|^2, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\mu^{(1)} + V(\mathbf{x}) + 2g(\xi^{(0)}(\mathbf{x})\xi^{(1)*}(\mathbf{x}) + \xi^{(0)*}(\mathbf{x})\xi^{(1)}(\mathbf{x})), \quad (5.12)$$

$$\mathcal{M}^{(0)} = g\xi^{(0)2}(\mathbf{x}), \quad (5.13)$$

$$\mathcal{M}^{(1)} = 2g\xi^{(0)}(\mathbf{x})\xi^{(1)}(\mathbf{x}), \quad (5.14)$$

として

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(0)} & \mathcal{M}^{(0)} \\ -\mathcal{M}^{(0)*} & -\mathcal{L}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad T^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(1)} & \mathcal{M}^{(1)} \\ -\mathcal{M}^{(1)*} & -\mathcal{L}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

である.

5.2.2 ゼロモードに対する Bogoliubov-de Gennes 方程式の摂動論

ゼロモードに対する BdG 方程式は

$$T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \delta\omega_0^\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (5.16)$$

である. この式において $\varepsilon \rightarrow 0$ で $\delta\omega_0^\varepsilon \rightarrow 0$ となるようなモードを探す. まず, BdG 行列 T_ε は前小節とより ε の整数次で展開可能である. 次に, 縮退のある場合の摂動論に倣いモードを

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (5.17)$$

とし, $\delta \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x})$ を 0 次の BdG 完全系で展開する:

$$\delta \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_i \{C_i^\varepsilon \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) + D_i^\varepsilon \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\} + \sum_{n=1} \{A_n^\varepsilon \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + B_n^\varepsilon \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\}. \quad (5.18)$$

したがって, $\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_i \{(\alpha_i + C_i^\varepsilon) \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) + D_i^\varepsilon \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\} + \sum_{n=1} \{A_n^\varepsilon \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + B_n^\varepsilon \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\}, \quad (5.19)$$

となる. これを ε 依存 BdG 方程式に代入し, $\{\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n\}$ で射影すると,

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon D_i^\varepsilon, \quad (5.20)$$

$$I_i D_i^\varepsilon + (\mathbf{y}_{-1,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon (\alpha_i + C_i^\varepsilon), \quad (5.21)$$

$$\omega_n A_n^\varepsilon + (\mathbf{y}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon A_n^\varepsilon, \quad (5.22)$$

$$-\omega_n B_n^\varepsilon + (\mathbf{z}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon B_n^\varepsilon, \quad (5.23)$$

となる. ただし, $\delta T_\varepsilon = T_\varepsilon - T^{(0)}$ である.

(5.22), (5.23) より,

$$A_n^\varepsilon = \frac{(\mathbf{y}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon - \omega_n}, \quad B_n^\varepsilon = \frac{(\mathbf{z}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon + \omega_n}, \quad (5.24)$$

これは $\alpha_i + C_i^\varepsilon, D_i^\varepsilon$ に対し無視できるオーダーである. そこで, $Y_{n,m}^{(ij)} = (\mathbf{y}_{n,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_{m,j})$ とすると

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \sum_j \left\{ (\alpha_j + C_j^\varepsilon) Y_{0,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{0,-1}^{(ji)} \right\} + O(\varepsilon), \quad (5.25)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \sum_j \left\{ (\alpha_j + C_j^\varepsilon) Y_{-1,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{-1,-1}^{(ji)} \right\} + O(\varepsilon), \quad (5.26)$$

となる. そこで, これらのリーディング項が満たす固有関数の係数 $\alpha_i + C_i^\varepsilon, D_i^\varepsilon$ を決定する永年方程式は

$$\sum_j \left\{ (\alpha_j + C_j^\varepsilon) Y_{0,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{0,-1}^{(ji)} \right\} = \delta \omega_0^\varepsilon D_i^\varepsilon, \quad (5.27)$$

$$\sum_j \left\{ (\alpha_j + C_j^\varepsilon) Y_{-1,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon (I_j \delta_{ji} + Y_{-1,-1}^{(ji)}) \right\} = \delta \omega_0^\varepsilon (\alpha_i + C_i^\varepsilon), \quad (5.28)$$

となる.

5.3 ゼロモードの対称性と Y の対称性

この節ではゼロモードや BdG 行列の対称性から $Y_{n,m}^{(ij)}$ の性質を導出する. BdG 行列の対称性は (3.11), (3.12) より

$$\sigma_1 \delta T_\varepsilon \sigma_1 = -\delta T_\varepsilon^*, \quad (5.29)$$

$$\sigma_3 \delta T_\varepsilon \sigma_3 = \delta T_\varepsilon^\dagger, \quad (5.30)$$

である. これらの対称性より $Y_{n,m}^{(ij)}$ にも対称性が存在し

$$\begin{aligned} Y_{0,0}^{(ij)} &= (\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_{0,j}) \\ &= (\mathbf{y}_{0,i}, -\sigma_1 \delta T_\varepsilon^* \sigma_1 \mathbf{y}_{0,j}) \\ &= (\sigma_1 \mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon^* \sigma_1 \mathbf{y}_{0,j}) \\ &= (\mathbf{y}_{0,i}^*, \delta T_\varepsilon^* \mathbf{y}_{0,j}^*) \\ &= Y_{0,0}^{(ij)*} \\ &= Y_{0,0}^{(ji)}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

である. 同様に,

$$Y_{-1,0}^{(ij)} = -Y_{-1,0}^{(ij)*} = -Y_{0,-1}^{(ji)}, \quad (5.32)$$

$$Y_{-1,-1}^{(ij)} = Y_{-1,-1}^{(ij)*} = Y_{-1,-1}^{(ji)}, \quad (5.33)$$

となる. すなわち, $Y_{0,0}^{(ij)}, Y_{-1,-1}^{(ij)}$ は実数, $Y_{-1,0}^{(ij)}$ は純虚数であることがわかる.

ここで, GP 方程式が整数次で摂動展開可能な場合, 摂動の 1 次で $Y_{0,0}^{(\theta i)}$ がどのように記述されるか見ていく. 摂動の 1 次における GP 方程式は

$$\mathcal{L}^{(0)} \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathcal{M}^{(0)} \xi^{(1)*}(\mathbf{x}) = (\mu^{(1)} - V(\mathbf{x})) \xi^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (5.34)$$

BdG 行列は

$$T^{(1)} = (-\mu^{(0)} + \delta V) \sigma_3 + 2g \begin{pmatrix} \xi^{(0)*} \xi^{(1)} + \xi^{(0)} \xi^{(1)*} & \xi^{(0)} \xi^{(1)} \\ -\xi^{(0)*} \xi^{(1)*} & -(\xi^{(0)*} \xi^{(1)} + \xi^{(0)} \xi^{(1)*}) \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

である.

これを用いると $Y_{0,0}^{(\theta i)}$ は

$$\begin{aligned}
Y_{0,0}^{(\theta i)} &= \varepsilon \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \xi^{(0)} & -\xi^{(0)*} \\ f_i & -f_i^* \end{pmatrix} \sigma_3 T^{(1)} \begin{pmatrix} f_i \\ -f_i^* \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon \int d\mathbf{x} \left[(-\mu^{(0)} + \delta V)(\xi^{(0)*} f_i + \xi^{(0)} f_i^*) + 2g(\xi^{(0)*2} \xi^{(1)} f_i + \xi^{(0)2} \xi^{(1)*} f_i^*) \right] \\
&= \varepsilon \int d\mathbf{x} \left[f_i(-\mu^{(0)} + \delta V + 2g\xi^{(0)*} \xi^{(1)}) \xi^{(0)*} + f_i^*(-\mu^{(0)} + \delta V + 2g\xi^{(0)} \xi^{(1)*}) \xi^{(0)} \right] \\
&= \varepsilon \int d\mathbf{x} \left[f_i(-\mathcal{L}^{(0)} \xi^{(1)*} - \mathcal{M}^{(0)*} \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{M}^{(0)*} \xi^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. + f_i^*(-\mathcal{L}^{(0)} \xi^{(1)} - \mathcal{M}^{(0)} \xi^{(1)*}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{M}^{(0)} \xi^{(1)*}) \right] \\
&= -\varepsilon \int d\mathbf{x} \left[\left\{ f_i \mathcal{L}^{(0)} - f_i^* \mathcal{M}^{(0)} \right\} \xi^{(1)*} + \left\{ f_i^* \mathcal{L}^{(0)} - f_i \mathcal{M}^{(0)*} \right\} \xi^{(1)} \right] \\
&= \varepsilon \cdot (\text{表面項}) - \varepsilon \int d\mathbf{x} \left[\xi^{(1)*} \left\{ \mathcal{L}^{(0)} f_i - \mathcal{M}^{(0)} f_i^* \right\} + \xi^{(1)} \left\{ \mathcal{L}^{(0)} f_i^* - \mathcal{M}^{(0)*} f_i \right\} \right] \\
&= \varepsilon \cdot (\text{表面項}), \tag{5.36}
\end{aligned}$$

となる. すなわち, $Y_{0,0}^{(\theta i)}$ の値は表面項にのみ依存する. 有限系では遠方での値は 0 であるので, 有限系の $Y_{0,0}^{(\theta i)}$ は常に 0 としてよい. 無限系では積分の表面項が落ちる状況では $Y_{0,0}^{(\theta i)}$ は 0 である.

5.4 固有値

ここで, 位相変換対称性に加えもう 1 つの対称性が自発的に破れた系を考える. このような状況において永年方程式 (5.27), (5.28) は

$$\begin{pmatrix} Y_{-1,0}^{(\theta\theta)} - \delta\omega_0^\varepsilon & I_\theta + Y_{-1,-1}^{(\theta\theta)} & Y_{-1,0}^{(\theta i)} & Y_{-1,-1}^{(\theta i)} \\ Y_{0,0}^{(\theta\theta)} & Y_{0,-1}^{(\theta\theta)} - \delta\omega_0^\varepsilon & Y_{0,0}^{(\theta i)} & Y_{0,-1}^{(\theta i)} \\ Y_{-1,0}^{(i\theta)} & Y_{-1,-1}^{(i\theta)} & Y_{-1,0}^{(ii)} - \delta\omega_0^\varepsilon & I_i + Y_{-1,-1}^{(ii)} \\ Y_{0,0}^{(i\theta)} & Y_{0,-1}^{(i\theta)} & Y_{0,0}^{(ii)} & Y_{0,-1}^{(ii)} - \delta\omega_0^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\theta + C_\theta \\ D_\theta \\ \alpha_i + C_i \\ D_i \end{pmatrix} = 0, \tag{5.37}$$

である. この永年方程式を解くと固有値 $\delta\omega_0^\varepsilon$ は

$$\delta\omega_0^\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{I_\theta Y_{0,0}^{(\theta\theta)} + I_i Y_{0,0}^{(ii)} \pm \sqrt{(I_\theta Y_{0,0}^{(\theta\theta)} + I_i Y_{0,0}^{(ii)})^2 - 4I_\theta I_i (Y_{0,0}^{(\theta\theta)} Y_{0,0}^{(ii)} - Y_{0,0}^{(\theta i)} Y_{0,0}^{(i\theta)})}}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right), \tag{5.38}$$

となる. ただし, 式変形の途中で Y の対称性を用いた.

この結果はゼロモードに対称性を陽に破る摂動を加えた場合, 陽に破られた対称性に対応するゼロモードは“2本の実モード”もしくは“2本の純虚数モード”に推移することを意味している. 特に, ゼロモードから複素モードである“2本の純虚数モード”が現れる可能性の示唆は重要である. この機構は, 従来の複素固有値出現の機構である BdG 方程式の正ノルムのモードと負ノルムのモードの縮退 [29] を必要としない. つまり, 新たな複素固有値出現の機構をゼロモードが与えているのである. この純虚数という制限はモードの保存からの帰結である. ゼロモード部分の退化に関係したモードはゼロモードと共役モードの 2 つであるため, 複素モードは 2 つのペアでのみ存在する純虚数モードとなったのである.

また、固有モードは

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\delta\omega_0^\varepsilon}{Y_{0,0}^{(xx)}}} \mathbf{y}_{0,x}(x) + \sqrt{\frac{Y_{0,0}^{(xx)}}{\delta\omega_0^\varepsilon}} \mathbf{y}_{-1,x}(x) \right\}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{z}_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sqrt{\frac{\delta\omega_0^\varepsilon}{Y_{0,0}^{(xx)}}} \mathbf{y}_{0,x}(x) + \sqrt{\frac{Y_{0,0}^{(xx)}}{\delta\omega_0^\varepsilon}} \mathbf{y}_{-1,x}(x) \right\}, \quad (5.40)$$

であり、ゼロモードの係数は $O(\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$ である。したがって、その概形はゼロモードに近い形である。

6 1次元ソリトン系に対する摂動計算

この節では前章での議論を1次元一様なソリトン系に適用し、その並進のゼロモードがどのように推移するか見ていく。

6.1 モデル 1

ここは摂動ポテンシャルとして、ソリトン中心にかかるデルタ関数型のポテンシャルを採用する。このポテンシャルは明らかに系の並進対称性を陽に破る。

このとき GP 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon \delta(x) - \mu_\varepsilon + g |\xi_\varepsilon(x)|^2 \right) \xi_\varepsilon(x) = 0, \quad (6.1)$$

であり、その解は0次と変わらない

$$\xi_\varepsilon(x) = \sqrt{n_c} \tanh(\alpha x), \quad (6.2)$$

$$\mu_\varepsilon = gn_c = \frac{\alpha^2}{m}. \quad (6.3)$$

永年方程式 (5.37) を解くと、固有値は

$$\delta\omega_0^\varepsilon = 0, \pm \sqrt{I_x Y_{0,0}^{(xx)}}, \quad (6.4)$$

となる。今、 $I_x, Y_{0,0}^{(xx)}$ は共に正なので、固有値 $\pm \sqrt{I_x Y_{0,0}^{(xx)}}$ は実数である。すなわち、位置のゼロモードは実モード2つになる。

また、固有ベクトルは

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\delta\omega_0^\varepsilon}{Y_{0,0}^{(xx)}}} \mathbf{y}_{0,x}(x) + \sqrt{\frac{Y_{0,0}^{(xx)}}{\delta\omega_0^\varepsilon}} \mathbf{y}_{-1,x}(x) \right\}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{z}_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sqrt{\frac{\delta\omega_0^\varepsilon}{Y_{0,0}^{(xx)}}} \mathbf{y}_{0,x}(x) + \sqrt{\frac{Y_{0,0}^{(xx)}}{\delta\omega_0^\varepsilon}} \mathbf{y}_{-1,x}(x) \right\}, \quad (6.6)$$

となる。ここで $\delta\omega_0^\varepsilon$ は $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ であり、 $Y_{0,0}^{(xx)}$ は $O(\varepsilon^1)$ であることに注意する。つまり、0次において位置のゼロモードであったモードは、ゼロモードに共役モードを微小に足したような形の実モードとなる。

6.2 モデル 2

この節では k をパラメータとして、摂動ポテンシャルを

$$\delta V(x) = gn_c \frac{\sin(\alpha kx)}{\tanh(\alpha x)} \left(-3 \tanh^2(\alpha x) + 1 - \frac{k^2}{2} \right), \quad (6.7)$$

とする. このポテンシャルの概形は Fig. 4.1 に示す.

このとき, 1 次の GP 方程式 (5.4) は

$$\xi^{(1)}(x) = \sqrt{n_c} \sin(\alpha kx), \quad (6.8)$$

$$\mu^{(1)} = 0, \quad (6.9)$$

となる.

$Y_{0,0}^{(\theta\theta)}, Y_{0,0}^{(\theta x)}, Y_{0,0}^{(xx)}$ はそれぞれ

$$Y_{0,0}^{(\theta\theta)} = 0, \quad (6.10)$$

$$Y_{0,0}^{(xx)} = \varepsilon \cdot 2gn_c \int dx (1 - \tanh^2(\alpha x))^2 \frac{\sin(\alpha kx)}{\tanh(\alpha x)} \left\{ 3 \tanh^2(\alpha x) + 1 - \frac{k^2}{2} \right\}, \quad (6.11)$$

$$Y_{0,0}^{(\theta x)} = 0, \quad (6.12)$$

となる. ただし, 振動解より遠方の値は無視した. これは部分積分時の収束因子により正当化される.

ここで, (6.11) を数値積分すると, $Y_{0,0}^{(xx)}$ はある値 $k = k_c (= 1.73 \dots)$ より大きくなると負になることがわかる. すなわち, I_x が正であることから, その積は $k > k_c$ において負となり, 固有値は純虚数となる. この理由は Fig. 6.1 から理解できる. ソリトンはポテンシャルの大きいところに移動しやすい性質

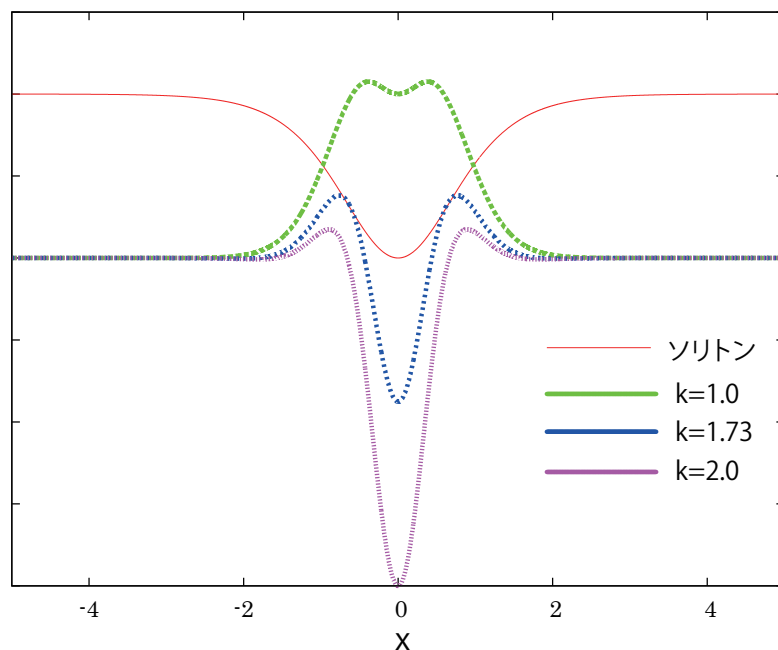


Fig. 6.1 摂動ポテンシャル

を持つ。つまり、 k が大きくなるということは、ソリトン中心近くにポテンシャルの低い領域が現れ、周りとのポテンシャルのギャップが大きくなる。その結果、ソリトン中心が左右に移動しやすくなり、複素固有値が出現するのである。

このように、対称性を自明に破る摂動をかけると対応するゼロモードが純虚数の複素固有値になることがある。つまり、ゼロモードの存在によるモードの退化を起源とする機構により複素固有値が現れることがある。

この際、複素固有値が純虚数になるという制限はモードの数の保存によるものである。複素モードは通常 $\omega_\mu, \omega_\mu^*, -\omega_\mu^*, -\omega_\mu$ に属する固有関数 $\{\mathbf{y}_\mu, \mathbf{y}_{*\mu}, \mathbf{z}_\mu, \mathbf{z}_{*\mu}\}$ の4つ組で現れる。しかし、複素モードの出現に関わるモードは $\{\mathbf{y}_{0,x}, \mathbf{y}_{-1,x}\}$ の2つである。複素モードが2つ組となるのは固有値が純虚数、すなわち $\omega_\mu = -\omega_\mu^*, \omega_\mu^* = -\omega_\mu$ となる場合である。このため、摂動によりゼロモード1つが複素モードになる場合は必ず複素固有値が純虚数となるのである。また、このときの崩壊を司るモードは位置のゼロモード型であるため、ソリトン周りに局在したモードである。これはすなわち、並進のゼロモードを起源とする不安定性はソリトン中心を移動させるような崩壊を引き起こすことを示している。

7 まとめ

本論文ではゼロモードの役割を理解するという方針の下、対称性を陽に破るような摂動を加えたときの対応するゼロモード振る舞いについて議論した。以下では本研究の成果と今後の課題を述べる。

第2章では中性原子気体を記述する作用を与え、BECが大域的位相変換対称性の自発的破れであるという立場で中性原子 BEC 系のハミルトニアンを導出した。また、凝縮体の時間発展を記述する TDGP 方程式、定常状態の凝縮体を記述する GP 方程式、凝縮体の安定性を解析する BdG 方程式を導出した。

第3章では BdG 方程式の解の性質を整理し、非摂動ハミルトニアンの対角化法の1つである BdG の方法についてまとめた。本研究で扱ったゼロモードとは BdG 方程式に現れるゼロ固有値に属する固有モードである。このゼロモードは赤外発散由来の特異な性質を持つ。BdG 方程式の固有関数系で完全系を成すためには共役モードの導入が不可欠であることはこのゼロモードが特異であることに起因する。この共役モードの存在により、BdG の方法では量子座標が現れる。すなわち、量子座標の出現はゼロモードの特異性の反映である。

第4章では後の章での準備として、1次元一様系の GP 方程式を解き、特解としてダークソリトン解を導出した。その後、BdG 方程式を解き、ダークソリトンが存在する場合のゼロモードと励起モードの具体形を導出した。また、共役モードの決定方程式を解き、位相と並進のゼロモードに対応する共役モードを求めた。

第5章ではゼロモードに対する BdG 方程式の摂動論を定式化した。BdG 方程式のゼロモード部分に対してはゼロモードの特異性から通常の摂動展開が不可能である。これはゼロモードと共役モードは必ず対として存在するため、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限でゼロモードとなるモードには共役モードが伴わなければならないことから理解できる。そこでゼロモードの変位を0次の BdG 完全系で展開し、その各係数に対する永年方程式を解くという手法を採った。この方法により固有値を求めた。この結果、ゼロモードは対称性を陽に破る摂動の下、“実モード2本”または“純虚数モード2本”に変化することを解析的に示した。

第6章ではソリトンの存在する冷却原子気体 BEC 系を対象に、系の並進対称性を陽に破るモデルを2つ考え、それらを厳密に解いた。その結果、実際にゼロモードと共役モードが“実モード2本”や“純

虚数モード2本”に変化しうることを示した。

本研究ではゼロモードの摂動論を一般的に定式化した後、簡単のため1次元の1成分BECソリトン系におけるモデル計算から、ゼロモードと共役モードが純虚数固有値を持つモードとなりうることを確認した.. しかし、本研究で行った定式化は次元、成分、破れた対称性の種類に依らない。そのため、2次元以上の系、多成分系、並進以外の対称性の破れた系についても同様の機構による複素固有値が出現する可能性が存在する。

また、本研究の結果はソリトン周りに局在する不安定モードの起源としてゼロモードが役割をもつことを示唆している。系が並進対称性を持たないトラップ系の場合、今回の議論は適応することはできない。しかし、トラップ中のソリトン系に現にもソリトン周りに局在する不安定モードが現れる。そこで今後はトラップ中のソリトンと今回の解析との間の関係、特に2次元以上のソリトン系に現れる snake instability [10, 11] との関係調べたい。

付録 A 複数ゼロモードが存在する場合のゼロモードと共役モードの直交化について

この付録ではゼロモードが複数存在する場合のゼロモードの直交化について議論する。まず

$$T\tilde{\mathbf{y}}_{0,i} = 0, \quad (\text{A.1})$$

となるモードを独立な数だけ全て求め (選び方に任意性がある), それぞれの共役モードの特解を 1 つ用意する。このように選んできたゼロモード間は Gram-Schmidt の直交化法を用いれば常に直交させることができる (以下ではゼロモード間はずでに直交化が済んでいるものとする)。しかし, それ以外のモード ($\tilde{\mathbf{y}}_{0,i}$ と $\tilde{\mathbf{y}}_{-1,j}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{-1,i}$ と $\tilde{\mathbf{y}}_{0,j}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{-1,i}$ と $\tilde{\mathbf{y}}_{-1,j}$) は一般に非直交である。

そこで, これらを Gram-Schmidt の直交化法を応用し, 直交化していく。その内 1 つ (添字 i) を基準に取り

$$\mathbf{y}_{0,i} = \tilde{\mathbf{y}}_{0,i}, \quad \mathbf{y}_{-1,i} = \tilde{\mathbf{y}}_{-1,i}, \quad (\text{A.2})$$

と選ぶ。添字 j のゼロモードは次のように

$$\mathbf{y}_{0,j} = \tilde{\mathbf{y}}_{0,j} - (\mathbf{y}_{-1,i}, \tilde{\mathbf{y}}_{0,j})\mathbf{y}_{-1,i}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{y}_{-1,j} = \tilde{\mathbf{y}}_{-1,j} - (\mathbf{y}_{0,i}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,j})\mathbf{y}_{0,i} - (\mathbf{y}_{-1,i}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,j})\mathbf{y}_{-1,i}, \quad (\text{A.4})$$

とする。このようにゼロモードを順番に取り直していけばすべてのゼロモードと共役モードは直交化される。

付録 B 流れがある場合の 1 次元一様系ダークソリトンにおける BdG ゼロモード

この付録では 1 次元一様系において凝縮体に流れがある場合のダークソリトン解を導出し, BdG 方程式を解きゼロモードを出す. 流れがある場合の 2 つあるゼロモードと共役モードは一般に直交関係を満足しない. そこで, この付録では付録 A の手法を用いてゼロモードと共役モードの直交化する.

B.1 1 次元一様系ダークソリトン (流れあり)

GP 方程式 (4.1) において空間反対称性 $\xi(x) = -\xi^*(-x)$ を持つ解を探すと

$$\xi(\chi) = \sqrt{n_c} \left[\sqrt{1 - \kappa^2} \tanh \sqrt{1 - \kappa^2} \chi - i\kappa \right] e^{i\kappa\chi}, \quad \mu = gn_c \left(1 + \frac{\kappa^2}{2} \right), \quad (\text{B.1})$$

が求まる. ただし,

$$\kappa = \frac{k}{\sqrt{gn_c}}, \quad \chi = \sqrt{gn_c} x, \quad (\text{B.2})$$

とした. さらに BdG 方程式を解く. 各ゼロモード, 共役モードは

$$\tilde{\mathbf{y}}_{0,\theta}(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ -\xi^*(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{0,x}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_x(x) \\ -\tilde{f}_x^*(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{-1,\theta}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_\theta(x) \\ \tilde{h}_\theta^*(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_x(x) \\ \tilde{h}_x^*(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

ただし,

$$\tilde{f}_x(x) = i \left(\kappa^2 + i\kappa \sqrt{1 - \kappa^2} + (1 - \kappa^2)(1 - \tanh^2 \sqrt{1 - \kappa^2} \chi) \right) e^{i\kappa\chi}, \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{h}_\theta(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tanh \sqrt{1 - \kappa^2} \chi}{\sqrt{1 - \kappa^2}} + \chi(1 - \tanh^2 \sqrt{1 - \kappa^2} \chi) \right) e^{i\kappa\chi}, \quad (\text{B.6})$$

$$\tilde{h}_x(x) = i \left(-1 + i\frac{3}{2}\kappa \left\{ \frac{\tanh \sqrt{1 - \kappa^2} \chi}{\sqrt{1 - \kappa^2}} + \chi(1 - \tanh^2 \sqrt{1 - \kappa^2} \chi) \right\} \right) e^{i\kappa\chi}, \quad (\text{B.7})$$

と求まる.

このとき, ゼロモードと共役モードの内積をそれぞれ計算すると

$$(\tilde{\mathbf{y}}_{0,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x}) = -\kappa, \quad (\tilde{\mathbf{y}}_{-1,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{0,x}) = -\kappa, \quad (\tilde{\mathbf{y}}_{-1,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x}) = 0, \quad (\text{B.8})$$

となり全ての直交条件を満たさない. そこで, 付録 A に従いこれらのモードを直交化していく.

まず, 位相のゼロモードは

$$\mathbf{y}_{0,\theta} = \tilde{\mathbf{y}}_{0,\theta}, \quad \mathbf{y}_{-1,\theta} = \tilde{\mathbf{y}}_{-1,\theta}, \quad (\text{B.9})$$

と選ぶ.

位置のゼロモードは

$$\mathbf{y}_{0,x} = \tilde{\mathbf{y}}_{0,x} - (\mathbf{y}_{-1,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{0,x}) \mathbf{y}_{0,\theta}, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{y}_{-1,x} = \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x} - (\mathbf{y}_{0,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x}) \mathbf{y}_{-1,\theta} - (\mathbf{y}_{-1,\theta}, \tilde{\mathbf{y}}_{-1,x}) \mathbf{y}_{0,\theta}, \quad (\text{B.11})$$

とする. これを計算すると

$$\mathbf{y}_{0,x}(x) = \begin{pmatrix} f_x(x) \\ -f_x^*(x) \end{pmatrix}, \mathbf{y}_{-1,x}(x) = \begin{pmatrix} h_x(x) \\ h_x^*(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$f_x(x) = i(1 - \kappa^2)(1 - \tanh^2 \sqrt{1 - \kappa^2} \chi) e^{i\kappa x}, \quad (\text{B.13})$$

$$h_x(x) = i \left(-1 + i\kappa \left\{ \frac{\tanh \sqrt{1 - \kappa^2} \chi}{\sqrt{1 - \kappa^2}} + \chi(1 - \tanh^2 \sqrt{1 - \kappa^2} \chi) \right\} \right) e^{i\kappa x}, \quad (\text{B.14})$$

共役モードの決定方程式

$$T\mathbf{y}_{-1,\theta}(x) = gn_c \mathbf{y}_{0,\theta}(x), \quad (\text{B.15})$$

$$T\mathbf{y}_{-1,x}(x) = \frac{(gn_c)^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \mathbf{y}_{0,x}(x), \quad (\text{B.16})$$

となる.

(B.13) のように位置のゼロモードを取ることは (B.5) では空間並進を行うことにより生じてしまう位相回転を予め引いておくことに対応する. 実際

$$f_x(x) \propto \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik \right) \xi(x), \quad (\text{B.17})$$

となっている.

謝辞

本研究を進める上で、テーマを与えてくださり、熱心にご指導いただいた山中由也教授に感謝いたします。助教の中村祐介氏は日頃のゼミを監督し、日々湧き上がる疑問に丁寧に答えてくださいました。本論文は中村助教がいなければ完成に至りませんでした。助手の井上智喜氏とは日々様々な議論を行いました。その積み重ねがこの修士論文に活かされております。D1の桑原幸朗氏とはゼミを通して実りある議論をしていただきました。同級生の朝比奈毅典君、清田俊輔君、小嶋祐介君とは絶えず研究等相談していました。ここでの議論が私の知識の向上に繋がっております。M1の大坪君、片山君とはゼミを共に行いました。そこで読んだ教科書の内容が本論文に影響を与えております。また、B4の皆様からでる素朴な鋭い質問を通し、私も多くの刺激を受けました。この2年間お世話になった方々にこの場を借りて深くお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 261 (1924); Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 3 (1925).
- [2] F. London, Nature (London) **141**, 643 (1938).
- [3] J. L. Lin and J. P. Wolfe, Phys. Rev. Lett. **71**, 1222 (1993).
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [5] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [6] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [7] F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [8] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958).
- [9] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **19**, 287 (1962).
- [10] S. Burger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [11] A. E. Muryshev, H. B. van Linden, van den Heuvel, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **60**, R2665 (1999).
- [12] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, Science **296**, 1290 (2002).
- [13] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, Nature **417**, 150 (2002).
- [14] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [15] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [16] E. Hodby, G. Hechenblaikner, S. A. Hopkins, O. M. Margao, and C. J. Foot, Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2002).
- [17] P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels, and E. A. Coenell, Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001).
- [18] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, Nature (London) **415**, 39 (2002).
- [19] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **76**, 4511 (1996).
- [20] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).
- [21] A. Röhrl, M. Naraschewski, A. Schenzle, and H. Wallis, Phys. Rev. Lett. **78**, 4143 (1997).
- [22] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 1543 (1998).
- [23] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [24] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [25] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

- [26] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961); *J. Math. Phys.* **4**, 195 (1963). L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. [Soc. Phys. JETP]* **40**, 546 (1961); *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [27] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947).
- [28] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).
- [29] Y. Nakamura, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **77**, 043601 (2008).
- [30] M. Okumura and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **68**, 013609 (2003).
- [31] M. Mine, T. Koide, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **115**, 683 (2006).
- [32] K. Kobayashi, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys.* **323**, 1247 (2008).
- [33] M. Lewenstein and L. You, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
- [34] H. Matsumoto and S. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 679 (2002).
- [35] L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, (Oxford University Press, New York, 2003).