TITLE:

Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Oshida, Takeshi

CITATION:

Oshida, Takeshi. Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number. 京都大学, 2000, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2000-03-23

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/181170>

RIGHT:

氏 名	おおしだ たけし 大 信 田 丈 志
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1375 号
学位授与の日付	平 成 12 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number (中程度のレイノルズ数と大きい有限のウェーバー数をもつ流下液膜流の表面方程式)

論文調査委員	(主 査) 助教授 藤 定 義	教 授 大 見 哲 巨	教 授 蔵 本 由 紀

論 文 内 容 の 要 旨

申請者は、長波不安定性を示す散逸系の典型例である液膜流を対象として取り上げ、液膜流に生じる波動のふるまいを縮約方程式によってとらえる問題に取り組んだ。ここでいう縮約とは、見かけ上多数の自由度を含む系の挙動を本質的な少数個の自由度のみのダイナミクスに帰着させることであり、申請者が取り上げた問題に即して具体的に言うならば、液膜流の内部の流れを陽に求めることなしに液膜表面の運動（すなわち液膜の厚さの時間変化）のみを用いて系全体の運動の記述をおこなうことを意味している。論文表題から示唆されるように、この分野における旧来の成果は Reynolds 数が小さい場合や Weber 数が無限に大きい場合にほとんど限られてきたが、申請者の論文は、これよりも広い範囲で適用できるような縮約法を提案し、その妥当性や物理的根拠を論じている。

液膜流というのは、垂直壁または斜面上を流体が薄い膜となって流れる粘性流のことであり、流れ自体は層流であるが、自由表面の存在のために複雑な挙動を示す系となっている。系の置かれている条件は、斜面の角度 α のほか、慣性をあらわすパラメータである Reynolds 数 R 、および表面張力をあらわすパラメータである Weber 数 W を定めることにより指定できる。Reynolds 数 R が臨界値 $R_c = (5/4) \cot \alpha$ を越えると一様定常状態は長波攪乱に対して不安定となることが知られており、このとき、表面に生じた波は下流に向かって伝播し、最終的に孤立波の列を生じる。

臨界のごく近傍においては、液膜厚さのダイナミクスは Kuramoto-Sivashinsky 方程式で記述できる。しかし、臨界をある程度離れた場合における系の挙動については縮約方程式による記述は困難であり、特に、中程度以上の Reynolds 数の場合に、液膜厚さのみを用いて系の挙動を適切に記述する方法はこれまで知られていなかった。この方面での研究は、まず Benney の長波展開法が挙げられる。長波展開法を用いると、すべての変数の挙動を液膜厚さ h の発展方程式に帰着させることが可能である。このことから、液膜流の支配方程式を縮約する問題は長波展開法によって解決済みであるかのように思われていた。しかし、1990 年代になってから可能となった Navier-Stokes 方程式の直接数値計算により、長波展開によって得られる方程式の正当な適用範囲も臨界のかなり近くに限られるということが明らかになった。他方、臨界から離れた場合（つまり $R - R_c$ が大きい場合）にも有効性を失わない近似方程式として、いわゆる「境界層方程式」が知られている。この方程式では圧力のみが消去されており速度は残っているので、縮約方程式と考えることにはやや無理がある。「境界層方程式」を単純化するために、更に速度分布に関して天下りの仮定を持ち込むことによって「深さ平均方程式」を得ることがしばしば行なわれてきた。しかし、この近似は定量的に正しくない答えを与える。また、「境界層方程式」は、 R^3/W を有限に保ったまま W を無限大にすることで導かれる方程式であるため、粘性項の一部（momentum diffusion）を無視することになり、 W が有限の場合には無視できない影響がでるはずである。

申請者のアイディアは、Benney の長波展開を微分演算子 ∂_x によるベキ級数展開ととらえ、これを Padé 近似で置き換えたことにある。このことにより、長波展開の収束性が改善され、単なる高次の長波展開よりも広い適用範囲をもつ縮約方程

式を得ることができた。この方程式では、明らかに表面変数 h 以外の自由度はすべて消去されている。(以下、縮約方程式と呼ぶ。) この縮約方程式の特徴は、 $\partial_x \partial_x (h^5)$ のような x と t の混合微分を含むことである。

更に物理的意味を明らかにするため、申請者は深さ平均方程式との関連づけを試み、混合微分の項は流体の慣性を記述する項であることを明らかにした。すなわち、流体の慣性が無視できない場合には、系の挙動は主に下流に向かう特性線に支配されているため、流体の速度が表面に追従する際に生じる時間的な遅れを空間遅れに読み替えることが可能になることが示される。また、高次の混合微分項が momentum diffusion に対応することも判明した。これらの対応関係をもとに、申請者は被膜流における長波不安定性の物理的起源を考察した。すなわち、液膜流の方程式は、散逸的な極限 (magmon limit) においてもまた非粘性極限 (water-wave limit) においてもともに KdV 的な純分散方程式に帰着するが、この両者が共存する場合に長波不安定が起きるのであり、申請者はこのことを Whitham の波動階層理論の拡張として説明した。なお、縮約方程式と同じような混合微分項は、液膜流においてのみならず、粉体流動層などのある種の混相流を記述する一般的な方程式においても現れる。

申請者はこの縮約方程式の数値解を求め、これまでの実験結果や Navier-Stokes 方程式の数値計算結果と比較した。この結果、縮約方程式の妥当性が明らかになり、旧来の Benney の長波展開法と比べ申請者が考案した展開手法が良い近似になっていることが確認できた。特に、定常進行解の分岐に関して長波展開は定性的に誤った結果を与えるが、縮約方程式は定性的に正しい結果を与えることが分かった。垂直壁の場合、Reynolds 数 R が Weber 数 W の $1/3$ 乗を超えない限り、縮約方程式の数値解は実験結果や Navier-Stokes 方程式の結果と定量的に良い一致を示した。斜面の場合についても、 R は相当大きいにもかかわらず、実験結果との一致は良好であった。

最後に、申請者は、孤立波の裾の構造の挙動が異なる 2 つの領域が R の値に関して存在することを数値計算結果より見出し、これに関する発見法的な議論を行なった。孤立波の裾の長さが R に比例する領域が存在することは、慣性に支配された速度場の挙動が h の挙動に反映されていると考えれば説明できる。このことは、系全体の挙動の本質的な部分が縮約方程式に取り入れられていることを示す状況証拠となっている。

論文審査の結果の要旨

大自由度力学系の挙動をより自由度の少ない方程式に帰着させることは、20 世紀の物理学において活発に研究された問題であるとともに、21 世紀においてもますます重要となる問題のひとつである。この問題に関して、申請者は、Padé 近似と長波展開の結合という新しい手法を開発し、この手法が適用できる例として、液膜流、すなわち斜面上を重力により流下する粘性流体の問題を解析した。また、参考論文において、粉体流動層などのある種の混層流体系の 1 次元モデルに対してもこの手法が有効であることを示した。

流下する液膜流に生じる波動に関して、今に至るまで半世紀以上のあいだ、支配方程式である Navier-Stokes 方程式を単純化するために多大な努力が続けられてきた。実際、Navier-Stokes 方程式をそのまま用いたのでは、たとえ今の計算機の力をもってしても、実際のパラメータの値に対し、実際的な大きさの領域に渡る液膜流の過渡的な発展を数値計算で追うことは未だ不可能なのである。このような単純化は、典型的には長波展開および振幅展開という 2 つの展開によって行われてきた。長波展開は、長波パラメータ μ すなわち液膜厚さと攪乱波長の比による展開であり、これは、液膜流における不安定攪乱の波長は常に液膜厚さに比べて長いという事実に基づいている。一方、振幅展開は、小振幅の場合、すなわち波の振幅が液膜の厚さに比べて小さい場合に可能となる。

臨界近傍に考察を限れば、小振幅の条件が満たされるため、有限波数の攪乱に対しては分岐解析の通常の方法による振幅方程式が導かれる。また、同じく臨界近傍において、長波攪乱を考え、振幅パラメータと長波パラメータとのあいだのスケールリングを仮定することにより、Kuramoto-Sivashinsky 方程式が導かれることが知られている。しかし、臨界から離れる (レイノルズ数 R が増加する) とともに、振幅と波長のアスペクト比が大きくなり、したかつて振幅展開はその根拠を失う。他方、振幅展開を用いずに長波展開のみを用いる手法からは、いわゆる Benney 型の長波方程式が得られるが、 R が大きくなるとともに長波展開もまた破綻するのであって、このことは申請論文においても確認されているとおりである。すなわち、Benney 型の方程式の孤立波解の分枝は有限の R でサドル・ノード分岐を生じるが、これは Navier-Stokes 方程式の直接数値計算の結果と一致せず、また実験結果とも矛盾する。これは、Benney 型の方程式が誤った結果を与えることを意味し、長

波展開の限界を示している。この破綻は、臨界のレイノルズ数 R_c の近傍で生じるため、長波方程式の適用範囲はきわめて狭い。実際、Benney 型の長波方程式は実験と比較すら難しい波動がほとんど観測できない場合にしか適用できない。さらに、偽のサドル・ノード分岐が生じるということは、偽の分岐が存在することを意味するから、 R が小さい領域においてさえ、長波方程式は既に誤った結果を含んでいることになる。

申請者は、これらの困難が生じるのは長波展開 (μ 展開) の収束性に問題があると考え、この点を改善するために Padé 近似の適用を試みた。すなわち、展開される関数は波数領域において特異点をもつと想定し、この特異点を、別の関数のゼロ点によって打ち消すというのが発想の要点である。実際には、 μ 展開というのは微分演算子 ∂_x による展開にほかならないから、特異点を打ち消すものとして、関数ではなく微分演算子を用いる必要がある。この微分演算子を「正則化演算子」と呼ぶ。

正則化演算子を用いて長波展開を行なうことにより、結果として、 $\partial_x \partial_t$ のような混合微分項をもつ長波方程式が得られる。ここで n は正則化演算子に含まれる微分の階数に關係しており、一般論として n をいくつまで取るべきかは微妙な問題であるが、申請者は、物理的な考察により、液膜流の記述においては $n=2$ まで取り込むのが妥当であることを示した。すなわち、通常の長波展開 ($n=0$) は粘性と重力のつりあいを基本に静水圧や慣性などの効果を局所的な摂動として考慮しているが、正則化演算子 ($n \geq 1$) を用いると、さらに Green 関数を通じて非局所的な効果が入ってくることになる。まず、 $n=1$ で慣性の非局所効果が取り込まれる。次に、表面張力の効果 (ウェーバー数) が無限大でない限り、粘性の高次効果 (運動量拡散) の寄与が無視できず、この効果が $n=2$ で取り込まれる。

なお、液膜流の挙動を定性的に理解するためにしばしば行なわれてきたことであるが、流速分布を天下り的に仮定して方程式を単純化し、液膜厚さと深さ平均速度との連立方程式 (深さ平均方程式) を導くことも可能である。しかし、このような方法では定量的妥当性が失われるだけでなく、速度場が液膜厚さに従属しているために、深さ平均方程式には余分な自由度が含まれている可能性がある。申請者による Padé 近似の方法は、あるパラメータの範囲において、この自由度が消去可能であることを示したものと考えられる。

申請者は、正則化演算子を用いて得られた方程式に対して、定常進行解および非定常解を数値計算により求め、実験との比較がじゅうぶん可能となるパラメータの値で妥当な結果が得られることを示した。また、定常進行孤立波解の分岐図において、Benney 型の長波方程式は (たとえ高次の項を含めたとしても) 破綻するのに対し、正則化演算子を用いて得られた方程式はこのような破綻を示さず、本来の支配方程式である Navier-Stokes 方程式の解と同様の挙動を示すことを確認した。特に、 R が小さい場合には定量的にきわめて良い一致が見られ、偽の分岐が生じることもない。さらに、 R が大きい場合においても、Navier-Stokes 方程式の解の挙動に関して定性的な知見を得ることができる。具体的には、 R が大きいとき、孤立波の裾構造の長さスケールとして、慣性の効果による長さスケールが現れることが示されるが、これは通常の長波展開からは得られない、新しい結果である。

申請論文は、通常の長波展開が破綻する例を取り上げ、Padé 近似を適用することにより破綻が回避できることを示した。この結果、大自由度力学系の挙動を少数自由度の方程式に帰着させる方法論が拡張され、多くの分野において新地平を開くための手掛かりが与えられると期待できる。よって、本申請論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。

なお、主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について口頭試問した結果、合格と認めた。