岩石の歪に關するベッカーの理論の新解說

(昭和十八年四月一日受領)

槇　山　次　郎

岩石が變動により受ける無限小でない歪は G. E. Becker が早く論じてをり，また其により粘板岩の劈開と結晶片岩の片理の發起に就ての機制に一說を唱へてゐる。しかるに同じ頃 Van Hise の說を一般に地質學者は受け入れて誰もベッカー說を注意しなかつた。しかるに B. Sander が岩石結構の統計的硏究を多く仕上げてベッカー說の優れた點を認め，計らずも永年隱れてゐたのが學界に再識するに至つた。ベッカー說はあまりに數學的であるので米國地質家に嫌はれ，數十年後に樞軸國側の學者により世に出るやうになつたのは奇緣である。けれども其理論たゞ數式が煩しいばかりでなく文章も甚しく難解である。ザンダーの著書にある引用には誤植が少くないので一層難解である。ある紹介者はザンダーの Gefügekunde は先に第二部を讀めと奬めてゐるのも面白い。ベッカーの學說理論は今日の知識では不備な點もあり，また徒らに冗長なる所もある。そこで此處に是を全く書き改めて了解し易い形とすると共に新しい知識を加入せしめた。しかし菲才かへつて難解になつてしまつたかも知れない。兎に角此の一文はベッカーの紹介ではなく，私の硏究である事に於て御容しを願ひたい。

岩石の內部に發起する劈開，片理や或種の劊理や節理は剪斷面である。かゝる剪斷面に沿ひ兩側が差動するので屢々之を滑り面といふ。此面は通例壓力の方向に銳角をなし此壓力の爲に歪の楕圓體は益々扁平になるが，其延びる方向は壓力の方向に直角なる事は(稀有なる例外を別として)ない。此說では劈開が不均質な岩石に起り，原因である力に直角に生ずるといふ古い說に反對してゐる。さて剪斷面が最大剪斷應力の面と一致するとするのは無限小な彈性及び塑性歪に限るのであつて有限大なる塑性歪に於てはさうでない。また地質學的變形では彈性限界下の歪は無視して可なりである。無限小なる塑性變形では體積は不變であると Nadai はしてゐる。岩石の變形では體積の縮小する場合がある。粗成粒子間に空隙のある堆積岩は單なる壓緊でなくとも變形と共に體積が小に變化する事が可能である。岩石が上位の荷重により粒間の接迫するを壓緊といふので

ある。荷重以外の力が働くときも壓緊同様の結果は期待出來る。此と他の二三の例を度外視すると，最普通に生ずる變形は體積不變としても差支へない。

かゝる變形の中で最も單純なのは純粹剪斷と單一剪斷である。此二種に就てはベツカーは獨特の名稱を與へてゐるが此は採用しない方が一般には便利である。また此二種の剪斷は殆ど總ての構造地質學書に概要が出てゐる通りであり均等な歪であることは今改めて說明する必要はないと見ふ。しかるに實際はかゝる單純な歪は稀有であつて，普通には其組合が多いのである。次に地質學上の歪は二次元問題として取扱ふ事が出來るのが多い。以上のやうに限定すると大分樂に考へを進め得る。

純粹剪斷では主應力の方向と主歪の方向が一致する。岩石內に單位半徑の球を考へると三軸が $1+\varepsilon$, 1, $\frac{1}{1+\varepsilon}$ なる楕圓體になる。此處で $1+\varepsilon$ は最長軸であつて球の半徑が此方向で $1+\varepsilon$ の比だけ延びたことである。ベツカーは此比を α としてゐる。此は此後の運算に便利であるから使ふ事にする。楕圓體には圓である斷面が2の方向に平行に存在する。中心を通る圓斷面は半徑が最も大きく，中等軸を含んでゐて恰度1である。卽ち此斷面に於ては「歪」が少しもない。また此2面の間は歪の前後に於て距離が等しい。α が1より僅かに差ある時には剪斷面卽ち圓斷面が短軸と中軸との面のなす角は 45° より僅かに差あるのみである。岩石では最大主應力に約 40° で剪斷運動は開始し，局限は 90° であるべきだが厚さが0になり得る事は實在しない。純粹剪斷に於ける剪斷面の位置を計算して圖示するのは容易である。α が 4/3, 2, 4 等とすれば，剪斷面の角は 45° よりも段々に小さくなり，夫々約 37°, 27°, 14° 等になる。此角の正切は α の逆數である。45° を始めとし，終りの角との差角を夫々 R 及び r とすれば純粹剪斷では $R=r$ であつて對稱である。卽ち純粹剪斷は非廻轉性であり，對稱なる歪であると言ひ得る。

單一剪斷は廻轉性で非對稱なる歪の最も單純な場合である。岩石內部に正方體を考へ此に應力が作用しゐる時は3分力に歸するを得。其1は垂直で，他の2は偶力である。均合にあるならば此等の力は抵抗と均合つてゐる。垂直分力は體積變化と純粹剪斷を起す。偶力は剪斷運動を起し，通例單一剪斷といふ歪になる。勿論剪斷運動は歪其ものではないが共通性があるから混同しても差支へはない。單一剪斷はカルタの一重により說明し得る。カルタ各片相互の距離は不變であるが，此に直角な第3の面からの距離は相互間距離に比例して增大する。或點の座標を歪前に x, y, z, とし，歪後に x', y', z' とし q を常數とすれば $x=x'$, $y=y'$ $z=qz'$ は單一剪斷を示し，また $q=\tan\theta$ でも表し得る。此歪も體積は不變で，また歪楕圓體に圓斷面があり，其がやはり剪斷面になつてゐる。

純粹剪斷との差異は $r=0$ でRは r が失つた量を受け持つて大きくなつてゐる。流動の初まる時の最大剪斷應力の作用する面は互に 90° であるが，歪が大きくなると兩圓斷面間の角は 90° でなくなる。此角は歪楕圓の軸に關聯して決定出來る。即ち最小軸を正切とする角の2倍に當る。x軸に平行な線は長さの變化がない故此側の圓斷面は歪進行中此の方向に合致し $r=0$ である。單一剪斷と純粹剪斷とは終局の楕圓體は等しく變形の量も等しくあり得るが，圓斷面の片側の組は純粹剪斷の2倍の範圍だけ移動する。

單一剪斷も地質學的には普通ではない。先に記した如く宮城縣石卷附近三疊紀の粘板岩は單一剪斷に殆ど合致する變形をしてゐる特例である。單一剪斷では平滑な板狀劈開を生じ典型的な屋根石粘板岩を作る。

普通に見る變形は純粹と單一兩剪斷の組合である。此事はベツカーの說の中で最も重要な項であるとしなければならない。正方體に斜に力が働けば兩剪動が一緒に起る。例へば各個別の歪は延びる軸を 1.5 の比で增長するとすれば楕圓の長軸は2になり，OXに對して 13° の角をなし，最後の圓斷面角は 53° である。其一方は OX に略 13° 30′ で他は略 39° 30′ である。$r=3°\,27'$，$R=33°\,26'$ となる。即ちRは r の約10倍も廣い。此差の效果に就きベツカーが考ふる所說は粘性に關係してゐる。ベツカー說は野外觀察と机上理論に根據してゐるが今日ではザンダーや W. Schmidt の變動岩 (Tektonite) の結構 (Gefüge) の研究が進んだので變形機構は可なり明になつてゐる。此處では結構を說くのは目的でないから此に關係した事項は一々引用しない事にした。

ベツカーが歪の勢力が悉皆熱になり，熱の爲に二次鑛物が出來，岩石は結晶片岩となると見たので贊成し難い。エネルギーの殆ど全部が熱になるのは承認せざるを得ないが封壓の低い部分に於ての破碎變成作用になる碾碎岩 (Mylonit) は再結晶をしない。熱の爲に熔融して硝子質碾碎岩は出來る。結晶片岩は高封壓高熱下に於ける方向ある壓力，即ち或る主應力差より生ずる剪斷應力下に出來るものでなければならない。動力變成作用だけが今問題になる。勿論熱の影響を度外した動力熱變成は此內に入る。剪斷應力は最初最大主應力軸に 45° に最大であるが，既に滑り面を生じた上は最大剪斷應力面の角度が變つても，弱められた面に沿ふ差動が他の部分より起り易い。但し此は岩石が脆い場合で彈性限界と終局强度の差の小であるものに於てである。しかるに流動が逐次に新しい面に沿ひ起る，換言せば次第に最大剪斷應力面に沿ひ起る場合がまた考へ得る。實際上絕對に脆い物材はない。そこで地表近くでは上述の二極端の中間を行くやうな物が多い事が考へられる。破斷に及ばず破損が進行すれば岩石は若干の方向に劈け易くなり

共方向は大凡2の系になつてゐなければならない。總ての劈開は互に僅少な角度をなし結果は複雑な葉片構造になつてゐる。岩石は非常に鋭い斜方體に分割する。かゝる斜方形片は更に鋭い斜方に裂ける。

原因を除去しても殘る歪がある時は其物質は非彈性である。岩石は此適例である。非彈性は塑性と流性との合作である。そして岩石の全歪は其に彈性歪が加はるが現在の問題では度外視してよい。非彈性は或る限定した條件下では應力と時間の函數と認め得る。應力を σ とし時間を t とせば，非彈性歪は $\varepsilon'=f(\sigma t)$ であつて，

$$d\varepsilon'=\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}dt$$

である。此中前項は時間に關係がない。此を塑性歪とし，後項は時間に關係する流性歪である。流性の歪は時間と共に増大し，所謂匍匐の現象を呈するので岩石の粘性に依ると言ふ。Griggs は岩石は僞粘性で粘性ではないと主張するが此處では便宜上粘性としておく。ベッカーは時間に關係ない歪は全部彈性であるとしてゐるが塑性の概念を導入せずば岩石の變形は說明し盡し得ない。變形に對する全抵抗を R とし，塑性抵抗を Rp とし，粘性抵抗を Rv とせば， R＝Rp＋Rv と考へられる。地質學的な長い時間では Rv が消失するとベッカーは考へてゐる。そこで短時間一方にのみ剪斷し，長時間他の方向に剪斷するとせば前者は强く後者は弱いと考へを進めてゐる。單一剪斷では物體の薄い板狀部分が固定支持に平行して最大剪斷應力により相互の上を滑るやうに動き，長時間に力が此方向に働くならば粘性抵抗は感じないが，此に反して他の最大剪斷應力面では各の刹那に應力は新しい粗成部分に働いて全抵抗を受けるのである。横に滑るに充分な限界に達しても，他の傾いた面では此力はなほ不充分で滑らない。そこで一旦構造（變動結構）が出來ると一方的に進行するに終る。もし純粹剪斷が連合すれば r の楔形部內の線條は最大剪斷應力を R角內部の數倍多く受ける。此角の差は剪斷運動に必ず伴ふ。つまり單一剪斷の關聯する歪は非對稱である。

以上で書き改めたベッカーの學說の要領を述べ終つたので以下同じ理論を記し，もつと確固たる把握を得るやうに勉めてみる。外力が作用しても物體として運動せず變形する場合に限る事は豫め斷るまでもない。右手式の座標を選び「XY面上に平行なる面上に於てのみ物體內の點が動き，此面は常にXY面に平行なまゝで殘るとして，Z 軸に平行な變形は單に長さの上に止る」とベッカーは假定してゐる。此出發に於ける條件の與へ方が解り難い所であると思ふ。

$\overrightarrow{OA}$ なるヴエクトルにより表はし得る點Aがある。A點の座標を Ax, Ay, Azとする。

A點は均等な歪により移動してまづA′點に至る。A′よりさらにXY面に平行なる平面の上をBなる點に移つたとする。

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B} \qquad \text{である。}$$

此は $\overrightarrow{OB}=\mathbf{i}\,(Ax+A'x+B'x)+\mathbf{j}\,(Ay+A'y+B'y)+\mathbf{k}(Az+A'z+B'z)$

と表はし得る。

此處で $A_x=lA_x,\ A'_y=mA_y,\ A'_z=nA_z$

とし, $B'_x=qA_y,\ B'_y=pA_x,\ B'_z=0$

とおけば

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{i}\,[(1+l)A_x+qA_y]+\mathbf{j}\,[(1+m)A_y+pA_x]+\mathbf{k}[(1+n)A_z]$$

となる。此故に

$$\left.\begin{array}{l} B_x=(1+l)A_x+qA_y \\ B_y=(1+m)A_y+pA_x \\ B_z=(1+n)A_z \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

である。もし

$$|\overrightarrow{OA}|=1 \text{ とするならば } A^2_x+A^2_y+A^2_z=1$$

となる。即ち此は球面上の點を示す。此等が $B_x,\ B_y,\ B_z$ なる座標に移つた時は楕圓體上の點になることは容易に證明出來る。$1+l,\ 1+m,\ 1+n$ は以後の運算に多く出るから夫々 u, v, w と記號を簡略にする。 p, q, l, m, n は同一の歪に於ては定る。それで此を變形の係數と稱する。書き改めて

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{i}\,(uA_x+qA_y)+\mathbf{j}\,(vA_y+pA_x)+\mathbf{k}\,(wA_z)$$

A_x等を變數として本の球のXY斷面なる圓を示せば $A^2_x+A^2_y=1$ である。此に

$$A_x=\frac{vB_x-qB_y}{uv-pq},\quad A_y=\frac{uB_y-pB_x}{uv-pq}$$

を代入すれば，歪後の楕圓體のXY斷面になる。

$$(v^2+p^2)\,Bx^2-2(vq+up)\,B_xB_y+(u^2+q^2)\,B^2_y=(uv-pq)^2\cdots\cdots\cdots(2)$$

此式は楕圓を表はし，中心はO點に位置する。此楕圓の長軸は $vq+up$ が正なるならばOXと正の鋭角をなす。長軸の位置にある線條は變形前にもXY面上にありOを通りOXとμなる角をなす。

$$\tan\mu=\frac{A_y}{A_x}$$

但しA_x, A_yは此線條の端末が圓上にあつての座標である。またνを變形後に於ける長軸

の線條がOXとなす角とせば

（2）式より $\tan 2\nu = -2\dfrac{vq+up}{v^2+p^2-u^2-q^2}$ である。

此は二元二次方程式の表はす圓錐曲線にして中心がOにあるものつき角ν廻轉して xy項を無くする公式に依る。また

$$\tan\nu = \frac{B_y}{B_x} = \frac{pA_x + vA_y}{uA_x + qA_y} = \frac{p + v\tan\mu}{q\tan\mu + u} \qquad \text{であり，}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right) = \frac{p+v\tan\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)}{q\tan\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)+u} = \frac{p-v\cot\mu}{u-q\cot\mu} = -\cot\nu \qquad \text{である。}$$

$\tan\nu\ \cot\nu = 1$ なるを注意するならば，

$$\frac{p+v\tan\mu}{u+q\tan\mu} \times \frac{p-v\cot\mu}{u-q\cot\mu} = -1$$

此式より

$$\tan 2\mu = -2\frac{pv+qu}{q^2-p^2+v^2+u^2}$$

$\tan 2\nu$ の式と上の式とを連結して簡單な形にすると

$$\tan(\nu+\mu) = \frac{p+q}{u-v} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\tan(\nu-\mu) = \frac{p-q}{u+v} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$\nu-\mu$ は廻轉の角である。廻轉はZ軸を軸としてゐる。廻轉の無い條件は明かに $q=p$ である。歪が無限小ならば $p-q$ も微少であり $u+v$ は2に近接する。ν と μ も近い度となる。其窮局は $\tan(\nu+\mu)=\tan 2\nu$。となる。歪はかゝる狀態から發起して行く。廻轉が進めば物材内の新しい線條が逐次に軸の位置に入つて來て，歪なき全部中に全線條群が楔形をなして存在する。楔の角は $\dfrac{\nu-\mu}{2}$ である。

純粹剪斷はあり得べき簡單な歪で，體積は變化せずに，また廻轉がない。歪楕圓體の一軸は本の長さを保持する。本を單位球とすれば此は1である。卽ち軸は $\alpha, 1, \alpha^{-1}$ となつて來る。α を剪斷比と稱し $\alpha>1$ である。今長くなつた軸卽ち1が α になつた楕圓の軸がOXとなす角を θ とすれば此場合楕圓上長軸端末の點Bは，長軸を延長して斷面單位圓上の點Aが共軸線上を滑つて移動した點である。故に $\overrightarrow{OA}$ の方向餘弦は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ になる。B_x と B_y は夫々 $\alpha\cos\theta$, $\alpha\sin\theta$ である。また B_x と B_y は夫々 $u\cos\theta+q\sin\theta$ 及び $v\sin\theta+p\cos\theta$ である。また α 軸に直角にして XY 面にある α^{-1} 軸に就ても同樣に示すことが出來るので次の四の式が成立する。

$$u\cos\theta+q\sin\theta=\alpha\cos\theta$$

$$v \sin\theta + p\cos\theta = \alpha \sin\theta$$

$$-u\sin\theta + q\cos\theta = -\alpha^{-1}\sin\theta$$

$$v\cos\theta - p\sin\theta = \alpha^{-1}\cos\theta$$

此等より

$$u = \alpha\sin^2\theta + \alpha^{-1}\cos^2\theta$$

$$v = \alpha^{-1}\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta$$

と求める事が出來る。同様にして p, q も求め得，夫等は更に書き改めると

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\alpha^{-1}+\alpha}{2} - \frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\cos\theta \\ v &= \frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2} + \frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\cos\theta \\ p = q &= \frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

となる。此式は組合應力下に於ける任意の面に就ての垂直應力及び剪斷應力と主應力との關係式と同様な形である。そこでモールの應力圓圖に同様なる歪圓圖を作ることが出來る。

さて p=q であつて廻轉はない。また w= 1 であり，uv−pq= 1 である。$\tan(\nu+\mu) = \tan 2\nu = \tan 2\theta$ である。楕圓の軸は OXと θ 及び $\theta + \frac{\pi}{2}$ の角をなす。θ が 0 ならば楕圓の三軸は X, Y, Z 軸と合致する。$\alpha - \alpha^{-1}$ は剪斷の量である。長軸の延長は $\alpha - 1 = \varepsilon_1$ で短軸の短縮は $1 - \frac{1}{\alpha} = -\varepsilon_2$ である。$\alpha - \alpha^{-1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ となる。純粋剪斷が 2 あつて互に直角であれば共組合の結果出來る歪楕圓體は

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \alpha^2\beta^2 y^2 + \beta^2 z = r^2$$

で示し得べく，其軸は $r\alpha, \frac{r}{\alpha\beta}, r\beta$ である。此處に r は單位球の半徑が變化した長さで體積變化を表す比である。もし歪なく，體積だけ變化するならば單位球は半徑 r の球となる。此場合 p=q=o, u=v=w=r である。

單一剪斷では或る方向に平行なる面は變形しない。卽ち無限少な厚さの平行板は歪なしに殘るが相互に滑り動く。一方的な剪斷と共に歪剪圓體の軸は廻轉する。XY 斷面で歪ない面は OX 軸に平行だとすれば楕圓上の點の座標は

$$B_x = A_x - (\alpha - \alpha^{-1}) A_y, \quad B_y = A_y \qquad \text{である。}$$

廻轉は $\tan(\nu - \mu) = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2}$ である。$\tan 2\nu_0 = \tan(\nu+\mu) = \infty$ である。θ は始めにOYに平行であつた線の角で $\tan\theta = \alpha - \alpha^{-1} = q$

純粋剪断の組合せで第一延長軸がOXと45°をなし，第二の延長軸がOYに一致してゐる場合は一の簡單なる取扱をなし得るものであるが重要な意義がある。之は共通な歪平面上に2の剪断が起るものである。第一の剪断でA點がB點へ，第二でさらにC點へ移り，第一の剪断比をα_1とし，第二のをα_2とする。

$$\left.\begin{aligned} C_x &= B_x\,\alpha_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_1^{-1})}{2}A_x - \frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_1^{-1})}{2}A_y \\ C_y &= B_y\,\alpha_2^{-1} = \frac{(\alpha_1+\alpha_1^{-1})}{2\alpha_2}A_y - \frac{(\alpha_1-\alpha_1^{-1})}{2\alpha_2}A_x \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

さて此歪は非廻轉性の組合せであるが結果は p−q がoでないから廻轉を生じてゐる。此廻轉は $\tan(\nu-\mu)=\dfrac{(\alpha_1-\alpha_1^{-1})(\alpha_2-\alpha_2^{-1})}{(\alpha_1+\alpha_1^{-1})(\alpha_2+\alpha_2^{-1})}$ であつて，もし剪断が無限小ならば組合は非廻轉として差支へない。

さて地質學上最普通にあり得べき複合歪を論ずる前に變形中方向を變へない線を求める必要がある。OZ軸に平行な線はXY面に就て關係的方向を歪進行中保持する。可撓でない物體が廻轉を起す時に此等の線のみが其方向を保つのである。しかし歪があれば他に二種の線が本の方向を變へずに残る。χを歪前にXY面上にある線がOXとなす角とし，歪後にλになるとする。

$$\tan\lambda=\frac{B}{B_x}=\frac{p-v\tan\chi}{u+q\tan\chi}$$

方向を變へない線に就ては$\lambda=\chi$である。

$$\tan\chi=\frac{p-v\tan\chi}{u+q\tan\chi}$$

となり，之を解いて

$$\tan\chi=\frac{v-u}{2q}\pm\sqrt{\frac{p}{q}+\left(\frac{v-u}{2q}\right)^2}\cdots\cdots(7)$$

根號内の量が負でない限り，此は2の實線を示す。兩者は $4pq+(u-v)^2=0$ なる時に一致する。卽ち單一剪断ではその通りになるのである。

最普通にあり得べき歪も一定の軸に對稱に配置する簡單な體積變化のない歪の組合であると考へ得る。此歪は二次元問題として扱ひ得るもので一の平面では面積變化は起らないが，此に直角な剪断と面積變化が複合する。かくて廻轉する面には複雑な結果が生ずるが其他は割合に簡單である。此歪はOXに45°である純粋剪断，一の軸方向の純粋剪断及び單一剪断の3に解析する事が出來，方向不變の線は一の軸に合致する。此處で與へられた唯一の條件は $uv-pq=1$ である。かくある事がXY断面の歪楕圓が面積不變であるを表すからである。$-2pu\pm\sqrt{1+4p^2u^2}$ の負の値は正の逆數である。そこで正を

α_3^2 とすれば負の方は $-\alpha_3^{-2}$ となし得る。此より

$$-pu=\frac{(\alpha_3+\alpha_3^{-1})(\alpha_3-\alpha_3^{-1})}{4}$$ は容易に導ける。

此處で $\frac{\alpha_3+\alpha_3^{-1}}{2}=t,\ \frac{(\alpha_3-\alpha_3^{-1})}{2}=s$ とおき

$s/p=-\alpha_4$ とすれば $p=\frac{s}{\alpha_4}$, $u=t\alpha_4$ となる。また $\frac{\alpha_4 u-t}{2s}=s_o$ と呼べば $u=\frac{t+2s_0 s}{\alpha_4}$

先にあげた面積不變の條件式から

$$q=-\alpha_4(2s_0t+s)$$

A點が最後にD點に移つたとすれば

$$D_x=uA_x+qA_y=\alpha_4\left\{(A_x-2s_0A_y)t-sA_y\right\}$$

$$D_y=vA_y+pA_x=\frac{A_y t}{\alpha_4}-\frac{A_x-2s_0A_y}{\alpha_4}s$$

此は α_4 である剪斷比の純粹剪斷が主軸の方向に生じて他の複合歪と連合してゐるのを表はす，此複合歪による移動がC點に至るとせば

$$C_x=(A_x-2a_0A_y)t--A_y s$$

$$C_y=A_y t-(A_x-A_y 2s_0)s$$

此式に $x'=A_x-2s_0A_y$ に $y'=Ay$ を代行せしめれば OX に 45° なる純粹剪斷の式になる。

また最後に $x'=A_x-2s_o A_y,\ y'=Ay$ は單一剪斷である。此樣にして此歪は三者連合なるを解析し得た。もし $p=q$ とすると此歪は單純な純粹剪斷に歸する。$p/q=uv=\alpha_4^2$ とすれば二の純粹剪斷となり單一剪斷は消失する。しかし $p=o$ で $u/v=\alpha_4^2$ とすれば軸方向純粹剪斷と單一剪斷の連合になる。

u, v, p, q の數値を測り得る歪量及び ν と μ とから計算するには次の式が役立つ事もあり得る。

$$\left.\begin{aligned}
u&=\cos(\nu-\mu)+\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\cos(\nu+\mu)\\
v&=\cos(\nu-\mu)-\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\cos(\nu-\mu)\\
p&=\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\sin(\nu+\mu)+\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\sin(\nu-\mu)\\
q&=\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2}\sin(\nu+\mu)+\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\sin(\nu-\mu)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

次にベツカーは壓縮及び引張の歪に就て論じてゐるが此は必要でないから省略する。また三次元歪に就てはあまり多く論じてゐないので此も略す。

殘つた問題で最重要なのは最大切線歪面の決定である。純粹剪斷と單一剪斷では歪楕圓體の圓である斷面は歪のない面であり，此に平行に差動を生ずるものである事は先に述べた如くであるけれども，三次元の歪では此に相當する面が歪なしに殘り得ない。單純な方を主に論述する。歪楕圓體の圓である斷面は長軸と α を餘弦とする角をなしてゐる。此角を ω とすれば

$$\alpha-\alpha^{-1}=\cot\omega-\tan\omega=2\cot 2\omega=2\tan(90^\circ-2\omega)$$

である。此樣に $\alpha-\alpha^{-1}$ なる量は圓斷面の角 2ω が 90° よりの差に當る。歪が無限小ならば 2ω は直角になる。歪のない面上の各部分の本の位置は楕圓軸に一致する物體內の線條と關係があり，共は此場合は單に ω である。純粹剪斷の楕圓體の主軸が座標軸に一致する場合，卽ち軸方向の剪斷といふ場合には楕圓體は $\frac{B_x^2}{\alpha^2}+\alpha^2 B_y^2+B_z^2=1$ で本の球は $A_x^2+A_y^2+A_z^2=1$ であるから $\frac{A_y}{A_x}=\alpha^2\frac{B_y}{B_x}$ である。圓斷面の本の位置は $\alpha^2\tan\omega=\alpha=\tan(90^\circ-\omega)$ であつた。剪斷前に楕圓體の短軸となす角が歪後に長軸となす角と同じである。

歪なき面では切線歪が最大になる。OZを含む平面を考へ歪前に ox と角 φ をなし，歪後に φ' の角をなすとする。但し歪後も平面として殘てゐる場合に限る。$\tan\varphi=\alpha^2\tan\varphi'$ でまた $\tan(\varphi-\varphi')=\frac{(\alpha^2-1)\ \mathrm{an}\varphi}{\alpha^2+\tan\varphi}$ である。$\varphi-\varphi'$ が大きくなれば從つて切線歪は大きくなる。$\tan\varphi=\alpha$ または $\tan\varphi'=1/\alpha=\tan\omega$ なるとき此角と其正切とは最大である。卽ち歪なき圓斷面の平面は切線歪の最大なる平面である。軸では $\varphi-\varphi'=0$ で切線歪はない。

純粹剪斷及び其他の二次元問題として取扱ひ得る歪では歪の終末にも歪前と同じ寸法の平面がどの場合にも歪なしであるといふ事はない。歪楕圓體の圓斷面は歪前後では全く別の部分で成立してゐる。換言すれば此面はあくまで幾何學的な平面であつて，ある角度旋囘しながら物質が作つてゐる薄板を通過して行く。ある限界內に挾まれた楔形部分を幾何學平面は逐次に移つてゆく。また一方の圓斷面は他の一とは異る角度旋囘移動する。此が最初に述べたRとrである。そこで圓斷面の範圍を決定するのは最後に殘つた重要な題目である。歪の始まる時に歪の楕圓體の長軸はOXと ν_0 の角をなし，歪なき面は長軸と 45° をなしOX軸とは $\nu_0\pm45^\circ$ の角をなす，歪完了の時には長軸はOXと ν の角をなし，歪なき面は此軸と ω の角をなす。歪前に長軸になるべき線條はOXと μ の角

をなす。圓斷面が構成する部分は其時に μ と $90°-\omega$ の角をなす。此樣にして歪前物體にて圓斷面が將來旋回する筈の楔形部の角は $\nu_o \pm 45°$ と $\mu \pm (90°-\omega)$ である。短軸の一方で旋回が起れば此範圍にわたる。此側では

$$(\nu_o+45°)-\left\{\mu+90°-\omega\right\}=\omega-45°+\frac{\nu-\mu}{2}$$

また短軸に就て反對側では其範圍角が

$$\left\{\mu-(90°-\omega)\right\}-(\nu_o-45°)=\omega-45°-\frac{\nu-\mu}{2}$$

さて此兩範圍角の差は恰度 $\nu-\mu$ 即ち廻轉角になる。歪が廻轉性であれば必ず差がある筈である。純粹剪斷では其差がない。單一剪斷では $2(\omega-45°)=\nu-\mu$ である。範圍角は廻轉のある側で o になり，同一の線條が最大切線歪面に常に露出する。他の側では圓斷面は充分に大きく旋回する。二次元歪のいかなる場合にも此範圍の差は廻轉角から直ちに知り得る。また ω の値は變形の係數により示し得る。

$$1/a^2=\tan^2\omega=\frac{\text{短軸}}{\text{長軸}}$$

$$\tan^2\omega=4\frac{\mathrm{uv}-\mathrm{pq}}{(\mathrm{u}-\mathrm{v})^2+(\mathrm{p}+\mathrm{q})^2}$$

歪なき平面はただ切線應力(剪斷應力)を受けてゐて延びもせず離れもしない。最大切線應力の面は最大切線歪の面とは一致しない。組合應力下に於ける物體內のある面に就ての剪斷應力と垂直應力を求める式は普通の材料力學書に出てゐるから此處では一切省略する。此面が主應力軸に 45° に傾くもので剪斷應力が最大になる事も周知である。しかし最大の切線歪が 45° にありとするのは不可である。何となればなほ垂直應力があるからである。最大切線歪は OX と正切が $1/a$ なる角をなし，其垂線は a を正切とする角をなす。

以上で此解說を終る。地質構造を岩石結構を硏究するに少しでも參考になれば幸甚である。

參 考 文 書

Becker, G. F.: Finite homogeneous strain, flow and rupture of rocks. Bull. Geol. Soc. Am. Vol. 4, 1893.
Becker, G. F.: Schistosity and Slaty Cleavage. Jour. Geol. Vol. 4, p. 429, 1896.
Sander, B.: Gefügekunde der Gesteine, 1930.