最小燃料制御の L^0 最適性

○永原正章（京都大学）

L^0 Optimality of Minimum-Fuel Control

$*$M. Nagahara (Kyoto Univ.)

Abstract– In this article, we show the L^0 optimality of the minimum-fuel control (or L^1-optimal control) under the normality assumption of the control problem. Based on this property, we can compute the L^0-optimal (or the sparsest) control via L^1 optimization.

Key Words: Minimum-fuel control, L^0 optimality, sparsity

1 はじめに

最小燃料制御 (minimum-fuel control) 問題とは，許容制御のうち制御信号の L^1 ノルムが最小となるものを見つける問題であり，1960 年代より研究されている古典的な制御問題である [1, 2]．

最小燃料制御は，ある条件のもとで**バン-オフ-バン制御** (bang-off-bang control) となることが知られている．これは，最初ある時間区間を許容制御値の限界値で制御し，そののち，しばらく制御を 0 とし，最後のある時間区間で制御値をまた限界値にするような制御である．本稿では，最小燃料制御であるバン-オフ-バン制御のこのような性質，すなわち，ある（短くない）時間区間で 0 の値をとるような制御に着目する．このような制御を本稿では，圧縮センシングにおけるスパース性の概念 [3, 10, 4] を借用して，**スパースな制御**と呼ぶ．すなわち，制御信号の台の長さが制御区間の長さに比べて十分短いような制御信号をスパースな制御と呼ぶ．

スパースな制御では，ある時間区間で制御信号を 0 にできることから，その区間ではアクチュエータを動作させる必要がない．たとえばアクチュエータがガソリンエンジンである場合は，燃料消費量の削減だけでなく，CO2 の排出や騒音もその時間区間で抑えられる．すなわち，スパースな制御は環境問題に有効な制御であるといえる．また，スパースな信号は情報圧縮が効率的に行えるので，スパースな制御は情報伝送量に制約があるネットワーク化制御系にも有効である [6, 5, 8]．このような観点から，制御信号が 0 である時間区間を最大化するような制御問題を考えることができる．本稿ではそのような制御を **L^0 最適制御**と呼ぶことにする．ここで，連続時間信号の L^0 ノルムとは，その台の長さである（厳密には，ノルムの公理を満たさないのでノルムではない）．

本稿では，一般の入力アフィンな非線形制御系に対する最小燃料制御問題の正規性を仮定すれば，その解が L^0 最適制御でもあることを示す．この性質により，非凸である L^0 最適制御問題の解が凸である最小燃料問題（すなわち L^1 最適制御問題）を解くことによって得られることが示される．このような性質は，圧縮センシングにおける ℓ^0 最適化と ℓ^1 最適化との関係でも見られ，理論的にも興味深い．

2 最小燃料制御

本稿では，次の制御対象を考える．

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ とする．また，f と g は $\mathbb{R}^n$ 上の非線形関数とし，$f(x)$ と $g(x)$ およびそれらの Jacobian $f'(x)$ と $g'(x)$ はすべて連続であるとする．

この制御対象に対して，次の制御を考える．まず，初期値

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

と制御区間 $[0, T]$ $(T > 0)$ が与えられたとする．このとき，T 秒後の状態 $x(T)$ を

$$x(T) = 0 \tag{3}$$

とするような制御 $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ で

$$|u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \tag{4}$$

を満たすものを**許容制御**と呼び，許容制御の集合を $\mathcal{U}$ とおく．**最小燃料制御** [2] とは，許容制御 $u \in \mathcal{U}$ のうち L^1 ノルムを用いた次の評価関数を最小化する最適制御のことである．

$$J_1(u) \triangleq \int_0^T |u(t)| dt. \tag{5}$$

この制御を最小燃料制御と呼ぶのは，航空機などで単位時間当たりの燃料消費率が制御の振幅の絶対値としてモデル化されることにもとづく．

最小燃料制御の性質を調べるために，次の Hamilton 関数 [2, 9] を考える．

$$H(x, p, u) = |u| + p^\top (f(x) + g(x)u). \tag{6}$$

ただし，p は共状態ベクトルである．最小燃料制御の存在を仮定して，それを $u^*(t)$ とおき，対応する状態の軌道を $x^*(t)$ とおく $(t \in [0, T])$．最小原理より，ある共状態 p^* が存在して，

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = f(x^*(t)) + g(x^*(t))u^*(t), \tag{7}$$

$$\frac{dp^*(t)}{dt} = -f'(x^*(t))^\top p^*(t) - u^*(t) g'(x^*(t))^\top p^*(t), \tag{8}$$

$$x^*(0) = x_0, \quad x^*(T) = 0, \tag{9}$$

$$H(x^*, p^*, u^*) \leq H(x^*, p^*, u), \forall u \in \mathcal{U} \tag{10}$$

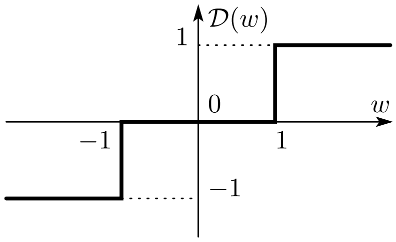

Fig. 1: Dead-zone function $\mathcal{D}(w)$

が成り立つ．(6) と (10) より，最小燃料制御は

$$u^*(t) = -\mathcal{D}\big(g(x^*(t))^\top p^*(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

の形であることが簡単な計算によりわかる．ただし，$\mathcal{D}(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [-1,1]$ は以下で定義される不感帯 (dead-zone) 関数である．

$$\mathcal{D}(w) = \begin{cases} -1, & \text{if } w < -1, \\ 0, & \text{if } -1 < w < 1, \\ 1, & \text{if } 1 < w, \end{cases} \tag{12}$$

$$\mathcal{D}(w) \in [-1, 0], \text{ if } w = -1,$$
$$\mathcal{D}(w) \in [0, 1], \text{ if } w = 1.$$

不感帯関数 $\mathcal{D}(\cdot)$ の概形を図 1 に示す．

もしある時間区間 $[t_1, t_2] \subset [0,T]$, $t_1 < t_2$ 上で $|g(x^*)^\top p^*|$ が恒等的に 1 となった場合，その時間区間上では最小原理から導かれる最適制御 (11) は一意に定まらない．このような時間区間が存在するとき，その区間を**特異区間** (singular interval) と呼び，特異区間が存在するような制御問題は**特異**であるという．いっぽう，特異区間が存在しない場合，制御問題は**正規** (normal) であるという．より詳細には以下のとおりである．

定義 1 (正規性) 次の集合

$$\mathcal{T} \triangleq \{t \in [0,T] : |g(x^*(t))^\top p^*(t)| = 1\} \tag{13}$$

が加算集合であるとき，最小燃料制御問題は**正規**であるという．正規である最小燃料問題に対して，集合 $\mathcal{T}$ の要素 $t_1, t_2, \ldots$ を最適制御 $u^*(t)$ の**切り替え時刻**と呼ぶ．

3　最小燃料制御の L^0 最適性

前節で述べた最小燃料制御問題の正規性は，最適制御 u^* の L^0 最適性を示すうえで重要な役割を果たす．ここで L^0 ノルムを定義しよう．時間区間 $[0,T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ にたいして，その L^0 ノルムをその台の長さ，すなわち

$$\|u\|_0 = \mu\big(\mathrm{supp}(u)\big) = \mu\big(\{t \in [0,T] : u(t) \neq 0\}\big), \tag{14}$$

で定義する．ここで，μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度であり，$\mathrm{supp}(u)$ は連続時間信号 u の台を表す．正規性の仮定のもと，最小燃料制御は L^0 最適でもあることを示すことができる．

定理 2 最小燃料制御問題は正規であり，かつ最適解が存在すると仮定する．このとき，最小燃料制御は L^0 最適である．すなわち，次の L^0 評価関数

$$J_0(u) \triangleq \|u\|_0 \tag{15}$$

を最小化する．

証明． 許容制御の集合を $\mathcal{U}$ とおく．任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して，(4) より

$$\begin{aligned} J_1(u) = \int_0^T |u(t)| dt &= \int_{\mathrm{supp}(u)} |u(t)| dt \\ &\leq \int_{\mathrm{supp}(u)} 1 \ dt \\ &= \|u\|_0 = J_0(u). \end{aligned} \tag{16}$$

が成り立つ．次に u^* を L^1 最適制御とする．このとき，$u^* \in \mathcal{U}$ である．最小燃料制御問題の正規性の仮定より，$u^*(t)$ はほとんどすべての $t \in [0,T]$ で，0 または ± 1 の値をとる．これより，

$$\begin{aligned} J_1(u^*) = \int_0^T |u^*(t)| dt &= \int_{\mathrm{supp}(u^*)} |u^*(t)| dt \\ &= \int_{\mathrm{supp}(u^*)} 1 \ dt \\ &= \|u^*\|_0 = J_0(u^*). \end{aligned} \tag{17}$$

(16) と (17) より，L^1 最適制御 $u^* \in \mathcal{U}$ は $J_0(u)$ を最小化することがわかる． □

4　おわりに

本稿では，入力アフィンな非線形系に対する最小燃料制御問題の解が L^0 最適であることを示した．これにより，スパースな制御信号の設計問題が凸問題である L^1 最適制御によって解けることになる．L^1 最適制御の数値計算法や制御信号の連続性を考慮したスパースな制御信号の設計法については，文献 7) にて発表する予定である．

謝辞

本研究は，科研費 基盤研究 (C) (24560543) の助成を受けたものである．

参考文献

1) M. Athans, Minimum-fuel feedback control systems: second-order case, *IEEE Trans. Appl. Ind.*, vol. 82, pp. 8–17 (1963)
2) M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, Dover Publications (1966)
3) D. L. Donoho, Compressed sensing, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306 (2006)
4) K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, A user's guide to compressed sensing for communications systems, *IEICE Trans. on Communications*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712 (2013)
5) M. Nagahara and T. Matsuda and K. Hayashi Compressive sampling for remote control systems, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E95-A, No. 4, pp. 713–722 (2012)
6) M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, pp. 84–89 (2011)
7) M. Nagahara, D. E. Quevedo, and D. Nešić, Maximum hands-off control and L^1 optimality," *Proc. of 52nd IEEE CDC* (2013)
8) M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Østergaard, Packetized predictive control for rate-limited networks via sparse representation, *Proc. of 51st IEEE CDC*, pp. 1362–1367 (2012)
9) 大塚，非線形最適制御入門，コロナ社 (2011)
10) 田中，圧縮センシングの数理，*IEICE Fundamental Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47 (2010)