

鶏がないた。天狗は其れを聞いて口惜しき涙を一零落した。伊香保から榛名神社に行く道の右手に、しらち池といふ楕円形の凹みがそれであつて、土を取つた跡が榛名湖だといふ。

地球の橢圓率に就いて

熊谷直一

之れは大正十五年四月施行の第四十四回文檢地理豫備試験問題の中の一つとして出された。「地球の橢圓率に就いて説明せよ」といふ問題に對して幾分解説の目的で書いて見たものであるが目下十分の時間を持つて準備をなし得ない事情にある爲めに幾多不備の點のあることを甚だ遺憾に思ふ。

第十七世紀の末期に於てニットン及ハイゲンズの地球の形に關する研究が出て以來、地球は赤道面が膨れ出してある扁平廻轉橢圓體であることが次第に承認せられて來た。地球の橢圓率 (ellipticity) といふのはこの扁平廻轉橢圓體の赤道半徑 a と極半徑 b との差を a で除したものの即ち $(a-b)/a$ を指したものであつて、 e 或は e' といふ文字で表はしてある。之れは又扁平度 (flattening) とも稱してなる。扁平度と言ふ時は特に f といふ文字で表はしてあるが、獨逸の書物には Ab $flattening$ を畧した a 又は p といふ文字がよく用ひられてゐる。これは扁平廻轉橢圓體が球形との位相違してゐるかを示す

として今一番で本物の富士山と同じに成るといふのでその山を一番山といふ様になつたといふ。

一つの尺度である。橢圓率を決定する方法や計算に用ひた材料の相違などによつて橢圓率即扁平度の値は少しづつ違つてゐるが、何れも $1/297$ といふ値に近いものであつて、特殊の研究以外には地球の扁平度と言へばこの値が採用せられてゐる様である。二九七分の一と言へば随分小さいものであつて若し半徑約三〇浬の地球儀を作るゝすれば赤道半徑と極半徑との差は僅か一糶程のものとしかならない。然し地球表面上の精密な測量によつては決して無視出來ないものであり、又地軸の所謂歳差運動といふものは地球が僅かながらこの扁平度を持つてゐる爲めに起る現象である。橢圓率又は扁平度を用ふる代りに時々離心率 (eccentricity) を呼ばれる

$e = (a-b)/a$ なる量を用ふることがある。之は橢圓率と同様に e 又は e' で表はされてゐる爲めに無造作に書物を開いた時などはよく橢圓率と混同する虞れがあるから注意せればならない。橢圓率を e とし離心率を e' とすれば兩者の間には $e = e' / (1 + e')$ なる關係があるから一方を知れば他は直ち

求めることが出来る。

地球の橢圓率に就いて述べるに當つて地球形懸論變遷の歴史に觸れつゝ筆を進めて見たい。

既に西曆紀元前六百年の昔、水を萬物の本源なりと考へた渠のタールス (Thales) は地球は諸の天體と同様なものであるといふ現代宇宙論の眞髓に觸れた卓見を懷いてゐたことは實に大なる驚異である。この考の中に地球は球形であるといふ事が暗黙の内に承認せられてゐることを明かに察知することが出来る。その後紀元前四百年の頃になつてヒタゴラス派の人によつて地球球形説が唱道せられ、遂にアリストテレス (Aristoteles) に至つて球形説の證據となる事實が擧げられた。曰く、(1) 高所に登るにつれて視界が段々廣くなること、(2) 地球上を南北に移動するに北辰の高度が變はること、(3) 月蝕は月面に於ける地球の影であつてその影の球形であること等である。科學的常識を豊富に惠まれてゐる賢明なる現代人は右の(1)及(2)の事實は地球が球形から可なり相違してゐる橢圓體であつても妥當であり、又(3)の月面に印せられた地球の影は $1/257$ といふ様な僅小な扁平度を到底吾々に看破せしめないものであることに直に氣が付くであらう。然し精密なる測定科學の萌芽さへなかつた當時としては、月面に於ける地球の影などは當時の先覺者に取つてさへ地球を眞に球形と信すべき實に驚嘆に値した證據であつたに相違ない。この地球々形説は十七世紀の末葉まで別に疑義を受けることなく墨守せられて來て、その間各地で色々な人々によつて球形の大き

の要素たる地球の直徑や子午線の一象限の長さ等の測定が行はれたのである。所が十七世紀末期に至つてアリストテレス以來の信條たるこの球形説が崩れ始めて橢圓説が持上ることになつた。これに就いては是非一言せなければならぬ出來事がある。之れは地球形懸論の發達史の上に於て深く記念すべき事件である。

一六七一年に佛國の學士院會員(當時既にルイ十四世によつて佛國學士院 Académie が創立せられてゐた) リンヘー (Richer) が巴里で正しく調節して置いた振り時計を携へて北緯五度附近にある南米のカイエン島 (Ile de Cayenne) 之れは今の佛領ギヤナの海岸にある小さな島でカイエンといふ港町がある) に出張して天文觀測に従事したのである。所がこの地で計らずも其時計が少し遅れる様になつてゐることを發見した。そこで振子の長さを短くして始めて正しい時を示す様になつた。再び巴里に持つて歸つて見ると又舊の長さに戻さなければならなかつた。此豫期せざる偶然の事件に對して佛國の學者達は色々奇妙な臆説を設けてその説明に腐心したのであるが、かの英國のニットンはこの出來事の正しき事實なることを直ちに承認したのである。何故であるか。この頃彼はかの引力論を應用して、地球を均一密度の廻轉橢圓體なりと假定し巧妙なる假想的實驗を考へて、この廻轉橢圓體は赤道面が膨れ出してゐる扁平廻轉橢圓體であるべきことを結論し其橢圓率即扁平度として $1/258$ といふ現今認められる $1/257$ といふ値より少し大なる値を得てゐたのである

所が振子の週期が一定なる場合は振子の長さ厳密に言ふならば其振子と同一週期を有する單一振子の長さは其地點の重力の強さに正比例するものであるから、リシエーがカイエンヌで時計の振子を短くせなければならなかつたのは正に其地の重力が遙かそれよりも高緯度にある巴里の重力よりも小である爲めであつたのである。高緯度の重力が低緯度の重力よりも大であるといふ關係は地球が扁平廻轉楕圓體であるといふ

ニットンの結果から考へ付くことであつて、彼がリシエーの結果を躊躇なく承認したことは極めて自然であり、旁々彼自身に於ては自分の理論の正しきことをリシエーによつて立證せられたことにもなつたのである。尤も地球が完全な球體であつても赤道に於ける重力は遠心力の爲めに高緯度の地よりも小であるべき筈であるが、唯夫れ丈ではリシエーの結果の数量的説明は出来なかつたのでさうしても高緯度の地は赤道地方よりも地球中心に近いと言ふ扁平楕圓體説を認めなければならなかつたのである。この當時和蘭のハイゲンス (Huygens) も矢張り地球の形を論じて地球内部の密度分布に關してニットンは餘程異つた假定の下に計算を行つて扁平度の値として $1/87$ といふ餘程小さな値を與へた。このニットン及ハイゲンスの扁平廻轉楕圓體説は十八世紀になつて佛國のカシニ (Cassini) によつて完成せられた巴里を通過する地球子午線の短少なる部分の測量の結果一時一寸疑はれる様になつたけれども、同世紀の中葉になつて佛國政府が南米のペルー高原と北極地方のラブラントとに子午線測量を更にやり換

へる目的で二組の觀測隊を派遣して得られた結果によつて扁平廻轉楕圓體説は遂に疑ふ餘地なきものとなつたのである。子午線測定事業はメートル法制定前後の頃から次第に盛になり、十九世紀に入つてからこの方面の材料が多敷集積した子午線測量によつて廻轉楕圓體の大きき形を決定する方法は次の様な基本式による。

$$R = \frac{ds}{d\beta} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \beta)^{3/2}}$$

茲に β は地理學的緯度即ち廻轉楕圓體の面に垂直なる直線が赤道面となす角で、 a 及 e は夫々求めんとする赤道半徑及離心率である。R は地理學的緯度 β なる點に於ける子午線の曲率半徑であつて之は β の弧度一度の變化に應ずる子午線の長さ s の變化する割合即 $\frac{ds}{d\beta}$ に等しいものであつて之れが子午線測量に關係して來る量である。然し實際の測量では s の相當長い長さ天文觀測に依つてその兩端に於ける緯度 β_1 と β_2 とを決定するのであるから、實際用ふる式は前式を β_1 から β_2 まで積分したる形を用ひなければならぬのである。何れにしても未知數は a 及 e の二つであるから緯度を異にする二つの地に於ける觀測さへあれば十分であるが、緯度を色々異にする多數の地に於ける觀測があつて其等を凡て用ひんとする時には未知數の數よりも方程式の數の方が非常に多くなつて方程式論に拘泥してある間は之れは容易に取扱へない問題である。所が幸にも此當時既に獨逸のカウス (Gauss) によつてかゝる問題を極めて合理的に解くかの最小自乘法が大成せ

られてゐたのである。この最小自乗法を應用して多數集積した子午線測量の實測値から其等に最も良く融和する廻轉橢圓體の大ききと形を計算したのは獨逸のベッセル(Bessel)次いで英國のクラーク(Clark)であつて、兩氏の計算して出したものが扁平廻轉橢圓體を與へた事は申述べるまでもない。ベッセルの出した橢圓體をベッセルの橢圓體(Bessel's Ellipsoid)クラークの出したものをクラークの橢圓體(Charles's Ellipsoid)と稱して爾來長らく測地學上に實際用ひられて來てゐるものである。

リシエーの時計事件をニウトン及ハイゲンズの理論の結果と照し合はせて見れば、地球上の重力分布を測ることによつて地球の橢圓率の大ききが見出されるであらうといふ暗示を得るやうである。實際此の關係を明確に論じたのはクレーロー(Clairaut)の有名なる地球形態論(Theorie de la figure de la terre, Paris 1743)である。尤も十七世紀の末頃既に著明なる學者間では振子は地球の形を研究する上に一つの有効なる器械であらうといふ考が行はれてなり偶まりリシエーの時計事件出づるに及んでこの考へは非常な刺激を受けたものであるが、右の考へを立派に大成して後世重力分布論の先驅をなしたのは實にクレーローに歸せなければならぬ。彼は地球を廻轉橢圓體なりとし内部の密度分布は半徑の方向には違ふが表面と同心同軸の橢圓體の面上に於ては同一であるといふ現今の立場より見ても極めて穩當な然も一般的な假設を置いて地球表面上の重力分布は $g = g_0(1 + \alpha \sin^2 \beta)$ に於て表

地球の橢圓率に就いて

はさるべきを示し(約は赤道に於ける重力、 β は地理學的緯度、 α は或恒數である)、且橢圓率を與ふる式として有名なクラレーローの定理(Clairaut's Theorem) $e = \frac{a-b}{a} = \frac{2}{3} \frac{f_0}{1-f_0}$ を導出した。 f_0 は赤道に於ける遠心力であつて赤道半徑と地球の自轉速度とより決定出来る。勿論赤道半徑の大ききは別に測地學的に見出されたものを採用せねばならぬ。は極に於ける重力より赤道に於ける重力を差引いたものである。右の兩式は實際の重力分布や橢圓率の値を良く表はしてゐるものであつて、クレーローの理論は後世この方面の研究の基礎となつたものである。

その後數理物理學の發達と共にクレーローの理論は次第に擴張せられて地球形態論は一方重力分布論と相關聯して著しき發展をなした。同時に地球の形といふもの、意味も地球橢圓體(Erdellipsoid)といふものを取扱ふ様になつて極めて明瞭なものになつた。地球橢圓體といふのはゼオイド(Geoid)の面と最もよく融合する廻轉橢圓體を指して云ふのである。茲にゼオイドといふのは平均海面をその一部分としてゐる所の地球の水準面即等ポテンシャル面の事であつて、之れは扁平廻轉橢圓體に極く近い形をしてゐる。地球上の色々の緯度に於ける重力の實測値を適當に處理してゼオイド面上の値に換算したものを多數綜合して獨逸のヘルメルト(Helmert)は地球橢圓體の面上に於ける重力の分布を與ふる式として一九〇一年に次の式を得た。

$$\gamma_0 = 978.046(1 + 0.005302 \sin^2 \beta - 0.0000072 \sin^2 \beta)$$

この式の割弧内の第三項を省略すればケプラーの重力分布式になる。第二項の係數 0.00830 は式を見れば直ちに分る様に極に於ける重力から赤道に於ける重力を差引いたものを後者で除したものがケプラーの定理の $\frac{2}{3}$ に等しいものであつて之は理論的に $\frac{5-m-e}{2} - \frac{17}{14} me = 0.008302$ なる關係を有してゐる。茲に m はケプラーの定理に於ける $\frac{2}{3}$ と同じものである。之の式も左邊の第三項を省略すればケプラーの定理になる。ヘルメルトは m の値として 0.0083077 を採用して右の式より橢圓率の値を 0.008307 と出した。右に示した重力分布式の第一因子即赤道重力の値はその後少し改正せられて 978.030 といふ値が採用せられる様になつた。この式によつて計算せらるゝ重力が地球上の所謂標準重力 (Normal values of gravity) と稱せらるゝものである。各地で實測せられたゼオイド面上の重力の強さとの標準重力との差は現今やかましく言はれてゐる地殻均衡問題で地殻の局所的性情の研究に向つて重要な手掛りとなつてゐるものである。次に色々の人々によつて求められた主な橢圓體の赤道半徑極半徑、平均半徑及橢圓率の値を列擧しよう。

橢圓體の名稱	年	赤道半徑 a	極半徑 b	平均半徑 $\frac{a+2b}{3}$	橢圓率 (扁平度) $\frac{a-b}{a}$
Bessel	1841	6377397.7m	6356079.7m	6370283.7m	1/299.15
Clarke	1866	6378206	6365584	6370990	1/295.0
Clarke	1880	6378249	6356515	6370996	1/295.47
Helmert	1907	6378200	6356818	6371064	1/298.35
Hefford	1908	6378388	6356909	6371220	1/297.0

最後のヘイフォードの橢圓體は茲には述べなかつたが垂直線偏倚 (地球橢圓體の面上に於て或點に於て垂直線と同じ點に於てゼオイド面に立てた垂線との間の角) の測定値を整理して導出されたものであつて之は特に地殻の均衡状態に對する補正を加へられてある故にこの點は現今の學說より見て最も適當なるものと思へるが、垂直線偏倚の觀測の場所が米國丈けに限られてある爲めに普れく地球全體にわたつて用ふるには不適當だといふ批難を受けてゐるものである。然しこの橢圓體は一九二四年の九月より十月にかけてスペインのマドリッドで開催せられた第二回萬國測地學及地球物理學總會の測地學分科會に於て色々討議研究せられた結果この橢圓體を今後地球の萬國的標準形として認むることになり、新しく測地事業を起す際等にはこの標準形を採用すべきことが協定せられた。この事に關しては地球第三卷第五號に掲載せられてある松山教授の右總會に關する報文、又は一九二四年の Nature No.2871, Vol. 114, p. 697 を一讀せられ度い。

最後にヤッセル橢圓體を用ひて計算せられた地球橢圓體の色々な要素を列擧すれば次の通りである。

- 赤道の周圍の長さ = 40,070.4浬
- 地球子午線の長さ = 40,003.4浬
- 地球子午線の一象限の長さ = 10,000.859米
- 赤道に於ける緯度一度の長さ = 111.307米
- 地球子午線一極 (89°-90°迄) = 111.680米
- 一度の長さ、中間 = 111.121米

(赤道(0°—1°25′) = 110,564米

地球橢圓體の { 全表面 = 509,950,714平方呎
全容積 = 1,082,841,300,000立方呎

猶地球の橢圓率は地球内部の密度分布とも密接な關係を持つてなつてこの方面の研究も重要視せられてゐる。又地球橢圓體を地軸のまはりの廻轉圓橢體であるとする代りに最も一般的なる三軸橢圓體としての研究もあるのであるが、これ等に關しては何れ改めて筆を執り度いと思ふ。

此の稿を起すに當り左の書物に色々頁ふ所が大であつた。

寺田廣彦：地球物理学

S. Günther: Handbuch der Geophysik Bd. I. 20 Aufl

M. P. Randzki: Physik der Erde

A. Prey, C. Mainka, E. Tams:

Einführung in die Geophysik

H. Wagner: Lehrbuch der Geographie I. Bd., I. Teil.

10. Aufl.

Th. Albrecht: Formeln und Hilfstafeln für

geographische Ortsbestimmungen 4. Aufl.

地理教材としての地形圖(第二十四)

熊野川沿岸地方と

紀州の東南海岸

陸地測量部二十萬分一地形圖田邊、同五萬分一地形圖十津川、新宮、那智、串本、地質調査所二十萬分一地質圖、那智圖幅、參照

紀伊の東南、熊野地方は、歴史的には神武天皇の御東征以來、鎌倉時代から南北朝にかけ、種々の事件の起つた處で、史的名勝が頗る多く地文的には橋杭岩、那智の瀑布、瀨八丁、湯之峰温泉等が著名で、又經濟的には山林に木材、

海に海産物の豊富を以て遠近に知られ、熊野炭田の無燐炭も、亦近畿地方中他に無い特産物である。斯く種々の點から頗る注意に値する地方なのは、實地は踏査した人の比較的少ないのは、其位置の僻遠と、交通の不便とに因るだらうと思はる。

陸路の交通は、大和の五條から山越わして十津川の上流に出で、川に沿ふて下るにしても、又西海岸の田邊町から周參見^{スサミ}に出て、海岸道路を辿るにしても、道路はあしく、山坂は多く、