

(続紙 1)

京都大学	博士 (人間・環境学)	氏名	高原 純一
論文題目	WEGNER ESTIMATES FOR GENERALIZED ALLOY TYPE POTENTIALS (一般化された合金型ポテンシャルに対するウェグナー評価)		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文では一般化された合金型ランダムポテンシャルを持つシュレディンガー作用素に対してアンダーソン局在の数学的に厳密な証明を与えている。ランダムポテンシャルを持つシュレディンガー作用素は不純物を含む結晶中の電子状態のモデルに用いられてきた。物理学者アンダーソンは1950年代後半にこのモデルに対して、不純物の影響が大きいときには電子が局在することを指摘した。この現象はアンダーソン局在と呼ばれ、数学的には点型スペクトルの出現、波動関数の空間的局在、時間発展半群における動力的局在などの形で定式化される。</p> <p>アンダーソン局在に関する従来の研究では、いわゆる合金型ポテンシャルを扱うことが多かった。合金型ポテンシャルにおいては、不純物の位置が規則的格子に固定され、ポテンシャルの結合定数のみがランダムに変動する。本論文では、不純物の位置もランダムに変動するポテンシャル(一般化された合金型ポテンシャル)を扱う。これは物理的には液晶などのモデルと考えられる。本論文では不純物の位置はポワソン分布に従うと仮定して、小エネルギー区間におけるシュレディンガー作用素の固有値の存在確率を上から評価する不等式(ウェグナー評価)を導いている。さらに、多尺度解析の手法を援用することによって、アンダーソン局在が起こることを、ウェグナー評価からの帰結として説明している。</p> <p>論文は序文、第一部、第二部からなる。序文では研究の背景、先行研究、主要結果の概要を説明している。主要結果の詳細は第一部と第二部に分けて解説されている。</p> <p>第一部は、負値の一般化された合金型ランダムポテンシャルを扱っている。キルシとベセリックは不純物が不規則な位置に固定されている場合に対して、ウェグナー評価を与えた。本論文の第一部では彼らの方法を踏襲しつつ、不純物の位置がポワソン分布に従って変動する場合のウェグナー評価を論じる。第一節では、考察対象のシュレディンガー作用素を定義し、それに対するウェグナー評価を主定理として述べる。また、条件を弱めた場合への定理の拡張の可能性についても触れる。続く四つの節において、この主定理を証明し、多尺度解析の手法も援用して、アンダーソン局在の数学的証明を与える。第二節では、ファリスとラビンの定理を用いて、第一節で導入したシュレディンガー作用素の本質的自己共役性を証明する。そこから可測性などの基本的性質が結論されることも指摘する。第三節では、キルシとベセリックにならって、コム、ヒスロップ、中村らのスペクトル移動関数の理論を用いて主定理を証明する。第四節では、ジャーミネとクラインによる多尺度解析の理論がこの場合にも適用できることを示す。第五節では、ウェグナー評価と多尺度解析からアンダーソン局在が起こっていることを示す特徴(スペクトルの下限付近における強い意味での動力的局在など)を導出する。</p> <p>第二部はポテンシャルが正負両方の値を持つ場合を扱っている。不純物の位置が規則的格子に固定された合金型ランダムポテンシャルに対しては、ヒスロップとクロップが確率空間上のベクトル場を用いる手法によってウェグナー評価を与えた。本論文の第二部では、この方法とキルシとベセリックの方法に基づいて、不純物の位置がランダムに変動する場合のウェグナー評価を論じる。ここでも不純物の位置はポワソン分布に従う</p>			

ものとする。第一節では、考察対象のシュレディンガー作用素を定義し、それに対するウェグナー評価を主定理として述べる。さらに、このウェグナー評価からアンダーソン局在の存在が証明できることを説明する。第二節では、ヒスロップとクロップの方法に基づいて、スペクトル移動関数についての理論を援用しつつ、主定理を証明する。

本論文で得られたウェグナー評価は、この種のランダムポテンシャルについて知られている評価の中では最良のものである。理想的な場合のウェグナー評価の上限値は結晶体積とエネルギー区間幅の積に比例する。しかし多くのポテンシャルに対するウェグナー評価において技術的理由で、上限値は結晶体積とエネルギー区間幅のそれぞれの適当な累乗を掛け合わせた形でしか得られていない。不純物の位置を固定した場合に関する先行研究では、これらの累乗の次数は結晶体積については1、エネルギー区間幅については1に限りなく近い値に選べることが指摘されていた。本論文では、不純物の位置にランダム性を導入した状況においても理想的な場合の上限値に近いものを選べること、すなわち、結晶体積とエネルギー区間幅の両方について累乗の次数を1に限りなく近づけられることを示している。

(論文審査の結果の要旨)

アンダーソン局在を数学的に厳密に証明する試みは、長年にわたって続いている。アンダーソンの1958年の研究以来、当初の研究は不純物が規則的な格子に固定されたランダムポテンシャルを扱った。このようなポテンシャルは合金型ランダムポテンシャルと呼ばれる。合金型ランダムポテンシャルに対するアンダーソン局在の研究を通じて、ウエグナー評価と呼ばれる不等式の有用性が認識されるようになった。この不等式は小エネルギー区間におけるシュレディンガー作用素の固有値の存在確率をある上限で抑えるもので、ウエグナーが1981年に離散的電子モデルの状態密度関数に対して見出したものに由来する。理想的な状況では、ウエグナー評価の上限は結晶の体積とエネルギー区間の幅の積に比例する。実際、バルバロ、コム、ヒスロップは合金型ランダムポテンシャルに対してそのようなウエグナー評価が成立することを示した。さらに不純物の位置が不規則な一般化された合金型ランダムポテンシャルに対しても、不純物の位置が固定されたものについては、2002年にキルシとベセリックがコム、ヒスロップ、中村のスペクトル移動関数の理論を用いてウエグナー評価を与えた。ただし、彼らはポテンシャルが負値の場合だけを扱った。ポテンシャルが正負両方の値を取る場合については、同じ年にヒスロップとクロップが不純物の位置を規則的な格子に固定した場合にウエグナー評価を与えた。

本論文では不純物の位置が固定されたランダムポテンシャルに対するこれらの先行研究を、不純物の位置もランダムに変動するポテンシャルに対して拡張している。論文はポテンシャルが負値の場合を扱う第一部と、正負両方の値を取る場合を扱う第二部からなる。不純物の位置に関してはポワソン分布を仮定している。不純物は結晶原子に比べてごく小数であるから、ポワソンの小数法則に鑑みれば、これが最も自然で基本的な設定である。

論文の第一部では、キルシとベセリックの手法に従って、スペクトル移動関数の理論を用いてウエグナー評価を与えている。この方法で得られる上限は結晶体積とエネルギー区間幅のそれぞれの累乗の積であるが、累乗の次数は1に限りなく近く選ぶことができる。これはこの種のモデルに対する既存の研究の結果の中では最良のものである。さらに、このウエグナー評価からアンダーソン局在の存在を示すために、本論文ではジャーミネとクラインによる多尺度解析の方法を利用して、スペクトルの下限付近でアンダーソン局在を特徴付ける現象が起きることを証明している。具体的には

- (i) シュレディンガー作用素のスペクトルが点型となること、
- (ii) 対応する波動関数が空間的に局在すること(指數的局在)、
- (iii) 時間発展の半群が空間変数の任意の多項式を乗じても、作用素ノルムについて時間的に一様に可積分であること(強い意味での動力的局在)、

を証明している。特に、強い意味での動力的局在はポテンシャルの結合定数と不純物の位置の両方のランダム性に関して平均を取って初めて得られるものであり、真に新しい結果として高く評価できる。

本論文の第二部では、ポテンシャルが正負両方の値を取る場合を扱っている。2002年のヒスロップとクロップの研究では、不純物の位置を規則的な格子に固定したモデルに対して確率空間上のベクトル場を用いる手法を用いて、体積にエネルギー区間幅の累乗(次数は1に限りなく近いものを選ぶ)を乗じた上限をもつウエグナー評価を与

えている。本論文ではこの手法とスペクトル移動関数の理論を用いて、不純物の位置もランダムにした場合の第一部の結果を拡張している。ここでもウェグナー評価の上限は結晶体積とエネルギー区間幅の 1 に限りなく近い次数の累乗の積に選ぶことができる。また、スペクトルの下限付近での強い意味での動力的局在や波動関数の空間的局在など、アンダーソン局在を特徴付ける性質がそこから結論されることも、第一部の場合と同様である。この意味で、第二部も新しい結果として評価できる。

本論文で行われた研究は様々な方向に発展する可能性がある。まず、不純物の位置についてはポワソン分布を仮定しているが、本論文で用いられたポワソン分布の特性は可積分性と定常性だけである。したがって、論文の第二部第三節に注意されているように、本論文の結果は不純物の位置がポワソン分布と同様の可積分性と定常性をもつ分布に従う場合に拡張できる。次に、ポテンシャルの結合定数の確率分布については滑らかな確率密度関数をもつことを仮定しているが、最近この仮定を緩める可能性を示唆する研究が報告されている。さらに、ポテンシャルは各不純物の近くではコンパクトな台をもつと仮定しているが、この仮定を緩める方向へ研究が発展することも期待される。

アンダーソン局在に数学的に厳密な証明を与えることは高度な技術を要求される難しい課題である。申請者は長年にわたってこの課題に取り組む準備を行い、多くの文献から先行研究を学んでいる。その成果が本研究に活かされている。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成 25 年 5 月 20 日、論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果、合格と認めた。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公表可能とする日付を記入すること。

要旨公開可能日： 年 月 日以降