RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B25 (2011), 161–183

2 次元クリスタリン表現の Zariski 稠密性 (Zariski density of two dimensional crystalline representations)

By

中村　健太郎 (Kentaro Nakamura) *

Abstract

In this article, we explain some results on B-pairs and on deformation theory of trianguline representations for any p-adic field. As an application, we explain the proof of the theorem concerning Zariski density of two dimensional crystalline representations for any p-adic field.

§ 1. Trianguline 表現 ([Co08], [Na09])

p を素数, K を p-進体, つまり $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. $\overline{K}$ を K の代数閉包, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を K の絶対 Galois 群とする.

Trianguline 表現とは, p-進体の p-進 Galois 表現のクラスである. このクラスは, 近年の Colmez ([Co10]) による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する p-進局所 Langlands 対応 ($G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 p-進表現と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進的な表現との対応) の一連の研究の中で定義され, 彼の p-進局所 Langlands 対応の研究において最も重要な役割を果たしている表現のクラスである. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進局所 Langlands 対応では $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 trianguline 表現は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進的な主系列表現と対応することが知られている. このクラスは, p-進 Galois 表現全体の中で, ある意味で離散的にしか存在しないクリスタリン表現を p-進的に補間するようなクラスであり, p-進表現の変形空間に付随するリジッド解析的多様体の中で著しい幾何的な性質を持っていることが Colmez ([Co08]), Kisin ([Ki03], [Ki10]), Bellaïche-Chenevier ([Bel-Ch09], [Ch09]) らの近年の研究により認識され始めてきている. これらの性質は, $\mathbb{Q}$ 上の楕円保型形式が肥田族や Coleman 族などの p-進保型形式によって p-進連続的に

Received March 31, 2010. Revised October 26, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 11F80 (primary), 11F85, 11S25 (secondary)
Key Words: p-adic Hodge theory, trianguline representations, B-pairs.
Supported by JSPS Core-to-Core program 18005 and by KAKENHI (21674001).
*慶應義塾大学理工学部数理科学科 (Department of Mathematics, Science and Technology, Keio University).
e-mail: kentaro@math.keio.ac.jp

補間されているという事実と密接に関係しているということも近年の Kisin, Bellaïche-Chenevier らの研究により認識され始めてきている．実際に, Kisin ([Ki03]) は Coleman 族に含まれる p-進保型形式に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の二次元 p-進 Galois 表現の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限 が (一般には de Rham 表現ではないが) trianguline 表現であることを証明している．なお, trianguline 表現及びそれに関連した整数論的問題のこれらの研究は現在までのところ, p-進体が $\mathbb{Q}_p$ の場合に限られている, ということに注意しておく．

このような状況の中で, 筆者のこれまでの研究の目的は, これらの trianguline 表現及びその周辺の理論を, $\mathbb{Q}_p$ の場合から一般の p-進体の任意次元の p-進表現の場合へ一般化することであった．本稿では, これまでに筆者が得た, 一般の p-進体に対する trianguline 表現に関する研究結果を解説したい．まず第一章で, trianguline 表現の定義と p-進 Galois 表現論的な基本性質を解説し ([Co08], [Na09]), 次に第二章で trianguline 表現の変形理論 ([Bel-Ch09], [Ch09], [Na10]) について解説する．第三章では二次元 trianguline 表現の族を構成し, この族の様々な幾何的な性質が trianguline 表現の変形理論により記述できることを解説する ([Ki03], [Na10])．最後の第 4 章で, これらの理論の一つの応用として, 二次元クリスタリン表現の Zariski 稠密性の定理 ([Co08], [Ki10], [Na10]) が得られることを述べる．

本稿では, p-進 Galois 表現は次のようにして係数を決めて考えることにする．以下, E を K の有限次拡大で K の $\overline{K}$ への $\mathbb{Q}_p$-代数としての全ての埋め込みが E を経由するようなものとする．

Definition 1.1. V が G_K の E-表現であるとは, V は有限次元 E-ベクトル空間で G_K が連続 E-線形に作用しているもの, と定義する．以下, K は固定するので, 単に E-表現と呼ぶことにする．

trianguline 表現は, G_K の p-進表現の圏を自然に含む, より大きな圏 (B-ペアと呼ばれる) を用いて定義される．そこでまずは B-ペアの定義 ([Be08]) を解説したい．B_{cris}, B_{dR}, B^+_{dR} を Fontaine ([Fo94]) の p-進周期環とし, $B_e := B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ と定義する．これらの環にはそれぞれ自然な位相が入っており, その位相に関して G_K が連続に作用している．

Definition 1.2. ([Be08],[Na09]) 次の条件を満たすペア $W = (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ を E-B-ペアであると定義する．

(1) W_e は有限自由 $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群で G_K が連続半線形に作用している (ここで, 半線形とは任意の $g \in G_K, a \in B_e, b \in E, x \in W_e$ に対して $g((a \otimes b)x) = (ga \otimes b)g(x)$ と作用することを意味する)．

(2) W^+_{dR} は $W_{\mathrm{dR}} := B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_e} W_e$ の G_K-作用で閉じている有限生成部分 $B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群で B_{dR}-加群として W_{dR} を生成する．

W の次元を

$$\dim(W) := \mathrm{rank}_{B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}(W_e)$$

($B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群としての W_e のランク）と定義する．

p-進表現は次で定義される関手により B-ペアの圏の充満忠実な部分圏になる.

Definition 1.3. 関手 $D : \{E$-表現の圏$\} \to \{E$-B-ペアの圏$\}$ を

$$W(V) := (B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

と定める.

Remark. Bloch-加藤の基本短完全列

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_e \oplus B^+_{\mathrm{dR}} \to B_{\mathrm{dR}} \to 0$$

より, この関手は充満忠実になる.

Remark. Berger ([Be08]) は, B-ペアの圏と Robba 環 $B^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ, Γ)-加群の圏同値を構成し, これが, p-進表現の圏と B_K 上のエタール (φ, Γ)-加群の圏との圏同値 (Fontaine の定理) の一般化になっていることを示した. $K = \mathbb{Q}_p$ の場合, Colmez ([Co08]) は B-ペアではなく Robba 環 $B^{\dagger}_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}$ 上の (φ, Γ)-加群を用いて trianguline 表現を研究している ($K = \mathbb{Q}_p$ の場合は例外的に $B^{\dagger}_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}$ 及びそれへの (φ, Γ)-作用が非常に明示的に書ける).

p-進 Galois 表現に対して定義された様々な概念を, 以下のようにして B-ペアに対しても同様に定義することができる. L を K の有限次ガロア拡大体とする. E-B-ペア $W = (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ に対して,

$$D^L_{\mathrm{cris}}(W) := (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{B_e} W_e)^{G_L},\ D^L_{\mathrm{dR}}(W) := (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_e} W_e)^{G_L}$$

と定義する. $D^L_{\mathrm{cris}}(W)$ には B_{cris} の Frobenius から自然に Frobenius 作用 $\varphi : D^L_{\mathrm{cris}}(W) \xrightarrow{\sim} D^L_{\mathrm{cris}}(W)$ が誘導される. L_0 を $\mathbb{Q}_p$ の L 内での最大不分岐拡大とすると, 自然な単射 $L \otimes_{L_0} D^L_{\mathrm{cris}}(W) \hookrightarrow D^L_{\mathrm{dR}}(W)$ が存在する. $D^L_{\mathrm{dR}}(W)$ には減少フィルトレイションが, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathrm{Fil}^i D^L_{\mathrm{dR}}(W) := D^L_{\mathrm{dR}}(W) \cap t^i W^+_{\mathrm{dR}}$$

と定義される. これらには, $\mathrm{Gal}(L/K)$ が自然に作用している.

Definition 1.4.

(1) W がクリスタリンであるとは, 等式

$$\dim_{K_0} D^K_{\mathrm{cris}}(W) = [E : \mathbb{Q}_p] \dim(W)$$

を満たすことと定義する.

(2) W が de Rham であるとは, 等式

$$\dim_K D^K_{\mathrm{dR}}(W) = [E : \mathbb{Q}_p] \dim(W)$$

を満たすことと定義する.

(3) W が潜在的クリスタリンであるとは, K の有限次ガロア拡大 L が存在して, $W|_{G_L}$ がクリスタリンとなることと定義する.

Definition 1.5. L を K の有限次ガロア拡大とする. 有限自由 $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群 D が次の構造を持つとき, D を E-フィルトレイション付き $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群であると定義する.

(1) D は Frobenius 半線形な同型 $\varphi_D : D \xrightarrow{\sim} D$, つまり任意の $a \in L_0$, $b \in E$, $x \in D$ に対して, $\varphi_D((a \otimes b)x) = (\varphi(a) \otimes b)\varphi_D(x)$ を満たす同型 φ_D を持つ.

(2) $D_L := L \otimes_{L_0} D$ は部分 $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群による減少フィルトレイション $\{\mathrm{Fil}^i D_L\}_{i \in \mathbb{Z}}$ で, 十分大きな i に対して $\mathrm{Fil}^i D_L = 0$, $\mathrm{Fil}^{-i} D_L = D_L$ を満たすものを持つ.

(3) D は, φ_D と可換で $\mathrm{Fil}^i D_L$ を保つ $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 半線形な $\mathrm{Gal}(L/K)$-作用を持つ.

W を $W|_{G_L}$ がクリスタリンとなる潜在的クリスタリン E-B-ペアとすると, 自然な単射 $L \otimes_{L_0} D^L_{\mathrm{cris}}(W) \xrightarrow{\sim} D^L_{\mathrm{dR}}(W)$ は同型となり, これにより $D^L_{\mathrm{cris}}(W)$ には E-フィルトレイション付き $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群の構造が入る.

Proposition 1.6. 関手 D^L_{cris} は, $W|_{G_L}$ がクリスタリンとなる潜在的 E-B-ペアの圏と E-フィルトレイション付き $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群の圏との完全圏としての圏同値を与える.

次に, B-ペアの Sen の理論について簡単に復習する. $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ を p-進円分指標とし, $H_K := \mathrm{Ker}(\chi)$, $\Gamma_K := G_K/H_K$ とし, $K_\infty := \cup_{n \geq 1} K(\zeta_{p^n})$ とする.

E-B-ペア $W = (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ に対して, $D_{\mathrm{Sen}}(W)$ を, $(W^+_{\mathrm{dR}}/tW^+_{\mathrm{dR}})^{H_K}$ の Γ_K 作用で保たれる最大の有限次 K_∞-ベクトル空間と定義する. Sen の $\mathbb{C}_p$-表現の理論により, $D_{\mathrm{Sen}}(W)$ はランク $\dim(W)$ の自由 $K_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群となる. さらに, $\nabla : D_{\mathrm{Sen}}(W) \to D_{\mathrm{Sen}}(W)$ を

$$\nabla(x) := \lim_{\gamma \to 1} \frac{1}{\log \chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\gamma - 1)^n}{n}(x)$$

と定義する (ここで極限　$\gamma \to 1$ は $\gamma \in \Gamma_K$ を $\gamma \neq 1$ とならないように 1 に近づける極限とする) と, ∇ の特性多項式 $P_W(X) := \det(X \cdot \mathrm{id} - \nabla) \in K_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} E[X]$ は $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E[X]$ に含まれる $\dim(W)$ 次の多項式であることが証明できる. $\mathcal{P}$ を K から E への埋め込み全体の集合とし, $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して, σ-成分への射影 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \to E : a \otimes b \mapsto \sigma(a)b$ で定まる $P_W(X)$ の σ-成分を $P_{W,\sigma}(X)$ とする. 以上の下で, 重複度も込めた $P_{W,\sigma}(X)$ たちの根の集合 $\{\alpha_{1,\sigma}, \alpha_{2,\sigma}, \cdots, \alpha_{n,\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{P}}$ のことを W の一般化 Hodge-Tate 重みと定義する.

以上の定義の下で, trianguline 表現, より一般に trianguline B-ペアを次のようにして定義する.

Definition 1.7. ([Co08], [Na09])

(1) $W=(W_e, W_{\mathrm{dR}}^+)$ を n 次元 E-B-ペアとする. W が split trianguline E-B-ペアであるとは, 部分 E-B-ペアによるフィルトレイション

$$\mathcal{T}: 0=W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n = W$$

で任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対し商 E-B-ペア W_i/W_{i-1} が存在し, かつそれらが一次元になっているようなもの, と定義する (W のフィルトレイション $\mathcal{T}$ のことを W の三角化と呼ぶことにする).

(2) n 次元 E-表現 V が split trianguline であるとは, $W(V)$ が split trianguline E-B-ペアとなるもの, と定義する.

(3) E-B-ペア W（または E-表現 V）が trianguline であるとは E の有限次拡大 E' があり $W \otimes_E E'$ （または $V \otimes_E E'$) が split trianguline となるもの, と定義する.

Remark. E-B-ペアの圏は Abel 圏ではないため, 部分 E-B-ペア $W_1 \subseteq W_2$ に対してその商 W_2/W_1 が存在するとは限らない. E-B-ペアとしての商 W_2/W_1 が存在するとき W_1 は W_2 の中で saturated であるという.

Remark. 定義により, 例えば V が二次元で可約な E-表現ならば $W(V)$ も当然可約となり $W(V)$ は split trianguline になる. しかし, 重要な注意として, E-表現としては絶対既約でも trianguline 表現になるような E-表現は非常に多く存在する. 例えば, 全ての n-次元準安定表現は trianguline 表現であることが証明できる. これより, 例えば二次元のクリスタリン表現 V は（係数を拡大すると) $W(V)$ が可約になるため B-ペアの圏の中では一次元の B-ペアの拡大となる. この事実を用いて, 例えば p で超特異還元を持つ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線などに対する岩澤理論的な研究に trianguline 表現の理論及び B-ペアの理論を応用することは興味深い問題であると思われる. さらに, もう一つ重要な注意として, de Rham 表現ではないような trianguline 表現も非常に多く存在し, しかも族を考える上では de Rham ではない trianguline 表現も本質的に重要な役割を果たす. このような表現はもはや Fontaine の p-進周期環 ($B_{\mathrm{cris}}, B_{\mathrm{st}}, B_{\mathrm{dR}}$) や通常の代数幾何（エタールコホモロジー）では捉えることのできない対象であり, p 進 Galois 表現論的にも興味深い新しい研究対象であると思われる. de Rham ではない trianguline 表現の興味深い例として, 有限スロープを持つ過収束楕円保型形式に付随する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 p-進 Galois 表現 (Coleman-Mazur eigencurve によりパラメトライズされる p-進 Galois 表現) は trianguline 表現であることが証明されている ([Ki03]).

上の定義により, trianguline 表現を調べるためには, まずは一次元の E-B-ペアを分類すること, 次いでそれらの拡大類を計算することが重要になる.

$\delta : K^\times \to E^\times$ を連続準同型とする. π_K を K の素元とする. このとき, 一次元クリスタリン E-B-ペア

$$W_0 := (W_{0,e}, W_{0,\mathrm{dR}}^+)$$

を

$$D^K_{\mathrm{cris}}(W_0) \xrightarrow{\sim} K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee,\ \varphi^f(e) = \delta(\pi_K)e,$$
$$\mathrm{Fil}^0(K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(W_0)) := K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(W_0),$$
$$\mathrm{Fil}^1(K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(W_0)) := 0$$

となる唯一のものと定義する (このような W_0 の存在と一意性は, Proposition1.6 から分かる). 次に, 連続指標

$$\tilde{\delta}_0 : G_K \to E^\times$$

を局所類体論によりユニタリー連続準同型

$$\delta_0 : K^\times \to \mathcal{O}_E^\times,\ \delta_0(\pi_K) := 1,\ \delta_0|_{\mathcal{O}_K^\times} := \delta|_{\mathcal{O}_K^\times}$$

に対応する唯一のものとする. $W(E(\tilde{\delta}_0))$ を $\tilde{\delta}_0$ に対応する G_K の一次元 E-表現 $E(\tilde{\delta}_0)$ に対応する一次元 E-B-ペアとする. 最後に

$$W(\delta) := W_0 \otimes W(E(\tilde{\delta}_0))$$

と定義する. このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 1.8. ([Co08], [Na09])

(1) $W(\delta)$ は素元 π_K の取り方によらない.

(2) 任意の一次元 E-B-ペア W に対して連続準同型 $\delta : K^\times \to E^\times$ で $W \xrightarrow{\sim} W(\delta)$ となるものが唯一つ存在する.

(3) $\delta : K^\times \to \mathcal{O}_E^\times$ をユニタリーな連続準同型とし, $\tilde{\delta} : G_K \to \mathcal{O}_E^\times$ を局所類体論で δ に対応する連続指標とすると同型 $W(\delta) \xrightarrow{\sim} W(E(\tilde{\delta}))$ が成り立つ.

(4) 任意の連続準同型 $\delta_1, \delta_2 : K^\times \to E^\times$ に対して同型 $W(\delta_1) \otimes W(\delta_2) \xrightarrow{\sim} W(\delta_1\delta_2)$, $W(\delta_1^{-1}) \xrightarrow{\sim} W(\delta_1)^\vee$ が成り立つ (ここで E-B-ペア W に対してその E-双対を $W^\vee$ と表す).

Definition 1.9. $\{k_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{P}} \in \prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}$ (ここで, $\mathcal{P} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, E) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{K})$($\mathbb{Q}_p$-代数の射の集合) とする) に対して, 連続準同型

$$\prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \sigma^{k_\sigma} : K^\times \to E^\times : x \mapsto \prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \sigma(x)^{k_\sigma}$$

と定める.

$$|N_{K/\mathbb{Q}_p}| : K^\times \to \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$$

をノルム $N_{K/\mathbb{Q}_p} : K^\times \to \mathbb{Q}_p^\times$ と p-進絶対値 $|-| : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times : p \mapsto p^{-1}, a \in \mathbb{Z}_p^\times \mapsto 1$ の合成とする.

Lemma 1.10.

(1) 任意の $\{k_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{P}} \in \prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}$ に対し, 同型
$$W(\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}) \xrightarrow{\sim} (B_e\otimes_{\mathbb{Q}_p}E, \oplus_{\sigma\in\mathcal{P}}t^{k_\sigma}B_{\mathrm{dR}}^{+}\otimes_{K,\sigma}E)$$
が成り立つ.

(2) 同型
$$W(|N_{K/\mathbb{Q}_p}|\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma) = W(E(\chi))$$
が成り立つ (ここで $\chi : G_K \to E^\times$ は p -進円分指標).

次に一次元の E -B -ペアによる拡大を調べるために E -B -ペアに対して Galois コホモロジーを定義する. E -B -ペア $W=(W_e, W_{\mathrm{dR}}^{+})$ に対して $W_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}\otimes_{B_e}W_e$ と書く. 連続 G_K -加群の複体を
$$C^\bullet(W) := \{W_e\oplus W_{\mathrm{dR}}^{+}\to W_{\mathrm{dR}}\}$$
と定義する (ここで, $W_e\oplus W_{\mathrm{dR}}^{+}\to W_{\mathrm{dR}} : (x,y)\mapsto x-y$ と定め $W_e\oplus W_{\mathrm{dR}}^{+}$ が 0 番目, W_{dR} が 1 番目の項となるように番号付ける). この複体の写像錐による連続 G_K -加群のコホモロジーを
$$\mathrm{H}^i(G_K, W) := \mathrm{H}^i(G_K, C^\bullet(W))$$
と表し, W の Galois コホモロジーと呼ぶことにする. 定義により, E -ベクトル空間の自然な完全列
$$0\to \mathrm{H}^0(G_K,W)\to \mathrm{H}^0(G_K,W_e)\oplus\mathrm{H}^0(G_K,W_{\mathrm{dR}}^{+})\to\mathrm{H}^0(G_K,W_{\mathrm{dR}})$$
$$\to \mathrm{H}^1(G_K,W)\to \mathrm{H}^1(G_K,W_e)\oplus\mathrm{H}^1(G_K,W_{\mathrm{dR}}^{+})\to\cdots$$
が存在する. このことと定義などから次が成り立つ.

Lemma 1.11.

(1) G_K の E -表現 V に対して自然な同型
$$\mathrm{H}^i(G_K, V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(G_K, W(V))$$
が成り立つ.

(2) $\mathrm{H}^0(G_K,W) = (W_e\cap W_{\mathrm{dR}}^{+})^{G_K}$.

(3) E -ベクトル空間の自然な同型
$$\mathrm{H}^1(G_K,W)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1(B_E, W)$$
が成り立つ (ここで, $B_E := (B_e\otimes_{\mathbb{Q}_p}E, B_{\mathrm{dR}}^{+}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$ は自明な一次元 E -B -ペア, $\mathrm{Ext}^1(B_E,W)$ は W の B_E による E -B -ペアとしての拡大の同型類のなす E -ベクトル空間とする).

このGalois コホモロジーに対して Euler-Poincaré 標数公式, Tate の双対定理が成立することが Liu ([Li08]) により Robba 環上の (φ,Γ)-加群を用いて示されている.

Theorem 1.12. ([Li08])

(1) $\mathrm{H}^i(G_K,W)$ は有限次元 E-ベクトル空間で $i\neq 0,1,2$ のとき $\mathrm{H}^i(G_K,W)=0$ となる.

(2) 等式

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\dim_E\mathrm{H}^i(G_K,W)=[K:\mathbb{Q}_p]\dim(W)$$

が成り立つ.

(3) 完全ペアリング

$$\mathrm{H}^i(G_K,W)\times\mathrm{H}^{2-i}(G_K,W^\vee\otimes W(E(\chi)))\to E$$

が存在する.

これらの公式を用いることで, $W(\delta)$ のコホモロジーに関する次の次元公式を得る.

Proposition 1.13.

(1) $\delta=\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma\in\mathcal{P}$ に対し $k_\sigma\in\mathbb{Z}_{\leqq 0}$) のとき $\mathrm{H}^0(G_K,W(\delta))\xrightarrow{\sim}E$, それ以外の場合 $\mathrm{H}^0(G_K,W(\delta))=0$.

(2) $\delta=|N_{K/\mathbb{Q}_p}|\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma\in\mathcal{P}$ に対し $k_\sigma\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$) のとき $\mathrm{H}^2(G_K,W(\delta))\xrightarrow{\sim}E$, それ以外の場合 $\mathrm{H}^2(G_K,W(\delta))=0$.

(3) $\delta=\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma\in\mathcal{P}$ に対し $k_\sigma\in\mathbb{Z}_{\leqq 0}$) または $\delta=|N_{K/\mathbb{Q}_p}|\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma\in\mathcal{P}$ に対し $k_\sigma\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$) のとき $\dim_E\mathrm{H}^1(G_K,W(\delta))=[K:\mathbb{Q}_p]+1$, それ以外の場合 $\dim_E\mathrm{H}^1(G_K,W(\delta))=[K:\mathbb{Q}_p]$ が成り立つ.

Proof. 上の定理と Lemma 1.10 (2) より, (1) が証明出来ればよい. (1) は Lemma 1.10 (1) と環 $B_e\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ が Bézout 環であるという事実から従う. □

§2. Trianguline 表現の変形理論 ([Bel-Ch09], [Ch09], [Na10])

この章では, trianguline 表現の変形理論について解説する. 次の章で trianguline 表現の p-進的な族をリジッド解析的多様体として構成するが, この多様体の局所的な構造が trianguline 表現の変形理論によって記述出来る. クリスタリン表現の Zariski 稠密性の証明においては, クリスタリン表現 V_x に対応する点 x を通る trianguline 表現の族を出来るだけ多く見つける必要がある. これは後に見るように $D^K_{\mathrm{cris}}(V_x)$ の相対的 Frobenius の固

有値の順序付けと対応して存在していることが分かる．このようにして一点を通る多くの族を見つけたら, 最後に最も重要なステップとして, これらの族を全部集めると変形空間全体を張ることを示す必要がある．この最後のステップを保証するのが, 本章の主定理である trianguline 変形の接空間に関する定理である．以下, このような背景を頭に入れつつ, trianguline 表現, より一般に trianguline B-ペアの変形理論について解説していきたい.

まず, $\mathcal{C}_E$ を Artin 局所環で剰余体が E となるようなもののなす圏とする (このような環は自然に E-代数の構造が入る．射は E-代数としての局所射とする)．ここでいう trianguline 表現の変形理論とは, trianguline 表現を $A(\in \mathcal{C}_E)$-係数の表現に変形することを意味する．そこで, まずは E-係数の場合の一般化として, A-係数の p-進 Galois 表現及び A-係数の B-ペアを次のようにして定義する.

Definition 2.1. $A \in \mathcal{C}_E$ とする.

(1) V が G_K の A-表現であるとは V は有限自由 A-加群で G_K が連続 A-線形に作用しているものする.

(2) $W := (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ が A-B-ペアであるとは, W_e が有限自由 $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-加群で G_K が連続半線形に作用し, W^+_{dR} は $W_{\mathrm{dR}} := B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} W_e$ の G_K-作用で閉じている有限自由部分 $B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-加群で B_{dR}-加群として W_{dR} を生成するものとする.

Remark. 関手 $V \mapsto W(V)$ により, A-表現の圏は A-B-ペアの圏の充満忠実な部分圏となる．$\mathcal{C}_E$ の任意の射 $A \to A'$, A-B-ペア W_A に対して $W_A \otimes_A A' := (W_e \otimes_A A', W^+_{\mathrm{dR}} \otimes_A A')$ は A'-B-ペアになる.

Definition 2.2.

(1) V を E-表現とする．A-表現 V_A と E-表現の同型 $\psi : V_A \otimes_A E \xrightarrow{\sim} V$ からなる組 (V_A, ψ) を, V の A 上の変形と定義する.

(2) W を E-B-ペアとする．A-B-ペア W_A と E-B-ペアの同型 $\psi : W_A \otimes_A E \xrightarrow{\sim} W$ からなる組 (W_A, ψ) を, W の A 上の変形と定義する.

(3) 二つの A 上の V の変形 (V_A, ψ), (V'_A, ψ') が同値であるとは A-表現としての同型 $f : V_A \xrightarrow{\sim} V'_A$ で $\bar{f} \circ \psi' = \psi$ となる f が存在することとする (ここで $\bar{f}$ は $f \otimes \mathrm{id}_E$ とする)．A-B-ペアの変形の同値も同様に定義する.

Definition 2.3.

(1) V を E-表現とする. $\mathcal{C}_E$ から集合の圏 $Sets$ への共変関手

$$D_V : \mathcal{C}_E \to Sets : A \mapsto D_V(A) := \{V \text{ の } A \text{ 上の変形の同値類}\}$$

を V の変形関手と呼ぶ.

(2) W を E-B-ペアとする. 共変関手

$$D_W : \mathcal{C}_E \to Sets : A \mapsto D_W(A) := \{W \text{ の } A \text{ 上の変形の同値類 }\}$$

を W の変形関手と呼ぶ.

Lemma 2.4. E-表現 V に対し, D_V から $D_{W(V)}$ への自然な射

$$D_A(A) \to D_{W(V)}(A) : (V_A, \psi) \mapsto (W(V_A), W(\psi))$$

は関手の同型を与える.

Proof. これは, 関手 $V \mapsto W(V)$ が充満忠実であることと, E-B-ペアの完全列 $0 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to 0$ に対して $W_1 = W(V_1), W_3 = W(V_3)$ ならば, E-表現 V_2 で $W_2 \overset{\sim}{\to} W(V_2)$ となるものが存在する, という B-ペアの (より正確には Kedlaya による Robba 環上の φ-加群のスロープに関する）一般論から従う. □

この補題により, D_V を考えることと $D_{W(V)}$ を考えることは等しくなるので, 以下では E-B-ペアの変形 D_W のみを考えることにする.

まず, 通常の p-進表現及び法 p-表現の場合 ([Ma97]) と同様にして, D_W の基本的な性質について次の命題 ([Na10]) を証明することができる. E-B-ペア W に対して

$$\mathrm{ad}(W) := W \otimes W^{\vee}$$

とし,

$$E[\varepsilon] := E[X]/(X^2)$$

と定義する.

Proposition 2.5.

(1) $D_W(E[\varepsilon])$ は自然に E-ベクトル空間の構造を持ち, E-ベクトル空間の自然な同型

$$D_W(E[\varepsilon]) \overset{\sim}{\to} \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{ad}(W))$$

が存在する.

(2) $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(W)) = E$ のとき, D_W は E 上の完備 Noether 局所環で剰余体が E となる環 R_W によって (pro-) 表現される.

(3) $\mathrm{H}^2(G_K, \mathrm{ad}(W)) = 0$ のとき, 関手 D_W は形式的滑らかになる.

この命題の系として, 特に次が得られる.

Corollary 2.6. $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(W)) = E$ かつ $\mathrm{H}^2(G_K, \mathrm{ad}(W)) = 0$ のとき, D_W は E 上の $d_W := (\dim(W))^2 + 1$ 変数の形式的ベキ級数環 $E[[T_1, \cdots, T_{d_W}]]$ によって (pro-) 表現される.

次に split trianguline E-B-ペア W に対して, D_W の部分変形として trianguline 変形関手を定義したい ([Bel-Ch09],[Na10]). この関手及びこの関手と D_W との関係を調べることが応用で最も重要になる. W を split trianguline E-B-ペアで $\mathcal{T}: 0 = W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n = W$ を W の三角化とする. $\{\delta_i\}_{1\leqq i\leqq n}$ を $W_i/W_{i-1} \xrightarrow{\sim} W(\delta_i)$ となる $\delta_i : K^\times \to E^\times$ の組とする. 一般には W の三角化 $\mathcal{T}$ は一意に定まらないが, まずは三角化 $\mathcal{T}$ を一つ固定して次のようにして trianguline 変形 $D_{W,\mathcal{T}}$ を定義する.

Definition 2.7. $A \in \mathcal{C}_E$ とする.

(1) 三つ組み $(W_A, \mathcal{T}_A, \psi)$ が A 上の $(W, \mathcal{T})$ の trianguline 変形であるとは, (W_A, ψ) が A 上の W の変形で $\mathcal{T}_A : 0 \subseteq W_{A,1} \subseteq W_{A,2} \subseteq \cdots W_{A,n} = W_A$ は, W_A の部分 A-B-ペアによるフィルトレイションで, 任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対し $W_{A.i}/W_{A,i-1}$ は一次元の A-B-ペアとなり, $\psi(W_{A,i} \otimes_A E) = W_i$ となるもの, と定義する.

(2) A 上の $(W, \mathcal{T})$ の trianguline 変形 $(W_A, \mathcal{T}_A, \psi)$, $(W'_A, \mathcal{T}'_A, \psi')$ が同値であるとは, A-B-ペアの同型 $f : W_A \xrightarrow{\sim} W'_A$ で, これにより (W_A, ψ) と (W'_A, ψ') は W の A 上の変形として同値となり, さらに任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対して $f(W_{A,i}) = W'_{A,i}$ となるものが存在することと定義する.

Definition 2.8. $\mathcal{C}_E$ から集合の圏 $Sets$ への共変関手

$$D_{W,\mathcal{T}} : \mathcal{C}_E \to Sets$$

を

$$D_{W,\mathcal{T}}(A) := \{A \text{ 上の } (W,\mathcal{T}) \text{ の triagnuline 変形の同値類 }\}$$

と定義し, これを $(W, \mathcal{T})$ の trianguline 変形関手と呼ぶ.

三角化 $\mathcal{T}_A$ を忘れることにより, 関手の射

$$D_{W,\mathcal{T}} \to D_W : (W_A, \mathcal{T}_A, \psi) \mapsto (W_A, \psi)$$

が定義できる. 一般には, この関手により $D_{W,\mathcal{T}}$ は D_W の部分関手にならないが次の補題が成立する.

Lemma 2.9. $(W, \mathcal{T})$ が任意の $1 \leqq i < j \leqq n$ に対して, $\delta_j/\delta_i \neq \prod_{\sigma\in\mathcal{P}} \sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して $k_\sigma \in \mathbb{Z}_{\leqq 0}$) となるとき, $D_{W,\mathcal{T}}$ は上の関手により D_W の部分関手となる.

この補題の条件の下で, $D_{W,\mathcal{T}}$ は D_W の部分関手となるが, この部分変形の基本的性質として次の命題が得られる.

Proposition 2.10.

(1) 任意の $1 \leqq i < j \leqq n$ に対して $\delta_j/\delta_i \neq \prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して, $k_\sigma \in \mathbb{Z}_{\leqq 0}$) が成り立つとき (以下, この条件を (イ) と書く), 関手の射 $D_{W,\mathcal{T}} \hookrightarrow D_W$ は相対的に表現可能である.

(2) 任意の $1 \leqq i < j \leqq n$ に対して $\delta_i/\delta_j \neq |N_{K/\mathbb{Q}_p}|\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma}$ (任意の $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して $k_\sigma \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$) が成り立つとき (以下この条件を (ロ) と書く), $D_{W,\mathcal{T}}$ は形式的滑らかな関手になる.

Remark. この命題は, Proposition 1.13 を用いて W の次元に関する帰納法によって証明される.

D_W の次元は $\mathrm{ad}(W)$ のコホモロジーによって計算されたが, $D_{W,\mathcal{T}}$ の次元は次のように定義される $\mathrm{ad}(W)$ の部分 E-B-ペアのコホモロジーによって計算することが出来る.

Proposition 2.11.

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(W) := \{f \in \mathrm{ad}(W) | \text{ 任意の } i \text{ に対して } f(W_i) \subseteq W_i\}$$

と定義する. このとき, E-ベクトル空間の自然な同型

$$D_{W,\mathcal{T}}(E[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(W))$$

が存在する.

以上の系として, $D_{W,\mathcal{T}}$ の構造に関する次の命題が得られる.

Proposition 2.12. $(W, \mathcal{T})$ が $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(W)) = E$ 及び条件 (イ), (ロ) を満たすとき, 関手 $D_{W,\mathcal{T}}$ は D_W の普遍変形環 R_W のある商環 $R_{W,\mathcal{T}}$ により (pro-) 表現されて, さらに

$$R_{W,\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} E[[X_1, \cdots, X_{f_W}]]$$

と同型になる. ここで

$$f_W := [K : \mathbb{Q}_p]\frac{n(n+1)}{2} + 1 \ (n \text{ は } W \text{ の次元})$$

とする.

Proof. 存在と形式的ベキ級数環と同型であることは Proposition 2.10 から従う. 次元は W の次元 n に関する帰納法で $\mathrm{H}^2(G_K, \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(W)) = 0$ であることと $\dim(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(W)) = \frac{n(n+1)}{2}$ であることを示せば, あとは Theorem 1.12 (2) と Proposition 2.11 から従う. □

以上で三角化 $\mathcal{T}$ を固定したときの $D_{W,\mathcal{T}}$ の基本的な性質は分かった. 一般に一つの trianguline B-ペアは多くの三角化を持ちそれぞれの三角化 $\mathcal{T}$ に対して ((イ) の下では)D_W の部分変形 $D_{W,\mathcal{T}}$ が出来るが, それらがお互い D_W の中でどのような位置関係に

あるかを調べることが応用上もっとも重要になる．このために, trianguline B-ペアの中でも特によい性質をもつ benign B-ペア ([Ki10],[Na10]. また [Ch09] では「generic」いう用語で定義されている) を定義し, benign B-ペア W に対して $D_{W,\mathcal{T}}$ たちの接空間の持つ著しい性質に関する定理 ([Ch09], [Na10]) を紹介したい.

まず, benign B-ペアを定義するために, 次の潜在的クリスタリン B-ペアのクラスを定義する.

Definition 2.13. n 次元 E-B-ペア W が crystabeline であるとは, K のある有限アーベル拡大 L が存在して $W|_{G_L}$ がクリスタリンになるもの, と定義する.

以下, 素元 $\pi_K \in \mathcal{O}_K$ を固定し, π_K に付随する K の Lubin-Tate 指標を $\chi_{LT}: G_K \to \mathcal{O}_K^{\times}$, $[\pi_K^n]$-等分点により K 上生成される体を K_n とおく．すると, χ_{LT} は同型 $\chi_{LT}: \mathrm{Gal}(K_n/K) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_K/\pi_K^n\mathcal{O}_K)^{\times}$ を導く．$G_n := \mathrm{Gal}(K_n/K)$ とおく．すると, W が crystabeline なら, ある n が存在して $W|_{G_{K_n}}$ がクリスタリン B-ペアとなることが分かる．crystabeline B-ペアと trianguline B-ペアの関係について次の補題がある.

Lemma 2.14. E-B-ペア W に対して, 次の二条件は同値.

(1) W は *crystabeline.*

(2) W は *trianguline* かつ潜在的クリスタリン.

benign B-ペアは crystabeline B-ペアの良い条件を満たすクラスとして次のようにして定義される.

まず, W を n 次元の crystabeline E-B-ペアとし, $W|_{G_{K_m}}$ がクリスタリンになっているとする．さらに,

$$D_{\mathrm{cris}}^{K_m}(W) := (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{B_e} W_e)^{G_{K_m}} = K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_1 \oplus K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_2 \oplus \cdots \oplus K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_n$$

で各 $1 \leqq i \leqq n$ に対して $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_i$ は $D_{\mathrm{cris}}^{K_m}(W)$ の部分 (φ, G_m)-加群となり

$$\varphi^f(e_i) = \alpha_i e_i,\ g(e_i) = \delta_i(\chi_{LT}(g))e_i$$

(ここで, $f = [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ (K_0 は K 内の $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大), $\alpha_i \in E^{\times}$, $\delta_i : (\mathcal{O}_K/\pi_K^m\mathcal{O}_K)^{\times} \to E^{\times}$ はある準同型) となると仮定する（$D_{\mathrm{cris}}^{K_m}(W)$ が, n 個の相異なる K 上の相対的 Frobenius 固有値を持つ場合は, 係数 E を拡大することでこのような状況に帰着できる)．さらに W の一般化 Hodge -Tate 重みが

$$\{k_{1,\sigma} > k_{2,\sigma} > \cdots > k_{n,\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{P}}$$

であると仮定する．このとき, 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_n$（$\mathfrak{S}_n$ は n-次対称群) に対して, $D_{\mathrm{cris}}^{K_m}(W)$ のフィルトレイション付き (φ, G_m)-加群としてのフィルトレイションを

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\tau : 0 &\subseteq K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_{\tau(1)} \subseteq K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_{\tau(1)} \oplus K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_{\tau(2)} \subseteq \cdots \\ &\subseteq K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} e_{\tau(1)} \oplus K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_{\tau(2)} \oplus \cdots \oplus K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Ee_{\tau(n-1)} \subseteq D_{\mathrm{cris}}^{K_m}(W)\end{aligned}$$

と定義する (ここで $K_m\otimes_{K_0}(K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(1)}\oplus\cdots\oplus K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(i)})$ には $K_m\otimes_{K_0}D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W)$ から誘導される Hodge フィルトレイションを定義する). ここで, Proposition 1.6 を用いると, 任意の $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に対して, W の部分 crystabeline E-B-ペアからなる三角化

$$\mathcal{T}_\tau : 0\subseteq W_{\tau,1}\subseteq W_{\tau,2}\subseteq\cdots\subseteq W_{\tau,n}=W$$

で, 任意の $1\leqq i\leqq n$ に対して, フィルトレイション付き (φ,G_m)-加群として

$$D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W_{\tau,i})\xrightarrow{\sim}K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(1)}\oplus\cdots\oplus K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(i)}\subseteq D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W)$$

となる $\mathcal{T}_\tau$ が唯一つ存在する. これにより W は（一般には重複があるかもしれないが）$n!$ 個の三角化 $\{\mathcal{T}_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{S}_n}$ を持つ split trianguline E-B-ペアとなる.

以上の状況で benign E-B-ペアを次のように定義する.

Definition 2.15.

(1) $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に対し, $D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W)$ のフィルトレイション $\mathcal{F}_\tau$ が non-critical であるとは, 任意の $1\leqq i\leqq n$ に対して $K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(1)}\oplus\cdots\oplus K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}Ee_{\tau(i)}(\subseteq D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W))$ の Hodge -Tate 重みが $\{k_{1,\sigma}>k_{2,\sigma}>\cdots>k_{i,\sigma}\}_{\sigma\in\mathcal{P}}$ であることと定義する.

(2) W が benign (または, quasi-benign) であるとは, 任意の $1\leqq i<j\leqq n$ に対して, $\alpha_i\neq\alpha_j,p^f\alpha_j,p^{-f}\alpha_j$ であり, さらに全ての $\tau\in\mathfrak{S}_n$(または, ある $\tau\in\mathfrak{S}_n$) に対して $\mathcal{F}_\tau$ が non-critial であるもの, と定義する.

Remark. $D^{K_m}_{\mathrm{cris}}(W)$ の $\tau\in\mathfrak{S}_n$ により定まるフィルトレイション $\mathcal{F}_\tau$ が non-critiacl のとき, 対応する三角化 $\mathcal{T}_\tau$ において, 任意の $1\leqq i\leqq n$ に対して同型

$$W_{\tau,i}/W_{\tau,i-1}\xrightarrow{\sim}W(\delta_{\alpha_{\tau(i)}}\delta_{\tau(i)}\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_{\sigma,i}})$$

が成り立つ (ここで, $\alpha\in E^\times$ に対し, $\delta_\alpha:K^\times\to E^\times$ を $\delta_\alpha|_{\mathcal{O}_K^\times}$ は自明で, $\delta_\alpha(\pi_K)=\alpha$ となるものと定義する). この対応より, W が quasi-benign で $\mathcal{F}_\tau$ が non-critical のときは, $(W,\mathcal{T}_\tau)$ は Proposition 2.10 の仮定 (イ）, (ロ) を満たすことが分かる. さらに, W が benign の場合は $\mathrm{H}^0(G_K,\mathrm{ad}(W))=E$ が成り立ち, 任意の $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に対し, $(W,\mathcal{T}_\tau)$ は Proposition 2.10 の全ての仮定を満たすことが証明出来, Propositon 2.12 により $n!$ 個の相異なる R_W の商環 $\{R_{W,\mathcal{T}_\tau}\}_{\tau\in\mathfrak{S}_n}$ を持つ.

このように, W が benign の場合は R_W は $n!$ 個の商環 $\{R_{W,\mathcal{T}_\tau}\}_{\tau\in\mathfrak{S}_n}$ を持つが, これらの接空間に関する次の定理がこの章の主定理である. この定理は第 4 章の Zariski 稠密性の証明において本質的に重要な役割を果たす. この定理に述べられる接空間の持つ性質は, $K=\mathbb{Q}_p$ で二次元表現の場合は Colmez, Kisin の研究 ([Co08], [Ki10]) の中でも非明示的に現れているが, $K=\mathbb{Q}_p$ で高次元の表現の場合にこの性質を発見し証明したのは Chenevier ([Ch09]) である.

Definition 2.16. 普遍変形環 $R_* = R_W, R_{W,\mathcal{T}_\tau}$ に対し, その接空間を

$$t_{R_*} := \mathrm{Hom}_E(\mathfrak{m}_{R_*}/\mathfrak{m}_{R_*}^2, E)$$

と定義する ($\mathfrak{m}_{R_*}$ は R_* の極大イデアル).

W が benign の場合は, t_{R_W} は $n!$ 個の部分空間 $\{t_{R_{W,\mathcal{T}_\tau}}\}_{\tau\in\mathfrak{S}_n}$ を持つ.

Theorem 2.17. ([Ch09], [Na10]) *W が benign のとき, 等号*

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} t_{R_{W,\mathcal{T}_\tau}} = t_{R_W}$$

が成り立つ.

Remark. 証明は W の次元に関する帰納法で証明される. 重要なことは異なる $D_{W,\mathcal{T}_\tau}$ たちの共通部分が D_W のある自然な部分変形問題となるという事実であり, この事実を示すときに $\mathcal{T}_\tau$ が non-critical であるという仮定が本質的に用いられる.

§ 3. Trianguline 表現の族 ([Ki03], [Na10])

クリスタリン表現の Zariski 稠密性を証明するために最も重要なことは, クリスタリン表現全体を p-進補間するような trianguline 表現の p-進的な族を構成することである. $K = \mathbb{Q}_p$ で二次元表現の場合は, Kisin([Ki03]) の (trianguline 表現の理論が定式化される前の!) 画期的な研究により二次元 trianguline 表現の族が構成された (Colmez ([Co08]) もアフィノイド上の相対的な Robba 環上の (φ,Γ)-加群の理論を用いて族を構成している). 本章では Kisin の構成の一般の p-進体への一般化に関する結果 ([Na10]) を述べ, それを用いて Kisin の構成を少し modify させた二次元 trianguline 表現の族の構成について紹介し, その族の様々な幾何的な性質, 特に局所的な性質が前章の変形理論によって記述出来るという定理を紹介する.

まずは, 定理を述べるために必要なリジッド幾何のいくつかの概念について復習する. X を E 上分離的なリジッド解析的多様体（本稿では、リジッド解析的多様体は Tate の定義したものとする）とする. d を正の整数とし, M をランク d の自由 $\mathcal{O}_X$-加群で G_K が連続 $\mathcal{O}_X$-線形に作用しているものとする (ここで, G_K が連続に作用するとは, X の任意の許容的 (admissible) アフィノイド開集合 $U = \mathrm{Spm}(R)$ に対して G_K が自由 R-加群 $\Gamma(U, M)$(R の直和の位相を入れる）に連続作用していることと定義する). 点 $x \in X$ の剰余体を $E(x)$(E の有限次拡大), M の x でのファイバーを $M(x)$ と書く. $M(x)$ は d 次元の G_K の $E(x)$-表現となる. このような X 上の p-進表現の族があると Sen の定理により, d 次元のモニックな多項式

$$P_M(T) \in K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X[T]$$

で各点 $x \in X$ に対して $P_M(X)$ の x での還元が $M(x)$ の Sen の多項式 $P_{M(x)}(T) \in K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E(x)[T]$ となるものが存在する. 分解 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \oplus_{\sigma\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_X e_\sigma : a \otimes b \mapsto (\sigma(a) b e_\sigma)$ によ

る $P_M(T)$ の σ-成分を $P_M(T)_\sigma$ と書き, 各点 $x\in X$ に対しても同様に σ-成分を $P_{M(x)}(T)_\sigma$ と書く. アフィノイド $X=\mathrm{Spm}(R)$ の許容的開集合 $U\subseteq X$ がスキーム論的稠密であるとは $\mathrm{Spec}(R)$ の Zariski 位相に関して稠密な Zariski 開集合 V が存在して, U が V に付随するリジッド解析的多様体になっているものと定義する. 代表的な例として $f\in R$ が非零因子のとき, 許容的開集合

$$X_f := \{x\in \mathrm{Spm}(R) | f(x)\neq 0\}$$

はスキーム論的稠密である. 任意の分離的リジッド解析的多様体 X の許容的開集合 U がスキーム論的稠密であるとは, X のアフィノイドによる許容的被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ があり, 各 $i\in I$ に対して $U_i\cap U$ が U_i 内でスキーム論的稠密であることとする. X 上の可逆な関数 $Y\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X^\times)$, R を E-上のアフィノイド代数とする. このとき射 $f:\mathrm{Spm}(R)\to X$ が Y-small であるとは, E の有限次拡大体 E' と $\lambda\in(R\otimes_E E')^\times$ で $E[\lambda]\subseteq R\otimes_E E'$ が E 上有限エタールになるものが存在して $Y\lambda^{-1}-1\in R\otimes_E E'$ が位相的べき零元になることと定義する. 典型的な例として X の点 x での局所環を $\mathcal{O}_{X,x}$, 極大イデアルを $\mathfrak{m}_x$ とすると任意の $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対して自然な射 $\mathrm{Spm}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n)\to X$ は Y-small になる（実際 $\lambda:=Y(x)\in E(x)$ とすれば, $E[\lambda]\subseteq E(x)\subseteq\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ となり, さらに $Y\lambda^{-1}-1\in\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ は位相的べき零 (この場合はべき零) になる). L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, M, N を L-Banach 空間とするとき, L 上の完備テンソル積を $M\hat{\otimes}_L N$ と表す. B^+_{dR} に対して, $B^+_{\mathrm{dR}}\hat{\otimes}_L M:=\varprojlim_n(B^+_{\mathrm{dR}}/t^nB^+_{\mathrm{dR}})\hat{\otimes}_L M$(各 $B^+_{\mathrm{dR}}/t^nB^+_{\mathrm{dR}}$ には自然に L-Banach 空間の構造が入る) と定義する.

以上の準備の元で, trianguline 表現の族の構成において最も重要な次の一般的な定理を述べたい.

Theorem 3.1. ([Ki03], [Na10]) *X を E 上分離的なリジッド解析的多様体とし, M をランク d の自由 $\mathcal{O}_X$-加群で G_K が連続 $\mathcal{O}_X$-線形に作用しているものとする. $P_M(T)$ の定数項は零, つまりある $d-1$ 次多項式 $Q(T)\in K\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_X[T]$ があり $P_M(T)=TQ(T)$ となっていると仮定する ($Q(T)$ の σ-成分も同様に $Q(T)_\sigma\in\mathcal{O}_X[T]$ と記す). $Y\in\mathcal{O}_X^\times$ とする. このとき, X の Zariski 閉部分多様体 X_{fs} で次の条件 (1), (2) を満たすものが唯一つ存在する.*

(1) 任意の $\sigma\in\mathcal{P}$, $i\in\mathbb{Z}_{\leqq 0}$ に対し, $X_{fs,Q(i)_\sigma}:=\{x\in X_{fs}|Q(i)_\sigma(x)\neq 0\}$ は X_{fs} 内でスキーム論的稠密である.

(2) 任意の Y-*small* な射 $f:\mathrm{Spm}(R)\to X$ で任意の $\sigma\in\mathcal{P}$, $i\in\mathbb{Z}_{\leqq 0}$ に対して $X_{Q(i)_\sigma}$ を経由するものに対して, 次の二条件は同値になる.

  (*i*) f は X_{fs} を経由する.

  (*ii*) 任意の $R[G_K]$-加群の連続射 $h:M^\vee\otimes_{\mathcal{O}_X}R\to B^+_{\mathrm{dR}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}R$ は自然な単射

$$K\otimes_{K_0}(B^+_{\mathrm{cris}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}R)^{\varphi^f=Y}\hookrightarrow B^+_{\mathrm{dR}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}R$$

  を経由する (ここで, $M^\vee$ は M の $\mathcal{O}_X$-双対とする).

Remark. この定理の証明では自然な射 $K\otimes_{K_0}(B^+_{\mathrm{cris}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}R)^{\varphi^f=Y}\to B^+_{\mathrm{dR}}/t^kB^+_{\mathrm{dR}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}R$ などの R 上無限ランクの G_K の作用する R-Banach 空間の間の射の性質を調べることが最も重要である. 特に, 零でない $\lambda\in\mathcal{O}_E$, $k>v_K(\lambda)$(v_K は $v_K(\pi_K)=1$ となる付値) となる任意の整数, $\sigma\in\mathcal{P}$ に対して, E-Banach 空間の自然な射 $((K\otimes_{K_0}B^+_{\mathrm{cris}})\otimes_{K,\sigma}E)^{\varphi^f=\lambda}\to B^+_{\mathrm{dR}}/t^kB^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{K,\sigma}E$ が単射で像が閉になっている, という事実が重要で, これから上の R の場合の必要な性質が従う (E の場合に帰着するときに, Y-small という性質が用いられる). E の場合の証明には Fontaine の almost $\mathbb{C}_p$-表現の理論 ([Be09]) などを用いる.

なぜこの命題が trianguline 表現の族の構成で重要になるかは, 例えば次のような命題があるからである. p-進表現 V に対して, $D^+_{\mathrm{cris}}(V):=(B^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$ と定義する. 以下, 連続指標 $\delta:G_K\to E^\times$ に対して, これから局所類体論により定まる連続準同型 $\delta\circ\mathrm{rec}_K:K^\times\to E^\times$ も同じ記号 δ で表すことにする.

Proposition 3.2. *M をランク 2 とする. このとき, 任意の点 $x\in X_{fs}$ に対して, $D^+_{\mathrm{cris}}(M(x))^{\varphi^f=Y(x)}\neq 0$ である. 特に, ある $\{k_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{P}}\in\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ が存在して, $M(x)$ は三角化*

$$0\to W(\delta_{Y(x)}\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{-k_\sigma})\to W(M(x))\to W(\det(M(x))\delta_{Y(x)^{-1}}\prod_{\sigma\in\mathcal{P}}\sigma^{k_\sigma})\to 0$$

を持つ $E(x)$-split trianguline 表現となる.

この定理を次の状況に適応すると, 求める trianguline 表現の族を構成することが できる. $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\mathbb{F}$ を剰余体, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ を Artin 局所環 A で剰余体が $\mathbb{F}$ となるもののなす圏とする.

$$\bar{\rho}:G_K\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

を G_K の二次元連続表現とする ($\overline{V}$ で対応する $\mathbb{F}$-表現を表すとする). 本稿では簡単のため

$$\mathrm{H}^0(G_K,\mathrm{ad}(\bar{\rho}))=\mathbb{F}$$

を満たすと仮定する. このとき, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ から集合の圏への関手

$$D_{\bar{\rho}}:\mathcal{C}_{\mathcal{O}}\to Sets:\ D_{\bar{\rho}}(A):=\{\overline{V}\text{の } A \text{ 上の変形の同値類 }\}$$

と定義すれば $D_{\bar{\rho}}$ は完備 Noether $\mathcal{O}$-代数で剰余体が $\mathbb{F}$ と同型になる $R_{\bar{\rho}}$ によって (pro) 表現可能となる. $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ を $R_{\bar{\rho}}$ に付随する E 上のリジッド解析的多様体とする (これは点集合としては $R_{\bar{\rho}}[p^{-1}]$ の極大イデアルの集合と一致する). 各自然数 n に対し, $R_n:=R_{\bar{\rho}}/\mathfrak{m}^n$ 上の $\bar{\rho}$ の変形 (V_n,ψ_n) を自然な還元射 $R_{\bar{\rho}}\to R_n$ で定まる同値類の代表元とし, 同値を与える射 $f_n:V_n\otimes_{R_n}R_{n-1}\xrightarrow{\sim}V_{n-1}$ を取る. このとき, 自然な射 $V_n\to V_n\otimes_{R_n}R_{n-1}:x\mapsto x\otimes 1$ と f_n の合成で定まる射 $i_n:V_n\to V_{n-1}$ で射影系を取ることで $V^{univ}:=\varprojlim_n V_n$ と定義する. これはランク 2 の自由 $R_{\bar{\rho}}$-加群で $R_{\bar{\rho}}$ の $\mathfrak{m}$-進位相に関して連続な G_K-作用が V_n 達への作用から誘導される. $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の定義により, V^{univ} は G_K が連続に作用するランク 2 の

有限自由 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}(\bar{\rho})}$-加群 $\tilde{V}^{univ}$ を定める．すると各点 $x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho})$ に対し, $\tilde{V}^{univ}$ の x でのファイバー V_x は G_K の二次元 $E(x)$-表現で, さらにある $\mathcal{O}_{E(x)}$-lattice での還元が $\overline{V} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$ と同型になる (ここで, $\mathbb{F}(x)$ は $E(x)$ の剰余体). 反対に, E の有限次拡大 E' に対し, E'-表現 V' でそれのある G_K-不変な $\mathcal{O}_{E'}$-lattice の還元が $\overline{V} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ と同型になるものがあれば, ある点 $x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho})$ で, E' は $E(x)$ の有限次拡大で $V' \xrightarrow{\sim} V_x \otimes_{E(x)} E'$ となるものが一意的に存在する．次に $\mathcal{W}$ を岩澤代数 $\mathcal{O}[[\mathcal{O}_K^\times]]$ に付随する E 上のリジッド解析的多様体とする．$\mathcal{W}$ は E 上のリジッド解析的多様体 Y に対して群

$$\mathcal{W}(Y) := \{\delta : \mathcal{O}_K^\times \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^\times) \text{ 連続準同型 }\}$$

を対応させる反変群関手を表現する群多様体であり, 多様体としては $[K : \mathbb{Q}_p]$-次元の単位開円盤の有限個（$\mathcal{O}_K^\times$ に含まれる 1 のベキ根の個数）の disjoint union と同型になる．

$$\delta^{univ} : \mathcal{O}_K^\times \to \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^\times)$$

を普遍的な準同型とする（実際これは自然な射 $\mathcal{O}_K^\times \to \mathcal{O}[[\mathcal{O}_K^\times]]^\times : a \mapsto [a]$ と自然な射 $\mathcal{O}[[\mathcal{O}_K^\times]] \to \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$ の合成と一致する)．素元 π_K を固定した下で, 再び同じ記号を用いて $\delta^{univ} : K^\times \to \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^\times)$ を

$$\delta^{univ}|_{\mathcal{O}_K^\times} = \delta^{univ},\ \delta^{univ}(\pi_K) = 1$$

となる連続準同型とする．連続性の定義から局所類体論によって連続指標

$$\tilde{\delta}^{univ} : G_K^{ab} \to \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^\times)$$

で $\delta^{univ} = \tilde{\delta}^{univ} \circ \mathrm{rec}_K$ となるものが存在する (ここで, $\mathrm{rec}_K : K^\times \to G_K^{ab}$ は局所類体論の相互写像とする). $\mathbb{G}_{m,E}^{\mathrm{an}} := \{x \in \mathbb{A}_E^{1\mathrm{an}} | x \neq 0\}$ とする．

以上の設定の下で

$$X := \mathfrak{X}(\bar{\rho}) \times_E \mathcal{W} \times_E \mathbb{G}_{m,E}^{\mathrm{an}}$$

とし, 各成分への射影を

$$p_1 : X \to \mathfrak{X}(\bar{\rho}),\ p_2 : X \to \mathcal{W},\ p_3 : X \to \mathbb{G}_{m,E}^{\mathrm{an}}$$

と書く．$\tilde{V}^{univ}$ の X への引き戻しを

$$M := p_1^* \tilde{V}^{univ}$$

と書き, $\tilde{\delta}^{univ}$ の X への引き戻しを

$$\tilde{\delta} : G_K^{ab} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$$

と書き, M の $\tilde{\delta}^{-1}$ による捻りを $M(\tilde{\delta}^{-1})$ と書く．$\mathbb{G}_{m,E}^{\mathrm{an}}$ の自然なパラメータを Y と書き, それの X への引き戻しも再び Y と書く．

$$P(T) \in K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X$$

を $M(\tilde{\delta}^{-1})$ の Sen 多項式とし, 各 $\sigma \in \mathcal{P}$ 成分を

$$P(T)_\sigma := T^2 + a_\sigma T + b_\sigma \in \mathcal{O}_X[T]$$

と書く.

$$X_0 := \{x \in X | b_\sigma(x) = 0 \text{ 任意の } \sigma \in \mathcal{P}\}$$

で定まる X の Zariski 閉部分多様体 (つまり, $\{b_\sigma\}_\sigma$ で生成されるイデアルにより定まる閉部分多様体) とする. 以上の状況で, Theorem 3.1 を X_0, 及び $M(\tilde{\delta}^{-1}), Y$ (X_0 への制限) に対して適応すると次の定理が得られる.

Theorem 3.3. ([Ki03], [Na10]) *Theorem 3.1 を組 $(X_0, M(\tilde{\delta}^{-1}), Y)$ に適応して得られる $X_{fs} \subseteq X_0$ を $\mathcal{E}(\bar{\rho})$ とおくと次の性質が成り立つ.*

(1) 任意の点 $x = (V_x, \delta_x, \lambda_x) \in \mathcal{E}(\bar{\rho})$ に対して V_x は *split trianguline* $E(x)$-表現で, さらにある $\{k_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{P}} \in \prod_{\sigma\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ が存在して, $\delta_1 = \delta_x \delta_{\lambda_x} \prod_{\sigma\in\mathcal{P}} \sigma^{-k_\sigma}$ とおくと V_x は三角化

$$0 \to W(\delta_1) \to W(V_x) \to W(\det(V_x)\delta_1^{-1}) \to 0$$

を持つ.

(2) 逆に $x = (V_x, \delta_x, \lambda_x) \in X_0$ で V_x が *split trianguline* $E(x)$-表現で三角化 $\mathcal{T}$

$$0 \to W(\delta_x \delta_{\lambda_x}) \to W(V_x) \to W(\det(V_x)\delta_x^{-1}\delta_{\lambda_x}^{-1}) \to 0$$

を持ち, さらに次の条件 $(i), (ii)$ のいずれかを満たすとき, $x \in \mathcal{E}(\bar{\rho})$ となる.

 (i) $W(V_x(\delta_x^{-1}))$ の一般化 *Hodge-Tate* 重み $\{0, k_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{P}}$ が任意の $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して $k_\sigma \notin \mathbb{Z}_{\leqq 0}$ を満たすとき.

 (ii) $W(V_x)$ が *quasi-benign* で三角化 $\mathcal{T}$ が *non-critical* であるとき.

(3) (2) の条件 (i) または (ii) の下でさらに $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(V_x)) = E(x)$ のとき, (このとき *trianguline* 変形関手 $D_{W(V_x),\mathcal{T}}$ は $R_{W(V_x),\mathcal{T}}$ により表現可能であるが) 自然な $E(x)$ 上の局所環の同型

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}(\bar{\rho}),x} \xrightarrow{\sim} R_{W(V_x),\mathcal{T}}$$

が存在する. 特に, $\mathcal{E}(\bar{\rho})$ はこれらの点のある近傍では滑らかで, さらに E 上の次元が $3[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ となる.

次に, $\mathcal{E}(\bar{\rho})$ から $\mathcal{W} \times_E \mathcal{W}$ への射を

$$\pi : \mathcal{E}(\bar{\rho}) \to \mathcal{W} \times_E \mathcal{W} : x := (V_x, \delta_x, \lambda_x) \mapsto (\delta_x, \det(V_x)|_{\mathcal{O}_K^\times}/\delta_x)$$

と定義する. この射に関して次が成り立つ.

Proposition 3.4.

(1) $x \in \mathcal{E}(\bar{\rho})$ が Theorem 3.3.(2) の条件 (i) または (ii) を満たすとき, π は x の近傍で滑らか.

(2) (ii) のときはさらに, ($y := \pi(x)$ とおくと) $E(x)$-代数の自然な同型 $\widehat{\mathcal{O}}_{\pi^{-1}(y),x} \xrightarrow{\sim} R^{\mathrm{cris}}_{V_x}$ が存在する (ここで, $R^{\mathrm{cris}}_{V_x}$ は V_x の普遍 (潜在的) クリスタリン変形環).

§4. 応用: 二次元クリスタリン表現の Zariski 稠密性 ([Co08], [Ki10], [Na10])

最後に, 以上の理論の一つの応用として二次元クリスタリン表現が $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の中で Zariski 稠密に含まれているという定理を証明したい. $\bar{\rho} : G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を二次元の $\mathbb{F}$-表現とする. 本稿では簡単のため $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(\bar{\rho})) = \mathbb{F}$ を満たすと仮定し, $R_{\bar{\rho}}$ を $\bar{\rho}$ の $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ 上の変形の普遍変形環, $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ を $R_{\bar{\rho}}$ に付随する E 上のリジッド解析的多様体とする. $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の部分集合を

$$\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\mathrm{reg,cris}} := \{x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho}) | V_x \text{はクリスタリン表現で Hodge-Tate 重み } \{k_{1,\sigma}, k_{2,\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{P}} \text{ は } k_{1,\sigma} \neq k_{2,\sigma} \text{ (任意の} \sigma \in \mathcal{P}) \text{ を満たす} \},$$

$$\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b := \{x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho}) | V_x \text{はクリスタリンかつ, 係数を拡大すると benign となる} \}$$

と定義する. 定理を述べるためにリジッド幾何の用語をいくつか定義する.

Definition 4.1. リジッド解析的多様体 X の部分集合 Z が X の中で Zariski 稠密 (Zariski dense) であるとは, X の Zariski 閉部分多様体 Y が Z を含めば $X_{\mathrm{red}} \subseteq Y$ となること, と定義する.

Definition 4.2. (Coleman) リジッド解析的多様体 X が既約 (irreducible) であるとは, X の Zariski 閉部分多様体 Y が X の空でないある許容的開集合 U を含めば $Y = X$ となること, と定義する.

Example 4.3. $\mathcal{W}$ の部分集合 $\mathcal{W}_0 := \{\prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \sigma^{k_\sigma} | k_\sigma \in \mathbb{Z}$ (任意の $\sigma \in \mathcal{P}$)$\}$ は $\mathcal{W}$ の中で Zariski 稠密.

Example 4.4. 開多重円盤 $D^n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathcal{O}_{\bar{\mathbb{Q}}_p} |x_i| < 1\}$ は既約.

まず, 部分集合 $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\mathrm{reg,cris}}$ と $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ について次の命題を証明することができる.

Proposition 4.5. 任意の点 $x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\mathrm{reg,cris}}$ の $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ 内での任意の近傍 U に対して $U \cap \mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ は空集合ではない.

この命題は, Kisin のクリスタリン変形の普遍変形環 ([Ki08]), 及び Beger-Colmez の p-進表現の族（特にクリスタリン表現の族）の理論 ([Be-Co08]) を用いて対応するフィルトレイション付き φ-加群の族を調べることで証明する.

次の 2 定理が本稿の主定理である.

Theorem 4.6. $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\mathrm{reg,cris}}$ は空集合でないとする (このとき, 上の Proposition 4.5 より $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ も空ではない). Z を $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ の $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ 内での *Zariski* 閉包とする. このとき, Z は $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の既約成分のユニオンになる.

以下の条件の下では、より強く次の定理を証明することができる.

Theorem 4.7. ([Co08], [Ki10] $K = \mathbb{Q}_p$ の場合, [Na10] K : 一般の場合) 次を満たすと仮定する.

(0) $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(\bar{\rho})) = \mathbb{F}$.

(1) $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\mathrm{reg,cris}}$ は空集合ではない.

(2) $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{ad}(\bar{\rho})^0(\omega)) = 0$.

(ここで, $\mathrm{ad}(\bar{\rho})^0 := \{f \in \mathrm{ad}(\bar{\rho}) | \mathrm{tr}(f) = 0\}$, $\omega : G_K^{ab} \to \mathbb{F}^\times$ は法 p 円分指標とする.)

このとき, $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ は $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の中で *Zariski* 稠密となる.

これらの定理は次のようにして証明する. まず, 次の命題が証明で重要となる.

Proposition 4.8. $x = (V_x, \delta_x, \lambda_x) \in \mathcal{E}(\bar{\rho})$ を Theorem 3.3(2) の (ii) を満たし V_x はクリスタリンである点とする. $\mathcal{E}(\bar{\rho})_b := \{(V_y, \delta_y, \lambda_y) \in \mathcal{E}(\bar{\rho}) | V_y$ はクリスタリンかつ *benign* $\}$ とする. このとき, x の任意の開近傍 U に対して, U に含まれる十分小さい x の開近傍 V で, $V \cap \mathcal{E}(\bar{\rho})_b$ が V の中で *Zariski* 稠密になるようなものが存在する.

この命題は, Proporition 3.4 の射 $\pi : \mathcal{E}(\bar{\rho}) \to \mathcal{W} \times_E \mathcal{W}$ の性質と Example 4.3 の性質を用いて証明される. 詳細はここでは省略するが, 単なるクリスタリン表現の稠密性ではなく benign な点の稠密性を示すところが, $K = \mathbb{Q}_p$ の場合には現れなかった新しい所で, [Be-Co08] の結果を用いるなどして $\mathcal{E}(\bar{\rho})$ のより精密な構造を調べる必要がある.

主定理は次のようにして証明される.

Proof. (Theorem 4.6 の証明のスケッチ) Z を $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ の $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ 内での Zariski 閉包（つまり, $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ を含む $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の最小の Zariski 閉部分空間）とし, Z_0 を Z の任意の既約成分とする. まず, $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ の任意の既約成分の次元は $4[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ であることが分かるので, Z_0 の次元が $4[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ であることを証明すればよい. $Y_0 := p_1^{-1}(Z_0) \subseteq \mathcal{E}(\bar{\rho})$ とする. Z_0 の滑らかでない点は Z_0 の真 Zariski 閉部分多様体なので, Z の定義より点 $x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho})_b$ で x が Z_0 の滑らかな点となるようなものが存在する. このとき benign 表現の定義により, Theorem 3.3 (2) の (ii) を満たす相異なる二点 $x_1, x_2 \in \mathcal{E}(\bar{\rho})$ で $p_1(x_1) = p_1(x_2) = x$ となるものが存在する. $t_{Z_0,x}$ を Z_0 の x での接空間などと記すことにすると, $i = 1, 2$ に対して接空間の間の射 $t_{Y_0,x_i} \to t_{Z_0,x} \hookrightarrow t_{\mathfrak{X}(\bar{\rho}),x}$ と $t_{Y_0,x_i} \hookrightarrow t_{\mathcal{E}(\bar{\rho}),x_i} \to t_{\mathfrak{X}(\bar{\rho}),x}$ が存在する. このとき, Theorem 3.3 (3) と上の Proposition 4.8 より同型 $t_{Y_0,x_i} = t_{\mathcal{E}(\bar{\rho}),x_i}$ が成り立つ. これらより, 射 $\sum_{i=1}^{2} t_{\mathcal{E}(\bar{\rho}),x_i} \to t_{Z_0,x} \hookrightarrow t_{\mathfrak{X}(\bar{\rho}),x}$ を得る. ここで, Theorem 2.17 と Theorem 3.3 (3) を

用いると, 等号 $t_{Z_0,x} = t_{\mathfrak{X}(\bar{\rho}),x}$ を得る. よって, $\dim_E t_{Z_0,x} = \dim_E t_{\mathfrak{X}(\bar{\rho}),x} = 4[K:\mathbb{Q}_p]+1$ となり, x は Z_0 の滑らかな点であったので, Z_0 の次元は $4[K:\mathbb{Q}_p]+1$ であることが分かる. □

Proof. (Theorem 4.7 の証明のスケッチ) $\mu_{p^n} := \mathcal{O}^{\times}_{K,p\text{-tor}}$ を $\mathcal{O}_K^{\times}$ に含まれる 1 の p-べき根全体の集合とし, ζ_{p^n} を 1 の原始 p^n-乗根とする. 任意の $\zeta \in \mu_{p^n}$ に対し, $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta} := \{x \in \mathfrak{X}(\bar{\rho}) | \det(V_x)(\mathrm{rec}_K(\zeta_{p^n})) = \zeta\}$ と定義する. このとき, $\mathfrak{X}(\bar{\rho}) = \coprod_{\zeta\in\mu_{p^n}} \mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta}$ となり, さらに仮定 (2) の下では各 $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta}$ は $4[K:\mathbb{Q}_p]+1$ 次元の単位開円盤と同型になることが証明できる. よって, Example 4.4 より $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta}$ は既約であり, 仮定 (1) と Theorem 4.6 により, ある $\zeta \in \mu_{p^n}$ で $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta} \subseteq Z$ となるものが存在する. このとき, ($p \neq 2$ の場合は) 適当なクリスタリン指標で $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta}$ に含まれる表現をひねると, 任意の $\mathfrak{X}(\bar{\rho})_{\zeta'}$ に移すことが出来るので, $Z = \mathfrak{X}(\bar{\rho})$ となる ($p = 2$ の場合は, 指標の捻りでは既約成分の全体の半分にしか移す事ができないので, もう少し議論が必要になる).

□

Remark. Theorem 4.7 の仮定に関して, (0) は普遍変形環 $R_{\bar{\rho}}$ が存在するための仮定であり, 本稿の記述の単純化のためだけの便宜的な仮定である. そうでない場合は枠付き変形環を用いれば同様の主定理が証明できる. (1) に関しては, $\bar{\rho}$ が絶対既約の場合にはいつでも成り立つことが証明でき, $\bar{\rho}$ が可約な場合も多くの場合は成り立つことが証明できる. (1) は（高次元の場合でも）任意の場合に成り立つことが期待されるので, 今後考えていきたい. (2) も多くの場合に成り立つ仮定だが, 成り立たない例も存在する. (2) が成り立たない場合にも Theorem 4.7 の主張は正しいと筆者は期待している. これも (高次元の場合も含めて) 今後考えていきたい.

Remark. $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ 全体での Zariski 稠密性の他に, $\det(\bar{\rho})$ の持ち上げを固定した部分変形空間内でのクリスタリン表現の Zariski 稠密性も同様にして証明することができる.

Remark. $K = \mathbb{Q}_p$ の場合の Theorem 4.7 は, Colmez, Kisin らによる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進局所 Langlands 対応の一連の研究の中で証明され, 彼らの一連の研究の中でいくつもの本質的に重要な役割を果たしている. 実際に, Colmez([Co10]) による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進 Langlands 対応の構成（(φ,Γ)-加群から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現への関手の構成）でも, Theorem 4.7 を用いないで関手を構成する方法は現在までに知られていない様に思われる. 対応が一対一であることを証明するときにも Theorem 4.7 は本質的に用いられている ([Ki10], [Pa10]). さらに p-進局所ラングランズ対応の整数論への応用として, Emerton による $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ の p-進局所 Langlands 対応と大域 Langlands 対応の両立性の研究においても, Theorem 4.7 は重要な局面で用いられているようである ([Em10]).

Remark. 本稿では, 二次元表現の場合に trianguline 表現の族を構成し, 二次元クリスタリン表現の Zariski 稠密性を証明したが, 最近筆者と Chenevier によって, 高次元の場合に trianguline 表現の族を構成し, 任意次元のクリスタリン表現の Zariski 稠密性を証明することができた.

Remark. 本稿で述べた様々な理論の応用に関して, まずは$\mathcal{E}(\bar{\rho})$及びそれらの構成で用いた理論を用いて, 総実体の四元数体的Hilbert保型形式からなるeigenvariety (Buzzard, 山上) 上の Galois 表現の族を研究してみたいと思っている．まずは, Coleman-Mazur の eigencurve の場合に証明されているさまざまな定理（例えばKisinによる過収束p進保型形式に付随する Galois 表現に関する Fontaine-Mazur 予想関連の定理 ([Ki03]), または保型的な Galois 表現の Zariski 稠密性に関する Gouvea-Mazur 型の定理 ([Ch09]) など）が一般の場合にどのくらい成り立つかをまずは研究してみたいと思っている (が未定である).

References

[Bel-Ch09] J. Bellaïche, G. Chenevier, Families of Galois representations and Selmer groups , Astérisque 324 (2009).

[Be08] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules: représentations p-adiques et B-paires, Algebra and Number Theory, 2 (2008), no. 1, 91–120.

[Be09] L. Berger, Presque $\mathbb{C}_p$-représentations et (φ, Γ)-modules, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 8 (2009), no. 4, 653–668.

[Be-Co08] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque 319 (2008), 303-337.

[Ch09] G. Chenevier, On the infinite fern of Galois representations of unitary type, arXiv:0911.5726.

[Co08] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque 319 (2008), 213-258.

[Co10] P. Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque 330 (2010), 281-509.

[Em10] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, preprint.

[Fo94] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, Astérisque 223 (1994), 59-111.

[Ki03] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. 153 (2003), 373-454.

[Ki08] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings, J.AMS, 21 (2) (2008), 513-546.

[Ki10] M. Kisin, Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations, appendix of [Co10].

[Li08] R. Liu, Cohomology and duality for (φ, Γ)-modules over the Robba ring, Int. Math. Res. Not. IMRN (3) (2008).

[Ma97] B. Mazur, An introduction to the deformation theory of Galois representations, Modular forms and Fermat's last theorem, Springer Verlag (1997), 243-311.

[Na09] K. Nakamura, Classification of two dimensional split trianguline representations of p-adic fields, Compositio Math. 145 (2009), 865-914.

[Na10] K. Nakamura, Deformations of trianguline B-pairs and Zariski density of two dimensional crystalline representations, arXiv:1006.4891.

[Pa10] V. Paskunas, The image of Colmez's Montreal functor, arXiv:1005.2008.