湖海の棚振動存立條件と Merian 週期の補正 (第2報)

理學博士　野　滿　隆　治
理學士　岡　本　元　治　郎

緒　　言

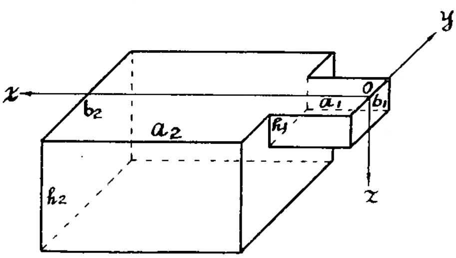
前論文に於て著者の一人野滿[1]は，湖海の棚が深さ及び長さに於て主體の夫等に比し左程著しい懸隔のない場合には其の振動週期はMerian公式に多少の補正を要することを論じ，我が國大平洋側海棚並に琵琶湖の今津及び大溝附近の湖棚につき實測と照合して滿足なる結果を得た。

今回は大湖海の一側に淺く狹い小湖海が附屬して一面には棚であると同時に他面には灣でもある場合を考へ，其處での振動週期を求め，夫れに依つて大小湖海の深さの比と幅の比及び長さの比が種々の値をとる場合に Merian 公式に何程の補正をなすべきかを論ずる。

1. 週期方程式

簡單のために小湖海及び大湖海は共に第1圖の如く直六面體をなし，其等の深さ，幅，及び長さを夫々 h_1, b_1, a_1, 及び h_2, b_2, a_2 とする。座標軸を圖の如くとり，x 方向の縱振動を考へ，之に直角な y 方向には一様であると假定する。

第1圖　棚であり灣である小湖海の模型



附屬小湖海及び主體に於ける水面の昇降を夫々 ζ_1 及び ζ_2 で表はし，靜振の週期を T とすれば次の關係が成立する。卽ち小湖海では

(1)　野滿隆治：湖海の棚振動存立條件と Merian 週期の補正，本誌第4卷(昭和十五年)第1號，38頁。

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2}+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{gh_1}\zeta_1=0 \qquad 0\leqq x\leqq a_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1_1)$$

又主體では

$$\frac{d^2\zeta_2}{dx^2}+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{gh_2}\zeta_2=0 \qquad a_1\leqq x\leqq a_1+a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1_2)$$

今玆に

$$\frac{4\pi^2}{T^2gh_1}\equiv\alpha^2, \qquad \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}\equiv p \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

とすれば，式(1_1)及び(1_2)の解は次の如く與へられる。

$$\zeta_1=\Sigma(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x), \qquad 0\leqq x\leqq a_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3_1)$$

$$\zeta_2=\Sigma(C\cos p\alpha x+D\sin p\alpha x), \quad a_1\leqq x\leqq a_1+a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3_2)$$

境界條件としては，(1)長さの方向の兩端での岸に於ては速度が零であること，(2)小湖海と主體との境界 $x=a_1$ に於ては振動が連續であることは勿論，更に Proudman(2) に從つて (3) 兩水體の境界に於ける流量の連續を採用する。然るときは

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dx}\right|_{x=0}=0, \qquad \left|\frac{d\zeta_2}{dx}\right|_{x=a_1+a_2}=0, \cdots\cdots\cdots\cdots (4_1)$$

$$\left|\zeta_1\right|_{x=a_1}=\left|\zeta_2\right|_{x=a_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (4_2)$$

$$b_1h_1\left|\frac{d\zeta_1}{dx}\right|_{x=a_1}=b_2h_2\left|\frac{d\zeta_2}{dx}\right|_{x=a_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (4_3)$$

なる條件が滿足されねばならぬ。

故に式(4_1)から

$$B=0, \qquad \frac{D}{C}=\tan p\alpha(a_1+a_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (5_1)$$

又式(4_2)から

$$A\cos\alpha a_1=C\cos p\alpha a_1+D\sin p\alpha a_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (5_2)$$

更に式(4_3)から

$$-b_1h_1\alpha A\sin\alpha a_1=b_2h_2p\alpha\left[-C\sin p\alpha a_1+D\cos p\alpha a_1\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (5_3)$$

が得られる。上の諸式から A, C, D 等を追出せば次の關係式が出る。

$$b_1h_1\tan\alpha a_1+b_2h_2p\tan p\alpha a_2=0$$

依つて $\dfrac{a_2}{a_1}\equiv q$, $\dfrac{b_1}{b_2}\equiv r$ と置けば週期方程式は次の如くなる。

(2) Proudman; The Effects on the Sea of Changes in Atmospheric Pressure; M. N. R. A. S., Geophysical Supplement, 2 (1929), 205.

$$pr\tan\alpha a_1+\tan pq\alpha a_1=0 \cdots\cdots(7)$$

2. 週期方程式の根

方程式(7)

$$pr\tan\theta+\tan pq\theta=0,\ \text{但し}\ \theta\equiv\alpha a_1=\frac{2\pi}{T\sqrt{gh_1}}a_1 \cdots\cdots(7')$$

なる三角方程式の根を求め得れば，棚振動の週期が定まる。此の方程式を滿足する根は一般に幾つもあるが，小湖海に於て實際に生ずる振動は大小兩水體の境界附近に節があつて其の週期が Merian 週期に近きものに限り，然らざるものは事實上殆ど起らないと考へてよい。それ故に方程式(7′)の根の中$\frac{\pi}{2}$の奇數倍に最も近接せるもののみを求むればよいことが知られる。

此の方程式の根は一般に圖式的に求め得ること前論文[(3)]の場合と同樣で，最早や說明を要せぬ。然し實際數値的に根を求むる際には，一層便利な形に直すことが出來るから，夫れを次に附け加へて置く。

實際の湖海に於ては通例

$$\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}=p<1,\qquad \frac{a_2}{a_1}=q\gg1,\qquad \frac{b_1}{b_2}=r<1$$

であつて，pq が相當大なる値をとることは前論文[(4)]の實例にて示した通りである。但し湖棚の場合には稀に pq が左程大ならずして $pq\doteqdot1$ の場合もある。それで玆には，(I) $pq\gg2$, 及び (II) $pq\doteqdot1$ の場合に就いて，根を求める計算上の便法を述べる。

(I) $pq\gg2$ の場合

pq が大なる場合には，n を整數とし，f を $0<f<2$ とすれば

$$pq=2n+f \cdots\cdots(8)$$

として表はすことが出來る。又

$$F(\theta)=pr\tan\theta+\tan pq\theta \cdots\cdots(9)$$

とする。

(1) **$\frac{\pi}{2}$に最も近き根**から始めんに，

$$\frac{n\pi}{pq}=\frac{\pi}{2}-\frac{f}{2pq}\pi,\qquad \frac{n+1}{pq}\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{2-f}{2pq}.$$

(3), (4) 前出(1)。

であるから, $\frac{n\pi}{pq}<\frac{\pi}{2}<\frac{n+1}{pq}\pi$ で且つ $F\left(\frac{n\pi}{pq}\right)>0$, $F\left(\frac{n+1}{pq}\pi\right)<0$ である。従つて $\left(\frac{n\pi}{pq},\ \frac{n+1}{pq}\pi\right)$ の間に根が存在する。

その根を $\theta=\frac{n\pi}{pq}+y$ とすれば, $\theta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{f}{2pq}\pi-y\right)$ であつて, $\frac{f}{2pq}\pi-y$ は小である。依つて

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{n\pi}{pq}+y\right)=\cot\left(\frac{f}{2pq}\pi-y\right)\fallingdotseq\frac{1}{\frac{f}{2pq}\pi-y}$$

であるから, 方程式(7′)は

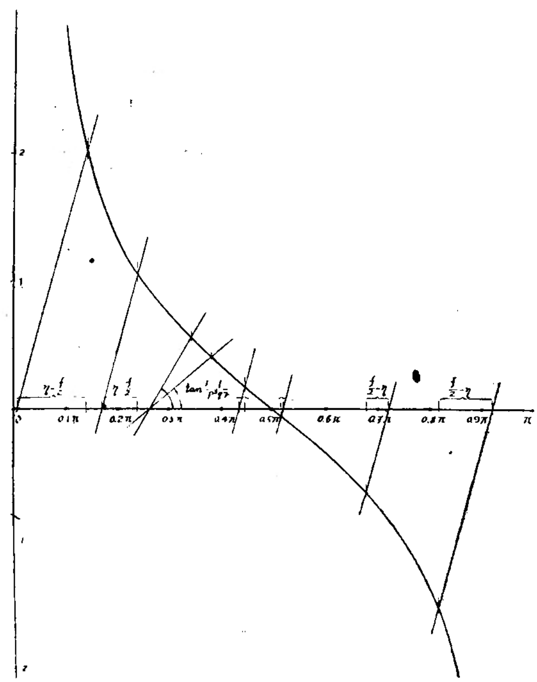
$$\cot pqy=\frac{1}{pr}y-\frac{f}{2p^2qr}\pi$$

と書ける。従つて $pqy=z$ とすれば上の式は

$$\cot z=\frac{1}{p^2qr}\left(z-\frac{f}{2}\pi\right)\cdots\cdots(10)$$

となる。此の三角方程式の根は $(0,\pi)$ の範圍内に在つて, 圖式的に極めて容易に求められる(第2圖)。

第2圖 週期方程式の根



今その根を $\eta\pi$ とすれば，方程式 (7) の根の内$\frac{\pi}{2}$に最も近接せる根は

$$\alpha a_1=\frac{n\pi}{pq}+\frac{\eta\pi}{pq}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

である。

三角方程式(10)の根に關し，第２圖を參照して次の事柄が知られる。即ち

（i） $0<f<1$ のときは $\eta-\frac{f}{2}>0$, $f=1$ のときは $\eta=\frac{f}{2}$, $1<f<2$ のときは $\eta-\frac{f}{2}<0$

である。而して $f=1$ 附近では $\left|\eta-\frac{f}{2}\right|$ が甚小である。

（ii） pq が與へられた場合には，pr が小なるほど即ち$\frac{1}{p^2qr}$が大なるほど $\left|\eta-\frac{f}{2}\right|$ は小である。

（２） $\frac{2m-1}{2}\pi$ **に最も近接する根**：$-\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi,\cdots\cdots$等に近接する根に就いても同様であるが，一般に $\frac{2m-1}{2}\pi$ に最も近接せる根を考へて其の代表論とする。

$\frac{2(s-1)}{2m-1}<f<\frac{2s}{2m-1}$ なるときは

$$\frac{(2m-1)n+(s-1)}{pq}\pi<\frac{2m-1}{2}\pi<\frac{(2m-1)n+s}{pq}\pi$$

であつて，$\left(\frac{(2m-1)n+(s-1)}{pq}\pi,\ \frac{(2m-1)n+s}{pq}\pi\right)$ の間に根がある。

茲に $s=1, 2, 3,\cdots\cdots\cdots, 2m-1.$

方程式 (7′)の根を $\frac{(2m-1)n+(s-1)}{pq}\pi+\frac{z}{pq}$ とし，$fs=(2m-1)f-2(s-1)$ とすれば式(10)と同様にして

$$\cot z=\frac{1}{p^2qr}\left(z-\frac{fs}{2}\pi\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10s)$$

が得られる。茲に $0<fs<2$, $s=1, 2, 3,\cdots\cdots\cdots, 2m-1$

故に此等の三角方程式は式(10)と全く同様にして，その根は何れも(o, π)の範圍內にある。

その根を $\eta_s\pi$ とすれば方程式(7)の根の中$\frac{2m-1}{2}\pi$ に最も近接せる根は次の如く與へられる。

$$\alpha a_1=\frac{(2m-1)n+(s-1)}{pq}\pi+\frac{\eta_s}{pq}\pi,\qquad s=1, 2, 3,\cdots, 2m-1\cdots(11s)$$

方程式(10s)の根に關しても，(1)の場合に類似な次の如き關係が一般に成立する（第２

圖參照)。

(i) $0<fs<1$ のときは $\eta_s-\frac{fs}{2}>0$, $fs=1$ のときは $\eta_s=\frac{fs}{2}$, $1<fs<2$ のときは $\eta_s-\frac{fs}{2}<0$ である。一般に $fs=1$ 即ち $f=\frac{2s-1}{2m-1}$ $(s=1, 2, 3,\cdots\cdots 2m-1)$ なるときは $\eta_s=\frac{1}{2}\,\frac{2s-1}{2m-1}$ である。又 f が $\frac{2s-1}{2m-1}$ の近き値をとるときは $\left|\eta_s-\frac{f}{2}\right|$ は甚小である。

(ii) (1)の場合と同様である。

(II) $pq\doteqdot 1$ **なる場合**

(a) $pq<1$ **なるとき**:—$pq\equiv 1-\varepsilon$ とすれば $0<\varepsilon<1$ にして ε は小である。この場合には $pq\theta<\theta$ であるから,三角方程式(7′)の根の内 $\frac{\pi}{2}$ に最も近き根は $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{pq\,2}\right)$ の間に存在することが知られる。それ故に求むる根は $\theta=\frac{\pi}{2}+y$ $(y>0)$ と置ける。而して $0<y<\left(\frac{1}{pq}-1\right)\frac{\pi}{2}$ である。依つて式(7′)から

$$-pr\cot y+\cot\left(\varepsilon\frac{\pi}{2}-pqy\right)=0$$

が得られる。玆に y は小であるから $\tan y\doteqdot y$ である。又 $\tan\varepsilon\frac{\pi}{2}\equiv N$ とすれば

$$y^2+\frac{p^2qr+1}{pqN}y-\frac{r}{q}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12a)$$

なる二次方程式が得られる。この方程式の正根は

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{p^2qr+1}{pqN}\left[\left\{1+4\frac{p^2qrN^2}{(p^2qr+1)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}-1\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13a)$$

更に $4\frac{p^2qrN^2}{(p^2qr+1)^2}\ll 1$ であるならば

$$y\doteqdot\frac{prN}{p^2qr+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13'a)$$

(b) $pq>1$ **なるとき**:—$pq\equiv 1+\varepsilon$ とすれば,$0<\varepsilon<1$ にして ε は小である。この場合には $pq\theta>\theta$ であるから,三角方程式(7′)の根の内 $\frac{\pi}{2}$ に最も近き根は $\left(\frac{\pi}{pq\,2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ の間に存在することが知られる。従つて求むる根は $\theta=\frac{\pi}{2}-y$ $(y>0)$ でなくてはならぬ。而して $0<y<\left(1-\frac{1}{pq}\right)\frac{\pi}{2}$ である。

y が小であるから $\tan y\doteqdot y$ とし,$\tan\frac{\pi}{2}\varepsilon\equiv N$ とすれば(a)の場合と同様に

$$y^2+\frac{p^2qr+1}{pqN}y-\frac{r}{q}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12b)$$

なる二次方程式が得られる。この方程式の正根は

$$y=\frac{1}{2}\ \frac{p^2qr+1}{pqN}\left[\left\{1+4\frac{p^2qrN^2}{p^2qr+1}\right\}^{\frac{1}{2}}-1\right] \cdots\cdots\cdots\cdots(13b)$$

更に $4\frac{p^2qr}{(p^2qr+1)^2}\ll 1$ であるならば

$$y\fallingdotseq\frac{prN}{p^2qr+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(13b')$$

$\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,$ ………等に近き根に就いても同様である。

3. Merian 週期の補正

三角方程式(7′)の$\frac{\pi}{2}$に近き根を一般に$\frac{\pi}{2}\pm y=\frac{\pi}{2}(1\pm z)$ とすれば

$$\alpha a_1=\frac{\pi}{2}(1\pm z)$$

であるから，小湖海に於ける振動の週期は

$$T=\frac{4a_1}{\sqrt{gh_1}}(1\pm z)^{-1}=\frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}}\left(1\mp\frac{z}{1\pm z}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

である。それ故に基本振動の Merian 週期に對する補正率 C は，

$$C=\mp\frac{z}{1\pm z}\fallingdotseq\mp z\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

にて與へられる。

(I) $pq\gg 2$ **の場合**

(1) の場合の根は式(11)にて與へられる如く

$$\alpha a_1=\frac{n\pi}{pq}+\frac{\eta\pi}{pq}$$

であるから，小湖海の振動の週期は

$$T=\frac{4a_1}{\sqrt{gh_1}}\cdot\frac{pq}{2n+2\eta}\fallingdotseq\frac{4a_1}{\sqrt{gh_1}}\left[1+\frac{f-2\eta}{fq}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(14.\mathrm{I})$$

である。それ故に基本振動の Merian 週期に對する補正率 C は

$$C=\frac{f-2\eta}{pq}\cdots\cdots\cdots\cdots(15.\mathrm{I})$$

にて與へられる。

此の補正率に關する $f-2\eta$ に就いて前節の(I)の結果から次の事柄が知られる。

(i) $0<f<1$ なるときは，$f-2\eta<0$ であるから小湖海の振動は Merian 週期より短く，

$1<f<2$ なるときは $f-2\eta>0$ であるから Merian 週期より長い。又 $|f-2\eta|$ は $f=1$ 附近で甚小であるから，補正率も亦甚小である。

(ii) pr が小なるほど $|f-2\eta|$ が小であるから，補正率は小である。又 pq が大なるほど補正率も小である。

尙ほ倍振動卽ち (I) の (2) の場合に就いても上と同樣である。詳細は煩を避けて省略する。

(II) $pq\fallingdotseq1$ **の場合**

此の場合に於ては，小湖海での基本週期 T 及び其の Merian 公式に對する補正率 C は夫々次の如くである。

$$T=\frac{4a_1}{\sqrt{gh_1}}\left(\frac{1}{1\pm\frac{2}{\pi}y}\right)\fallingdotseq\frac{4a_1}{\sqrt{gh_1}}\left(1\mp\frac{2}{\pi}y\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14.\mathrm{II})$$

$$C=\mp\frac{\frac{2}{\pi}y}{1\pm\frac{2}{\pi}y}\fallingdotseq\mp\frac{2}{\pi}y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15.\mathrm{II})$$

玆に上の符號は $pq<1$ のとき，下の符號は $pq>1$ のときである。又 y は式(13)或は(13′)にて與へられる。

4. 實　　例

琵琶湖の南部への適用：—著者の一人野滿[5]が室戸颱風によつて生じた琵琶湖水面の異常變化を研究したところによると，(i) 堅田の北方琵琶湖の最狹地點から瀨田に到る線を中央線とする同湖の南部が一振動區域をなし，又 (ii) 堅田と長濱とを結ぶ線を中央線とする大略楕圓形の同湖中部が別な一振動區域をなして居た。而して同湖北部は此の振動區域に屬せざること等が知られたのである。

それで同湖最狹地點と瀨田とを結ぶ線を中央線とする同湖南部を小湖と考へ，同湖最狹地點と長濱とを結ぶ線を中央線とする同湖中部を大湖と見て，前節で得た結果を適用して，大湖の振動が小湖の振動週期に及ぼす影響を推算して見よう。尤も前節の結果は大小湖共に直六面體をなす極めて簡單な場合のものであるから，之を適用するに當つては實測値に

(5) T. Nomitsu: Surface Fluctuation of Lake Biwa caused by the Muroto Typhoon, Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. 18 (1935), 221.

對して適當な修正を要することは勿論である。

琵琶湖南部に於ける平素の長週期セイシに就きては高橋・滑川兩氏[6]の研究があり，京都市電氣局が三井寺下に設置した量水所の 1910—1930 年に亘る多年の記錄を調査して，週期 200 分乃至 260 分，最多中心値 **220 分**なることを明かにし，更に其の說明として湖南部を灣と見た長さ及び平均深度から Merian 週期(本多博士の灣口修正を施こした)を求めて 222 分を得て居る。

現著者の一人野滿[7]も，室戸颱風に際し生じた湖南部の長週期振動を論ずるに當り，Merian 週期として **3.78 時＝227 分** となる振動區域を妥當とした。而して此の區域（琵琶湖の南部）に於ての長さ，幅，深さは夫々

$a_1=17.5$ km, $b_1=3.4$ km, $h_1=3.4$ m.

であつた。尙ほ之に接續する主體(琵琶湖の中部)に於ての長さ，幅，深さは夫々

$a_2=52.9$ km, $b_2=8.6$ km,

$h_2=$(i)算術平均29.7 m, (ii)逆自乘平均23.5 m, (iii)調和平均 18.1 m.

となつて居る。

次に此の場合に於ける前記の週期補正率を定めて見よう。上のデータから pq の値は(i) 1.023, (ii) 1.150, (iii) 1.303 となるから，Merian 週期の補正率は式($13'b$)及び(15. II)より計算される。非修正週期を 3.78 時として，計算の結果は次表の通りになる。

	(i)	(ii)	(iii)
Merian 週期に對する補正率	−0.4%	−2 %	−4.5%
補正せる週期	3.76時＝226分	3.70時＝222分	3.61時≒217分

かくの如く湖南部の振動に對する補正率は極めて僅少で，實際の週期變動範圍よりも遙かに小で，實用上は殆んど顧慮の必要がない。

室戸颱風時の湖南部週期は 4.1 時間で，從來になく延長されて居たが，之は當日の稀有な暴風のため湖水の粘性が激增せることと，振動の振幅が甚大なりしため湖水が餘りに淺くなつたことに起因すると解される。

---

(6) 高橋達敏，滑川忠夫：琵琶湖南部の靜振に就て；海と空第18卷(昭和13年)，256頁。
(7) 前出(5)。

結　　言

前論文に於て湖海の棚振動に關し其の存立條件と Merian 週期に對する補正とに就いて論じた。本論文に於ては湖海の棚であると同時に灣である場合を論じて，前論文と類似の結果に到達した。而して主體との長さの比，幅の比，深さの比が種々の値をとる場合に於ける Merian 週期に對する補正率を求める便法を示した。又夫を琵琶湖の南部に適用して豫期の結果を得た。前論文と本論文とを通覽して吾々は，顯著な棚であれば主體の振動に因る補正率は極めて小さく，殆んど從來のまゝの Merian 週期を用ひて可なることを知るのである。蓋し實際の湖海では，棚の長さや深度其の他の觀測材料其のものに少からぬ誤差があつて，上記の補正率を超えるのが普通だからである。

要するに，海棚であれ湖棚であれ，一見して分るほど顯著な棚の振動週期は，吾々が嘗て日本沿岸海棚の固有振動(8)を論じ或は湖棚の固有振動(9)を論じた如く，簡單に從來の灣振動の取扱ひと同樣 Merian 週期を以て代表させても實用上差支ないことを確信するものである。但し普通の Mouth correction は外洋が無限に廣く無限に深くとも必要である。夫れは Mouth に於ける水の出入が軸方向のみでなく，放散狀流線をなす爲めの修正で，いはゞ第1節に揭げた境界條件の不備を補ふものだからである。

(8) Nomitsu & Habu: Proper Oscillations of the Sea of Continental Shelf; Mem. Coll. Sci. Kyoto. A, **18** (1935), 247

(9) Nomitsu, Habu & Nakamiya: Proper Oscillations of Lake-Shelves; Proc. Imp. Acad. Tokyo, **13** (1937), 6; Mem. Coll. Sci. Kyoto, **20** (1937), 3.
野滿，土生，中宮：湖棚の固有振動，日本學術協會報告，第12卷(昭和12年)，349頁。