（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	佐藤　寛之
論文題目	Riemannian Optimization Algorithms and Their Applications to Numerical Linear Algebra		

（論文内容の要旨）

最適化問題は自然科学や工学のみならず、経済学やその他多くの分野に現れる重要な問題である。連続最適化問題は通常ユークリッド空間における問題として定式化される。一般に、制約条件のない最適化問題に対する解法アルゴリズムは、制約条件の付いた最適化問題に対する解法より簡明である。ところが制約付き問題であっても制約条件を満たす点全体がリーマン多様体を形成するような問題については、問題の目的関数をその多様体上で定義された関数と見なすことで、リーマン多様体上の無制約最適化問題として再定式化することができる。本論文はこうしたリーマン多様体上の最適化に関して、リーマン多様体上の共役勾配法の改良と収束性、さらに、リーマン多様体上の最適化問題とみなすことで定式化される特異値分解の解法アルゴリズムについてまとめたものである。

第1章では、序章として、研究の背景、目的、論文の構成を述べている。

第2章では、リーマン多様体上の最適化の一般論について述べるとともに、後の章で重要な役割を果たすシュティーフェル多様体を準備している。

第3章では、リーマン多様体上の無制約な最適化問題の解法として新たな共役勾配法を提案し、その大域的収束性の証明を与えている。従来は、vector transport と呼ばれる写像に関する特別な仮定の下でしか大域的収束性が証明されていなかった。申請者は scaled vector transport という新たな概念を導入することで、従来のリーマン多様体上の共役勾配法を改良し、特別な仮定をせずにその大域的収束性を証明している。また、数値計算実験によって、従来の共役勾配法では解くことができないが、提案した新たな共役勾配法では解くことができる場合を例示している。

第4章では、実行列の特異値分解が2つの実シュティーフェル多様体の積多様体上の最適化問題と等価であることを証明し、その最適化問題に対する解法について議論している。問題の多様体構造を取り入れた目的関数の勾配やヘシアンなどを用いることで、この最適化問題に対する共役勾配法やニュートン法などを定式化している。また、大域的収束性を持つと予想されるリーマン多様体上の共役勾配法による近似的な特異値分解と、大域的収束性を持たないが局所的に2次収束性を持つニュートン法を組み合わせたハイブリッドなアルゴリズムを提案し、標準的な方法による近似特異値分解の場合より良い精度の解が得られることを数値実験で確かめている。

第5章では、第4章での議論を複素数の場合に拡張している。まず、2つの複素シュティーフェル多様体の積多様体上の最適化問題として複素特異値分解問題を定式化し、その問題が実際に複素特異値分解と等価であることを証明している。その後、quasi-symplectic set という集合を導入することで、その集合と

実シュティーフェル多様体の共通部分として複素シュティーフェル多様体を表現し、実数の場合の解法アルゴリズムと同様なアイデアにより新たな複素特異値分解アルゴリズムを定式化している。

第6章では、結論として、本論文で得られた結果の要約とともに、リーマン多様体上のヘシアンが最適化においてどのような役割を果たしているかについて論じ、リーマン多様体上の最適化の今後の展望について述べている。

注) 論文内容の要旨と論文審査の結果の要旨は１頁を３８字×３６行で作成し、合わせて、３、０００字を標準とすること。
論文内容の要旨を英語で記入する場合は、４００～１、１００wordsで作成し
審査結果の要旨は日本語５００～２、０００字程度で作成すること。

（続紙 2 ）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、リーマン多様体上の最適化についての理論的な結果と応用的な結果をまとめたものである。

理論的な結果としては、リーマン多様体上の新たな共役勾配法を定義し、その大域的収束性を証明している。リーマン多様体上の従来の共役勾配法では、vector transport と呼ばれる写像によって移されたベクトルのノルムが、元のベクトルのノルムより大きくならないという仮定の下で大域的収束性を保証していた。申請者は scaled vector transport という新たな概念を導入することで、リーマン多様体上の従来の共役勾配法を改良し、特別な仮定をせずにその大域的収束性を証明している。また、従来の共役勾配法では解くことができなくとも、提案した新たな共役勾配法では解くことができるという例を、数値計算実験によって実際に提示している。

応用的な結果としては、リーマン多様体上の最適化の数値線形代数への応用として、特異値分解が取り扱われている。申請者はまず実行列の特異値分解問題を制約条件付きの最適化問題とみなし、これが2つの実シュティーフェル多様体の積多様体上の最適化問題と等価であることを証明し、リーマン多様体上の最適化問題としての解法について議論している。多様体の構造を取り入れた目的関数の勾配やヘシアン、および、探索のための適切な曲線を定義するのに必要なレトラクションと呼ばれる写像を求めることで、リーマン多様体上の最適化問題に対する最急降下法、共役勾配法、およびニュートン法を検討し、共役勾配法による近似特異値分解を初期値とするニュートン法による特異値分解アルゴリズムを提案している。数値実験では、標準的な方法による近似特異値分解より、良い精度の特異値分解が得られることも確かめている。

また申請者は、特異値分解に関する上記の議論を複素行列の場合に拡張している。まず、2つの複素シュティーフェル多様体の積多様体上の最適化問題として複素特異値分解を定式化し、その問題が実際に複素特異値分解と等価であることを証明している。しかし、複素変数の最適化問題をそのまま解くのは困難であるため、quasi-symplectic set という集合を導入することで、複素シュティーフェル多様体の実数による表現を得ている。こうして当初の最適化問題を、対応する実多様体上の最適化問題に書き換え、その問題に対するニュートン法をさらに複素数でのアルゴリズムに書き直すことで、複素特異値分解に対する新たなアルゴリズムを得ている。

本学位申請に係る研究は、リーマン多様体上の重要な無制約最適化手法の一つである共役勾配法について、従来法を改良して大域的収束性が保証されるアルゴリズムを提案することで、リーマン多様体上の最適化に対して理論的に貢献すると同時に、リーマン多様体上の最適化の考え方を行列の特異値分解に応用することで、特異値分解のための新たなアルゴリズムを定式化しており、応用面の寄与も認められる。今後は、ユークリッド空間上の様々な最適化手法のリーマン多様体上への拡張および、他の制約条件付き最適化問題へのリーマン多様体上の最適化の応用を通し

て、最適化の基礎研究における更なる発展が期待される。

　このように、本論文は、理論上の新しい知見を含むだけでなく、リーマン多様体上の最適化手法の発展に貢献する研究として高く評価されるものである。

　よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。

　また、平成25年10月21日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公開可能とする日付を記入すること。

要旨公開可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降