経済論叢（京都大学）第 185 巻第 2 号，2011 年 4 月

〈論　文〉

マルクス派最適成長論における基本モデルの検討
―経済成長の限界と最適労働配分について―

高　橋　　　勉

Ⅰ　はじめに

1　マルクス派最適成長論の位置

マルクス派最適成長論とは，大西広を中心とした京都大学のグループよって研究されている経済成長理論のことであり，その特徴は，マルクス派の経済理論における根幹である労働価値説を新古典派の成長モデルの中に位置付け，そのような枠組みによって従来のマルクス派の主張を再検討する，というものである[1)]。現在の経済学において，マルクス派は，少数派，非主流派，あるいは，反主流派であり，また，その基本的な枠組みが異なっているため，主流派の立場からは議論の対象になりにくい。議論の対象になりにくいということは，マルクス派の立場から主流派を見た場合にも当てはまるのだが，しかし，その状況を放置することは，主流派には許されるとしても，非主流派，あるいは，反主流派であるマルクス派には，本来，許されないはずである。そこで，マルクス派最適成長論は，主流派＝新古典派と基本的に同じ枠組みを用いることによって，マルクス派の議論を主流派と通訳可能なものとすることを試みる。そして，新古典派と同じ枠組みにおいても，マルクス派の根幹をなす理論である労働価値説を前提にすれば，マルクス派の従来の主張が（基本的には）有効であることを論証しようとしているのである。この意味で，マルクス派最適成長論は，「マル経でもあり，近経でもある経済学[2)]」である。マルクス派最適成長論による問題提起の方法は，マルクス派にとって，１つの有力な発展の方向性を示すものとして評価されるべきである。

2　直感的理解のためのスケッチ

しかし，マルクス派最適成長論は，新古典派的枠組みを用いているために，マルクス派の立場の研究者にとって理解が容易ではない。そこで，本論に入る前に，まずは，マルクス派最適成長論が，何を問題とし，何を示そうとしているのか，直感的に理解するためのスケッチを示すことにしよう。

さて，ある生産者が生産財と消費財を生産しているとする。この生産者は，生産財の生産には生産財を用いず，自分の労働だけで生産を行う。一方，消費財の生産には，自分で生産した生産財を用いて生産を行う。つまり，この生産者は，生産財を消費財生産のために生産し，それを使って消費財を生産しているのである。

例えば，釣り竿を作り，それを使って釣りを

1）マルクス派最適成長論は，大西［2002］によって課題と方法の全体像が示され，山下・大西［2002］によって基本モデルが初めて提起された。その後，大西・山下［2003］，山下・大西［2003］，山下［2005］，劉［2008］，金江［2008］，茹仙古麗・金江［2009］，田添・大西［2011］により，２階級モデル，分権的市場均衡モデルへの拡張，労働価値説との関係の考察など，様々な発展が試みられている。なお，大西・金江［2008］では，マルクス派最適成長論の研究動向が簡潔にまとめられている。

2）大西［2009］34 ページ。

する，という生産者を想定しよう。この生産者は，1日に10時間労働し，その中で釣り竿を生産し，残りの時間で釣りを行う。釣り竿作りと釣りは同時に行うことはできない。そして，釣り竿を1本生産するのに1時間の労働が必要であり，釣り竿1本で釣り1時間を行うと，魚が1匹釣れるとする。例えば，4時間で釣り竿4本を作り，この4本を使って，残りの6時間で釣りをすると，

（1匹／1本・1時間）×（釣り竿4本）×（釣り6時間）＝24匹

最初の括弧が生産財1単位（＝釣り竿1本）を使用した労働1時間当たりの生産量（＝漁獲量），次の括弧が生産に用いられた生産財の量（＝釣り竿の数），最後の括弧が消費財生産のための投下労働量（＝釣りを行った時間）である。釣り竿作りと釣りの時間配分を変化させると，釣れる魚の数が変化することは容易に理解されるだろう。

そして，翌日には，前日に作った釣り竿のうち3本（＝前日に使った釣り竿の3/4）が使用可能であるとしよう。前日と同じ労働時間配分を行ったとすると，釣り竿作りの時間も釣りの時間も前日と同じになるが，釣り竿は前日から残っている3本があるため，新たに生産された4本を加えて，全部で7本になる。よって，釣り竿7本を使って，6時間で釣りをすると，

（1匹／1本・1時間）×（釣り竿7本）×（釣り6時間）＝42匹

この場合，前日と比べて，釣れる魚の数は増加することになるのである。

では，このような想定において，第一に，この生産者は漁獲量を増やし続けることができるだろうか。それとも，その数には限界があるだろうか。また，第二に，仮に限界があるとしても，漁獲量を最も多くするためには，釣り竿を作るための時間と，それを使って釣りをする時間とを，どのように配分すればよいだろうか。これまでは，1人の生産者に関する問題として簡単なスケッチを示したが，これを生産者全体の労働時間の合計として捉えると経済全体の問題を扱っていることになることは容易に理解できるだろう。すなわち，第一の問題は，経済成長の限界に関する問題，第二の問題は，社会的総労働の最適な部門間配分に関する問題となる。これらの問題の解明がマルクス派最適成長論における主要な課題である。

3　本稿の課題

マルクス派最適成長論では多くの論点が扱われており，それらのすべてを考察することは本稿の範囲を超えている。そこで，本稿では，上で述べた2つの主要な課題に考察対象を限定しよう。マルクス派最適成長論では，経済成長には限界があり，さらに，消費財の生産量（正確には，それによって得られる通時的効用）を最大とする最適な労働配分比率が存在する，ということが主張されている。しかし，実は，この2つの問題について，マルクス派最適成長論では必ずしも明確に区分された議論が行われているわけではない。本稿では，マルクス派最適成長論における基本モデルの検討を通じて，第一に，労働配分比率の大きさにかかわらず，それを含めたパラメーターが一定であるならば，経済全体が定常状態に収束すること，また，第二に，そのような定常状態を前提にした上で，消費財の生産量を最大にする最適労働配分比率が存在することを明らかにする。そして，第三に，マルクス派最適成長論で示された結論の経済学的な意味を考察し，マルクス派最適成長論の今後の発展の可能性を探ることにする。

Ⅱ　経済成長の限界について

1　数式モデル

マルクス派最適成長の数式モデルには，いくつかのバージョンが存在するが，基本的には，以下の方程式体系に整理可能であると考えられ

る。

まず，生産財と消費財の生産関数は次のようなものである。

$$Y_1=BL_1 \tag{1}$$

$$Y_2=AK^{\alpha}L_2^{\beta} \tag{2}$$

ただし，$A>0$，$B>0$，$\alpha>0$，$\beta>0$

(1)式は生産財の生産関数である。生産財の生産に生産財が用いられる想定もあるが，ここでは，最も単純に，生産財の生産要素は労働だけであるとしよう。生産財の生産量（$=Y_1$）は，生産性（$=B$）に生産財生産のための投下労働量（$=L_1$）を掛けて決定される。また，(2)式は消費財の生産関数であり，新古典派で一般的に用いられているコブ・ダグラス型生産関数である。消費財の生産量（$=Y_2$）は，生産性（$=A$）に，生産に用いられている生産財の量（$=K$）のα乗と消費財生産のための投下労働量（$=L_2$）のβ乗を掛けて決定されることになる。αとβも広義の生産性を意味していると言える。このように，マルクス派最適成長論は，新古典派で一般的に用いられる生産関数を採用しつつも，労働を不可欠の生産要素としているところに特徴がある。このことから，体系に労働価値説を位置付ける際の必要条件を満たしていると言える。

なお，後に考察するように，その時点において生産された生産財の量（$=Y_1$）と生産に用いられている生産財の量（$=K$）は必ずしも同じではない。後者には，過去に生産され，現在も使用可能な生産財が含まれているからである。前者はフローであり，後者はストックである。

ここで，それぞれの生産に投下されている労働量（$=L_1$，L_2）を総労働量（$=L$）と労働配分比率（$=s$）によって表すと，

$$L_1=(1-s)L \tag{3}$$

$$L_2=sL \tag{4}$$

ただし，$L=L_1+L_2$，$0<s<1$

これらを(1)式と(2)式に代入すると，

$$Y_1=B(1-s)L \tag{5}$$

$$Y_2=AK^{\alpha}(sL)^{\beta} \tag{6}$$

このとき，生産財の生産関数である(5)式の右辺がすべてパラメーターであることに注意されたい。このことは，パラメーターが一定の場合，各時点における生産財の生産量も一定となることを意味している。実は，後に述べるように，生産財の生産関数におけるこの想定がマルクス派最適成長論の結論に大きく関わっている。

次に，需給関係は以下のように表される。左辺が供給，右辺が需要である。

$$Y_1=\delta K+\frac{dK}{dt} \tag{7}$$

$$Y_2=w_RL \tag{8}$$

ただし，$0<\delta<1$

(7)式は，生産財の需給関係を表している。右辺の第1項は生産に用いられている生産財の補填部分であり，生産に用いられている生産財（$=K$）に減価償却率（$=\delta$）を掛けて決定される。ある時点で生産に用いられた生産財が異なる時点においても継続的に使用可能であると想定されていることを考慮し，以下では，表現を簡略化するために，生産に用いられている生産財のことを固定資本と呼ぶことにしよう。第2項はt時点における固定資本の増加分である。すなわち，生産された生産財は，固定資本の補填とその新たな増加分として用いられる。(8)式は，消費財の需給関係を表しており，ここでは，単位時間当たりの実質所得（$=w_R$）の決定式となる。ただし，マルクス派最適成長論では，事実上，消費財は生産者が自分で消費することになっているため，この式が表す関係が明示的に議論されているわけではない。

このように，マルクス派最適成長論は，(5)〜(8)という4つの方程式によって構成されるものとして整理することができる。変数は，Y_1，Y_2，K，w_R，であり，他はパラメーターである。

なお，本節の議論は，マルクス派最適成長論

の一般的な議論とは，次の点で異なっている。それは，s を変数ではなく，パラメーターとし，その大きさを一定として議論を行っている点である。このような変更を加えた含意は，s の大きさにかかわらず，他のパラメーターと共にそれが一定でさえあれば，経済全体が定常状態に陥ることを明確に示すためである[3)]。

2　解法

では，このような4つの方程式を使うことにより，どのような経済成長の経路を描くことができるだろうか。まず，(7) 式に (5) 式を代入すると，

$$B(1-s)L=\delta K+\frac{dK}{dt} \tag{9}$$

これは非同次の線形微分方程式である。そこで，初期条件として，t=0 のとき K=0 となることを考慮して，この方程式を解き，K を t の関数として表すと，

$$K(t)=-\frac{B}{\delta}(1-s)Le^{-\delta t}+\frac{B}{\delta}(1-s)L \tag{10}$$

右辺を見ると，第1項は負であり，t の増加に伴って増加する。第2項はすべてパラメーターで表されており，正の定数となる。よって，K は t の増加関数であることがわかる。すなわち，時間の経過につれて，固定資本は増加するのである。そして，(6) 式より，消費財の生産量は固定資本の増加によって増加するのだから，時間の経過とともに，消費財の生産量も増加する。また，(8) 式より，それに伴って単位時間当たりの実質所得も増加することは明らかだろう。

しかし，それらの変数の増加には限界はないのだろうか。上の考察から，固定資本の増加によって，消費財の生産量も単位時間当たりの実質所得も増加することがわかっている。そこで，固定資本量の変化を表す (10) 式をあらためて見ると，右辺の第1項は t の増加に伴って増加するが，その値はゼロに限りなく近付くことがわかる。すなわち，第1項は，t が無限大になったとき最大値となり，その値はゼロである。そして，右辺の第2項は定数だから，右辺の第1項が最大値になったとき，K も最大値となる。よって，K の最大値（$=K^*$）は右辺の第2項と等しい。すなわち，

$$K^*=\frac{B}{\delta}(1-s)L \tag{11}$$

(5) 式より，(11) 式の右辺は，生産財の生産量（$=B(1-s)L$）を減価償却率（$=\delta$）で割ったものであることがわかる。固定資本はその大きさに収束するのである[4)]。

このように，固定資本は，時間の経過に伴って増加するが，いずれ，K^* に収束する。したがって，消費財の生産量は，固定資本の増加によって増加するものの，固定資本がいずれ増加の限界に達するため，その時点では，消費財の増加も停止し，一定となるのである。単位時間当たりの実質所得の変化も同様である。そのような定常値（$=Y_2^*$，w_R^*）を求めるため，まず，(11) 式を (6) 式に代入し，次に，その結果として得られた (12) 式を (8) 式に代入すると，

3）目的関数の設定も異なっているが，議論が複雑になることを避けるため，その点については，第Ⅲ節で述べることとする。

4）労働1単位当たりの固定資本量，すなわち，資本/労働比率（$=k$）の変化も固定資本の変化と同様である。(10) 式より，

$$k(t)=\frac{K(t)}{L}$$
$$=-\frac{B}{\delta}(1-s)e^{-\delta t}+\frac{B}{\delta}(1-s)$$

k は時間の経過に伴って上昇するが，右辺の第1項は限りなくゼロに近付くため，第2項に収束する。よって，資本 / 労働比率の定常値（$=k^*$）は，

$$k^*=\frac{B}{\delta}(1-s)$$

言うまでもなく，これは (11) 式で表されている固定資本量の定常値（$=K^*$）を L で割ったものと同じである。

$$Y_2^* = A\left[\frac{B}{\delta}(1-s)L\right]^{\alpha}(sL)^{\beta}$$

$$= A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}(1-s)^{\alpha}s^{\beta}L^{\alpha+\beta} \qquad (12)$$

$$w_R^* = \frac{Y_2^*}{L}$$

$$= A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}(1-s)^{\alpha}s^{\beta}L^{\alpha+\beta-1} \qquad (13)$$

(5)式で示されるように，生産財の生産量は一定である。こうして，このモデルにおける変数，Y_1，Y_2，K，w_R，は，(5)式，(11)式，(12)式，(13)式に示された定常値に収束し，経済全体が定常状態に陥ることになる。これが経済成長の限界である。

そして，この議論においては，パラメーターの値に関係なく，それが一定であれば，この結論が導き出されていることに注意されたい。実は，マルクス派最適成長論の一般的な議論では，s の特定の値において定常状態が成立することが主張されているが，上で考察したように，s は特定の値である必要はなく，任意の値において一定でさえあれば，このモデルから定常状態の成立を導き出すことができるのである[5]。

3　数値例による解釈

上で考察したように，経済成長には限界があるという，この数式モデルの結論は，固定資本が増加しない状態に陥ることが最大のポイントとなる。すなわち，固体資本の増加に限界が生まれるように，そもそも数式が設定されているのである。数式モデルを構築するということは，考察対象となっている変数の間に何らかの量的な関係を設定するということであり，よって，設定を設けていること自体に問題があるわけではない。考察すべきは，どのような設定によって，固定資本の増加，及び，その限界の存在が導き出されているかを明らかにすることである。

そこで，最初に示した例を用いることにしよう[6]。この生産者は，1日の労働時間10時間の

5）山下・大西［2002］では，固定資本の減価償却を捨象した場合でも，また，考慮した場合でも，s が特定の値になることによって固定資本の増加が停止し，定常状態に陥ると述べられている。特に，前者の場合には，$s=1$ となることによって固定資本の増加が停止することになっている。後者については本文で考察したので，ここでは，前者について考察しよう。なお，本文の想定とは異なるが，山下・大西［2002］と同様に，s の定義域を $0<s\leqq 1$ としておく。

さて，減価償却を捨象するということは，$\delta=0$ ということだから，それを(9)式に代入して，両辺を入れ替えると，

$$\frac{dK}{dt} = B(1-s)L$$

この式は t 時点における固定資本量の変化を表している。B や L は正だから，確かに，固定資本の減価償却を考慮しない場合には，生産者が生産財の生産を停止することによって，すなわち，$s=1$ とすることによって，そして，そのときにのみ，固定資本の増加は停止（$dK/dt=0$）する。しかし，$0<s<1$ の範囲において s を決定すれば，固定資本は増加（$dK/dt>0$）し続け，将来の消費財の生産量を増加させることも可能である。そして，そのように s を決定することを妨げる制約条件も存在しない。したがって，生産者が $s=1$ を選択し，固定資本を増加させず，経済全体が定常状態に陥るという状況の成立を主張しても，経済学的には意味がないだろう。上の理由から，生産者は，「最適」な選択として，$0<s<1$ の範囲において s を決定するはずだからである。実際，山下・大西［2002］においても，定常状態の成立が論証されているわけではなく，定常状態という，s や K が変化しない状態では，$s=1$ となる，すなわち，もし，定常状態が成立すれば，$s=1$ となる，ということを示す論理となっている。したがって，従来の見解とは異なり，固定資本の減価償却を捨象した場合には，固定資本は増加し続け，経済全体が定常状態に陥ることはない，と理解されるべきである。この結論は，マルクス派最適成長論のモデルから導き出されるものである。具体例については，注7）を参照されたい。

6）数式モデルは連続型の時間であるが，ここでは離散型の時間を用いている。他の具体例も同様である。

うち，最初の 4 時間で釣り竿を作り，残りの 6 時間で釣りをしていた。そして，使用している釣り竿の中の 1/4 は 1 日で使用不能となり，残りの 3/4 は翌日にも使用可能であった。すなわち，故障率が 25％である。この生産が続けられるとすると，最大で何本の釣り竿が保有されることになるだろうか。

1 日目には，釣り竿を 4 本生産するが，仮定により，25％が使用不能になるのだから，1 本が使用不能となり，翌日には，3 本が残っていることになる。翌日にも釣り竿を 4 本生産し，7 本となるが，仮定により，1.75 本が使用不能となるため，翌々日には，5.25 本が残っていることになる。本来，釣り竿の本数は整数で表されるべきだが，この場合，5 本は正常で，残りの 1 本は 75％の部分が壊れており，よって，その能力は通常の 25％しかなく，また，修理のためには，新たに 1 本を生産する労力の 75％が必要になるとしよう。では，この過程を繰り返していくと，釣り竿の保有量はどこまで増加するだろうか。答えは，16 本である。というのも，16 本に達したとき，4 本が使用不能になるのだから，翌日には 12 本が残っており，このとき 4 本作ると，再び 16 本になるからである。保有量が 16 本未満の場合は，壊れた釣り竿は 4 本未満であるため，翌日に 4 本生産すれば，釣り竿の保有量は必ず増加する。逆に，もし，保有量が 16 本を超えていたとすると，壊れる釣り竿は 4 本を超えることになり，翌日の釣り竿の保有量は必ず減少する。この想定では，釣り竿は 16 本までしか増加させることができないのである。つまり，生産された釣り竿の量と壊れた釣り竿の量とを比較して，前者が後者よりも大きい場合は，釣り竿の保有量は増加し続け，逆の場合は，減少する。そして，両者が等しくなったとき，釣り竿の保有量の変化が停止し，そのときに保有量が最大となるのである。この関係は，次の表 1 のようにまとめることができるだろう。

また，壊れた釣り竿の量は，釣り竿の保有量に故障率を掛けたものだから，表 1 において釣り竿の保有量が最大値で一定となる状況②の場合の等式を取り出すと，

釣り竿の生産量＝壊れた釣り竿の量
＝釣り竿の最大保有量×釣り竿の故障率

よって，釣り竿の最大保有量は，

釣り竿の最大保有量＝釣り竿の生産量 / 釣り竿の故障率

このように，釣り竿の最大保有量は，釣り竿の生産量を故障率で割ることによって求めることができるのである[7]。

そして，先に考察した固定資本量の変化に関する解法は，実は，このような関係を数式によって示したものに過ぎない。固定資本量の変化を考察する際に中心な役割を果たした⑺式を次のように変形してみよう。

$$\frac{dK}{dt}=Y_1-\delta K \tag{7'}$$

これは固定資本量の変化（＝dK/dt）を示す式となる。右辺の第 1 項は，各時点における生産財の生産量（＝釣り竿の生産量）であり，⑸式についての説明の際に強調したように，パラメーターが一定の場合，この大きさも一定とな

表 1　釣り竿保有量の変化

状況	補填と生産の大小関係	釣り竿の保有量
①	釣り竿の生産量＞壊れた釣り竿の量	増加
②	釣り竿の生産量＝壊れた釣り竿の量	一定＝最大値
③	釣り竿の生産量＜壊れた釣り竿の量	減少

る。右辺の第２項は，固定資本量に減価償却率を掛けたものであり，固定資本の減価償却部分（＝壊れた釣り竿の量）を表している。K が増加するにつれて，第２項の絶対値は大きくなる。この式から，固定資本は，生産財の生産量が固定資本の減価償却部分より大きい場合（$Y_1 > \delta K$）には増加（$dK/dt > 0$）し，逆の場合（$Y_1 < \delta K$）には減少（$dK/dt < 0$）する，そして，両者が等しくなる場合（$Y_1 = \delta K$）に一定（$dK/dt = 0$）となることがわかるだろう。固定資本が増加するための源泉は，生産財の生産量と固定資本の減価償却部分との差額（$= Y_1 - \delta K$）である。生産財の生産量は一定であるが，固定資本の減価償却部分は増加し続けるため，前者が後者より大きい状態から出発しても，いずれ前者と後者とは等しくなり，固定資本の増加が停止してしまうのである。また，固定資本量の定常値についても，数式モデルにおける (11) 式を見ると，釣り竿の最大保有量を示す上の式と全く同じであることがわかる。各時点における生産財の生産量（＝釣り竿の生産量）が一定であるため，減価償却率（＝故障率）が一定の場合，固定資本は，生産財の生産量を減価償却率で割った大きさで一定となり，最大値になるのである。

このように考えると，マルクス派最適成長論によって導き出された経済成長の限界についての結論は，各時点における生産財の生産量が一定であることに大きく依存していることがわかる。そして，生産財の生産量が一定となるのは，労働配分比率（＝s）などのパラメーターが特定の値になっているためではない。パラメーターが任意の大きさにおいて一定であれば，各時点における生産財の生産量が一定となるのである。したがって，生産財の生産関数である (5) 式において，例えば，生産性（＝B）の上昇や総労働量（＝L）の増加によって生産財の生産量（$= Y_1$）が増加し続けるように数式を設定すれば，ある意味では，それは自然な設定であるが，固定資本の増加には限界がなく，経済成長の限界はないという結論になるだろう[8)]。

確認のために，固定資本量の変化をグラフで示すことにしよう。図１は，(7)′ 式を使って釣り竿保有量の変化を示したものである。故障率（$= \delta$）25％のもとで，毎日の釣り竿の生産量（$= Y_1$）が４本の場合（生産財を生産するための労働時間としては，$L_1 = 4$）と，10 本の場合（同様に，$L_1 = 10$）である。それぞれを釣り竿の最大保有量を示す式に代入すると，最終的には，前者は 16 本に，後者は 40 本に収束することになる。それらが，それぞれの労働配分における釣り竿保有量の定常値＝最大値である。なお，後者については，釣りを全く行わず，労働時間のすべてで釣り竿作りを行った場合を示している。これでは，労働配分比率（＝s）がゼロとなり，その定義域（$0 < s < 1$）を逸脱すること

７）次の２つの場合についても考えてみよう。第一に，生産に用いられた生産財が次の時点ではすべて使用不能になっている場合である。これは減価償却率＝故障率が 100％になっているということであり，また，生産財がすべて流動資本として用いられているとも解釈できるだろう。この場合，釣り竿は翌日にはすべて使用不能になるのだから，最初の時点から，表１における状況②が成立していることになり，釣り竿の保有量は各時点における釣り竿の生産量に等しく一定となる。この経済は最初の時点から定常状態である。第二に，今度は逆に，生産に用いられた生産財が次の時点でもすべて使用可能となっている場合である。これは減価償却率＝故障率が０％になっているということであり，生産財を固定資本として取り扱うが，減価償却率を捨象するという想定である。この場合には，壊れる釣り竿の量はゼロなのだから，表１における状況①が必ず成立し，釣り竿の保有量は増加し続けることになる。この経済は定常状態に陥ることはない。

８）ただし，労働配分比率の変化は，各変数に必ずしも同じ方向に影響を及ぼすわけではない。この問題については，第Ⅲ節で考察されることになる。

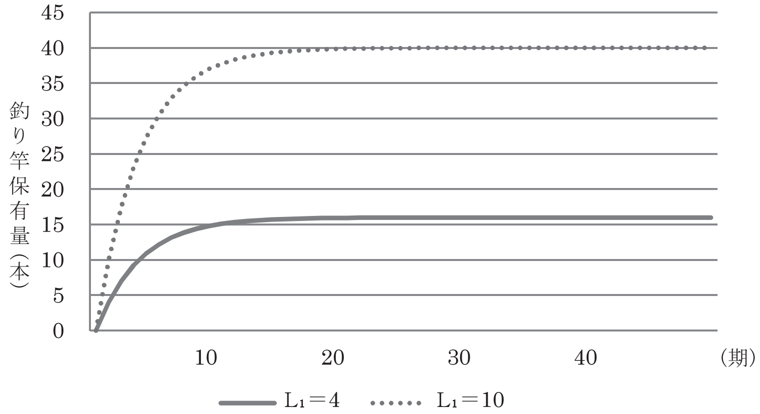

図１　釣り竿保有量の変化

になるが，この曲線は，釣り竿の保有量の限界を示していると言える。すなわち，このモデルにおいては，どのような選択を行ったとしても，この曲線を越えて釣り竿保有量が増加することはできない。その意味で，この曲線は固定資本増加の上限を示しているのである。このような上限が存在するということは，このモデルには，労働配分比率の大きさにかかわらず，さらに，その大きさが変化したとしても，固定資本の増加に限界があることが示されていると言える。

Ⅲ　最適労働配分について

1　数式モデル

前節では，パラメーターが一定の場合，時間の経過に伴って固定資本量は定常値＝最大値に達し，経済全体が定常状態に陥ることが示された。本節では，そのような定常状態の成立を前提にした上で，パラメーターの１つである労働配分比率（＝s）の変化に着目して考察を行う。

まずは，前節で考察した定常状態を確認しておこう。表現の統一のために(5)式の Y_1 に ＊ を付けて(14)式とすると，４つの変数，Y_1，Y_2，K，w_R，の定常値は，以下の式で表すことができる。右辺はすべてパラメーターである。

$$Y_1^* = B(1-s)L \tag{14}$$

$$Y_2^* = A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}(1-s)^{\alpha}s^{\beta}L^{\alpha+\beta} \tag{12}$$

$$K^* = \frac{B}{\delta}(1-s)L \tag{11}$$

$$w_R^* = A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}(1-s)^{\alpha}s^{\beta}L^{\alpha+\beta-1} \tag{13}$$

では，他のパラメーターが一定の場合，s の変化は定常値にどのような影響を及ぼすであろうか。s とは労働配分比率であり，総労働量の中で消費財生産のために行われる労働量の割合（$=L_2/L$）である。s が消費財の生産量を最大にするように決定されるとすると，そのような「最適」な s を特定することはできるだろうか。また，特定できるとすれば，その大きさはどのようなものになるだろうか。数学の問題としては，(12)式について，$0<s<1$ の定義域において，Y_2^* の最大値をもたらす s の値を求める，という最適化問題となる。これがマルクス派「最適」成長論の「最適」が意味するところである。

なお，本節の議論は，マルクス派最適成長論の一般的な議論とは，以下の２つの点で異なっている。

第一に，通時的効用の最大化問題ではなく，消費財生産量の最大化問題としていることであ

る。この問題について，マルクス派最適成長論では，生産者の通時的効用を目的関数とし，その最大化問題を動学分析の最適制御理論を用いて考察する，という方法が採られている。しかし，効用関数は消費財の生産量＝消費量の増加関数として設定されるため，消費財の生産量を目的関数とし，その最大化問題として考察しても，結論に本質的な相違は生じないだろう。むしろ，通時的効用の最大化問題として設定することによって，資本主義経済を運動させる主要な動力を資本の無制限な自己増殖欲求ではなく，個人の効用最大化行動として理解しているのではないか，という誤解を招くことにもなりかねない。したがって，マルクス派最適成長論において，この問題を効用最大化問題として解く積極的な意義はあまりないと考えられる[9)]。

第二に，動学分析ではなく，比較静学分析を行っているということである。繰り返し述べたように，前節の議論において，パラメーターが一定の場合，その任意の大きさにおいて，消費財の生産量は最大値となる定常値に収束することが明らかになっている。したがって，本節では，消費財の生産量が定常値に収束するまでの過程における s の変化の過程を求めるのではなく，成立している定常状態＝均衡状態を最も望ましいものとする s の最適値を求めることにする。これは異なる均衡状態の比較を行うものであり，比較静学の問題となる。

２　解法

この問題の解法としては，(12) 式をもとに，s の最適値を求めることも可能であるが，ここでは，ラグランジュ乗数法を用いることにしよう。

まず，(2) 式より，消費財の生産関数は次のように規定されていた。

$$Y_2 = AK^{\alpha}L_2^{\beta} \tag{2}$$

次に，(11) 式に (3) 式を代入すると，

$$K^* = \frac{B}{\delta}L_1 \tag{15}$$

これを (2) 式に代入し，消費財生産量の定常値を L_1 と L_2 で表すと，

$$\begin{aligned} Y_2^* &= A\left(\frac{B}{\delta}L_1\right)^{\alpha}L_2^{\beta} \\ &= A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}L_1^{\alpha}L_2^{\beta} \\ &= CL_1^{\alpha}L_2^{\beta} \end{aligned} \tag{16}$$

ただし，$C = A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}$

したがって，ここでの問題は，$L_1 + L_2 = L$ という制約のもとで，(16) 式で示された目的関数 Y_2^* を最大化する L_1 と L_2 を求める，という最適化問題となる。すなわち，

$$\max Y_2^* = CL_1^{\alpha}L_2^{\beta}$$

ただし，$L = L_1 + L_2$

そこで，この問題でのラグランジュ関数を Z とすると，

$$Z = CL_1^{\alpha}L_2^{\beta} + \lambda(L - L_1 - L_2)$$

Z が極値をとるための１階の条件は，次の連立方程式からなっている。

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = L - L_1 - L_2 = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L_1} = \alpha CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta} - \lambda = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L_2} = \beta CL_1^{\alpha}L_2^{\beta-1} - \lambda = 0 \tag{19}$$

(18) 式と (19) 式を用いて λ を消去し，整理すると，

$$CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta-1}(\alpha L_2 - \beta L_1) = 0$$

ここで，$CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta-1} \neq 0$，だから，

$$\alpha L_2 - \beta L_1 = 0 \tag{20}$$

すなわち，最適労働配分における労働量（$= L_1^{\$}$，$L_2^{\$}$）の比は，

$$\frac{L_1^{\$}}{L_2^{\$}} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{21}$$

これを (17) 式に代入して整理すると，

9）マルクス派最適成長論の基本モデルに資本の自己増殖欲求の視点を取り入れた拡張の試みは既に行われている。注１）を参照されたい。

$$L_1^{\$}=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)L$$

$$=\frac{L}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}} \tag{22}$$

$$L_2^{\$}=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)L$$

$$=\frac{L}{1+\dfrac{\alpha}{\beta}} \tag{23}$$

したがって，最適労働配分比率（$=s^{\$}$）は，

$$s^{\$}=\frac{L_2^{\$}}{L}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{\beta}} \tag{24}$$

この値が定義域（$0<s<1$）の範囲にあることは明らかであり，このとき，Y_2^* は極値を持つことになる[10,11]。

次に，極値が最大値となるための２階の十分条件を確認しよう。この問題の縁付きヘシアンを求めると，

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha(\alpha-1)CL_1^{\alpha-2}L_2^{\beta} & \alpha\beta CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta-1} \\ 1 & \alpha\beta CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)CL_1^{\alpha}L_2^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

$$=\alpha CL_1^{\alpha-2}L_2^{\beta-1}(\beta L_1-\alpha L_2+L_2)$$

$$+\beta CL_1^{\alpha-1}L_2^{\beta-2}(\alpha L_2-\beta L_1+L_1) \tag{25}$$

極値が最大値となるための２階の十分条件とは，極値において，縁付きヘシアンが正になることである。(20) 式より，極値においては，$\alpha L_2-\beta L_1=0$，であるから，それを (25) 式に代入すると，

$$|\bar{H}|=\alpha CL_1^{\alpha-2}L_2^{\beta}+\beta CL_1^{\alpha}L_2^{\beta-2}>0$$

よって，この極値が最大値となる十分条件が満たされていることが確認できた。

そこで，最後に，極値における消費財の生産量の最大値を求めてみよう。Y_2 の一般的な極値である Y_2^* と区別するため，Y_2^* の極値＝最大値を $Y_2^{*\$}$ として表すこととする。(22) 式と (23) 式を (16) 式に代入し，$C=A(B/\delta)\alpha$ を考慮して最大値を求めると，

$$Y_2^{*\$}=\frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}A\left(\frac{B}{\delta}\right)^{\alpha}L^{\alpha+\beta} \tag{26}$$

右辺はすべてパラメーターであることを確認されたい。これが消費財生産量の極値における最大値であり，マルクス派最適成長論における経済成長の限界点を示すものとなる。その大きさ

10）この場合の資本 / 労働比率についても確認しておこう。注４）において，資本 / 労働比率の定常値を次のように示した。

$$k^*=\frac{B}{\delta}(1-s)$$

この式に (24) 式を代入し，他の定常値と区別するために $ を付けて表すと，

$$k^{*\$}=\frac{B}{\delta\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}$$

11）(21) 式で示されているような，生産要素投入量の最適な組み合わせの比が α と β の比によって決定されるという結論は，実は，マルクス派最適成長論の議論において導き出されたオリジナルなものではない。一般に，コブ・ダグラス型生産関数において，生産要素投入量の最適な組み合わせの比は，α と β の比と要素価格の比（＝一定）の逆数との積によって決定される。これは，予算制約のもとでの生産量の最大化問題，あるいは，生産量が与えられた場合の投入費用の最小化問題の解として知られている一般的な事実である。マルクス派最適成長論では，本源的な生産要素は労働だけであり，そのような１つの生産要素の配分が問題になっているのだから，要素価格の比は，当然，１となる。すなわち，ここでのマルクス派最適成長論の結論は，コブ・ダグラス型生産関数が持っている性質について，要素価格の比が１となっているという特別な場合について示したものであると言える。なお，２種類の生産要素（この場合は，L_1 と L_2）をそれぞれ横軸と縦軸にとって等産出量曲線を描き，各産出量における最適な生産要素投入量の組み合わせを示す点を結んだ軌跡は，拡張経路と呼ばれている。すなわち，拡張経路とは，生産要素投入量の最適な組み合わせのもとで生産が拡大される状況を表していることになるが，上の理由から，コブ・ダグラス型生産関数における拡張経路は原点を通る直線となる。

は，パラメーターである広義の生産性（＝A，B，α，β），減価償却率（＝δ），投下労働量（＝L）によって決定されるのである。

ところで，パラメーターのうち，広義の生産性と減価償却率に関するものは生産技術によって決定されるものであるため，上の表現は，消費財生産量の極値における最大値は，生産技術が与えられた場合，投下労働量によって決定される，と言い換えることもできるだろう。このような関係は，しばしば仮定されるように，生産関数が規模に関して収穫一定であるとすると，より簡潔に示すことができる。この場合，$\alpha+\beta=1$，となるので，それを(26)式に代入すると，

$$Y_2^{*\$}=\alpha^\alpha\beta^\beta A\left(\frac{B}{\delta}\right)^\alpha L$$
$$=\tau L \qquad (27)$$

ただし，$\tau=\alpha^\alpha\beta^\beta A\left(\frac{B}{\delta}\right)^\alpha$

みられるように，$Y_2^{*\$}$は，生産技術によって決定される$\tau$と総労働量であるLとの積によって決定される。よって，所与の生産技術のもとで，すなわち，τが一定のもとでは，$Y_2^{*\$}$はLの増減に従って変化し，Lが一定であれば，$Y_2^{*\$}$も変化しない。Lと$Y_2^{*\$}$の関係をグラフで表すと，図2のように，原点を通る直線となる。マルクス派最適成長論は，労働を唯一の不可欠な生産要素としているのだから，このような結論が導き出されるのは極めて自然である。

3　数値例による解釈

前節と同様な例を用いて，この問題を考えてみよう。前節の例において，生産者は，4時間で釣り竿を作り，残りの6時間で釣りをする，という生産を行っていた。そして，この生産を継続した結果，釣り竿の保有量は16本になっていた。よって，現在，この生産者は，釣り竿作りに4時間を使い，残りの6時間で，16本の釣り竿を使って釣りをしていることになる。すなわち，

（1匹／1本・1時間）×（釣り竿16本）×（釣り6時間）= 96匹

この労働配分を続ける限り，釣り竿保有量は変化せず，よって，漁獲量は変化しない。これが，この労働配分における漁獲量の最大値である。

そこで，問題は，この生産者が，他の労働配分を選択した場合の定常値において，漁獲量を現在より増やすことができるかどうか，ということである。もし，できるとすれば，漁獲量を最も大きくする労働配分の大きさはいくらにな

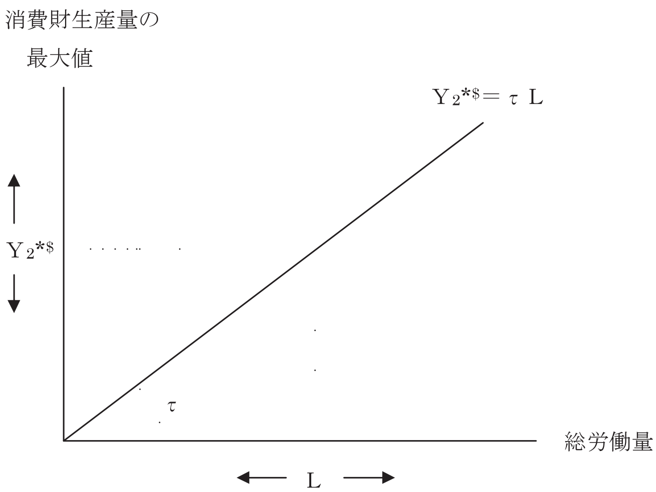

図2

表2 定常値の比較

定常値	釣り竿作り	釣り	釣り竿保有量	漁獲量
①	1	9	4	36
②	2	8	8	64
③	3	7	12	84
④	4	6	16	96
⑤	5	5	20	100
⑥	6	4	24	96
⑦	7	3	28	84
⑧	8	2	32	64
⑨	9	1	36	36

るだろうか。

この問題は，定常値における漁獲量を比較することによって，簡単に解決することができる。表2はそれぞれの労働配分における定常値である。先の解法における比較静学とは，これらの定常値を「比較」したものである。

みられるように，定常値で最も漁獲量が大きくなるのは，定常値⑤の場合である。すなわち，5時間で釣り竿を生産し，残りの5時間で釣りをするという労働配分において，漁獲量の定常値が最大値となる。したがって，このとき，最適な労働配分が行われたことになるのである[12)]。

この結論は，上の数式モデルの結論と一致している。この例は，A＝1，B＝1，δ＝0.25，α＝β＝1，L＝10，の場合を示したものである。それらを，(22)式，(23)式，(26)式に代入すると，Y_2^* の定常値が最大値となるための労働配分は，L_1＝L_2＝5，であり，そのときの消費財生産量の最大値は，$Y_2^{*\$}$＝100，となる。

12）本節は比較静学分析であり，異なる定常値＝均衡値を比較することを目的としている。ここでの結論は，(24)式で示されているように，最適労働配分比率（＝$s^\$$）は，αとβの比によって決定されるということであり，そのような最適労働配分比率が成立するかどうか，あるいは，どのような経路を経て最適労働配分比率が成立するか，という問題については説明できない。例えば，この生産者が，釣り竿の保有量が十分に大きくなったと考え，釣り竿の生産には1時間しか使わず，残りの9時間で釣りをしたとしよう。すると，前日の釣り竿の保有量16本のうち，その3/4の12本が使用可能として残っているため，生産した1本を合わせて，釣り竿の保有量は13本である。そして，9時間の釣りを行ったのだから，漁獲量は次のようになる。

（1匹／1本・1時間）×(釣り竿13本)×(釣り9時間) = 117匹

この場合，漁獲量が増加し，最適労働配分が行われている定常値⑤の生産量さえも上回ることになる。もちろん，これは一時的な現象であり，その後も，この割合で労働配分が行われたとすると，釣り竿の保有量が減少するため，翌日は96.8匹，さらに，翌々日には81.6匹となり，漁獲量はその定常値①の36匹まで低下することになる。しかし，一時的とはいえ，最適労働配分ではない割合を選択したにもかかわらず，漁獲量が増加したり，しかも，定常値の最大値である100匹を超えた漁獲量を経験したりすることができるのだから，この生産者の行動としては，すべての状況において必ずしも最適労働配分を選択するわけではない可能性があると推測できる。上のような状況では，最適労働配分を選択しないかもしれないし，少なくとも，直線的に定常値⑤を目指さないかもしれない。このような異なる均衡間での移動経路の問題は動学分析を必要とすることになる。

Ⅳ　おわりに

以上においては，マルクス派最適成長論の基本モデルの検討を通じて，その主要な２つの問題について考察を行った。基本モデルから導き出された結論は，第一に，固定資本は，生産財の生産量を減価償却率で割った大きさを超えて増加することができず，そのため，いずれ経済全体は定常状態に陥る，第二に，そのような定常状態において消費財の生産量を最大にする最適な労働配分は，コブ・ダグラス型生産関数における生産要素の指数（$=\alpha$，β）の比によって決定される，ということである。したがって，本稿で導き出された結論は，マルクス派最適成長論として数式モデルから導き出された経済成長の限界や最適労働配分の存在に関する結論を補強するものである。

そして，マルクス派最適成長論では，数式モデルから導き出された結論について，資本主義経済は最適な成長経路を進んだ結果として成長の限界に達するのであり，このことは資本主義経済が消滅する過程を表している，と解釈している。このような解釈こそが，この研究における最も重要な主張である。“最適成長”という用語の語感から，マルクス派最適成長論は安定的に持続する経済成長の姿を描いているのではないか，という誤解があるかもしれないが，そうではない。最適な成長が行われたとしても，資本主義経済には成長の限界が存在し，それは資本主義経済の消滅を意味する，ということを主張しているのである。

そこで，最後に，このような解釈の妥当性について検討を加えなければならない。その解釈が合理的なものとなるためには，さらにどのような議論が必要となるのか，マルクス派最適成長論の発展の可能性を探ることにしよう。ここでは，以下の２つの点を指摘しておきたい。

第一に，生産関数における資本の技術的構成の取り扱いについてである。資本の技術的構成とは，簡略化して述べると，生産過程における生産手段と労働者数との合理的な割合のことであり，マルクス派では，生産技術を所与とすれば，その割合も決定されると考えられている。生産関数としては，レオンチェフ型の生産関数に分類されることになるだろう。例えば，釣り竿１本を使って釣りをするという生産過程において，必要な労働者は１人である。鍬１本を使って畑を耕す，トラック１台を使って荷物を運ぶ，などに置き換えても同様であろう。生産者を２人，３人と増やしても，同時に使用することはできないのだから，生産量は変化しない。逆に，生産者１人に対して，釣り竿２本，鍬２本，トラック２台と，生産手段を増やしても，生産量を増やすことはできないだろう。生産技術を所与とすれば，生産手段と労働者は基本的には代替不可能な関係にあり，両者の間には何らかの合理的な量的関係が存在するはずである。しかし，マルクス派最適成長論では，資本の技術的構成について考慮されていない。これでは，例にあるように，１人の生産者が釣り竿を同時に 20 本使用して釣りをする，というような経済学的にはあまり意味のない結論を導き出すことになってしまう。１人の生産者は釣り竿を同時に１本しか使用しないという合理的な想定のもとでは，この生産者にとって，２本以上の釣り竿を保有することは無意味であり，釣り竿の最大保有量は１本となる。この場合，固定資本の増加が限界に達したために増加できないのではなく，その必要がないために，固定資本を増加させないのである。これは，明らかに，マルクス派最適成長論が主張する経済成長の限界とは意味が異なるものである。したがって，マルクス派最適成長論の主張が合理的な意味を持つためには，数式モデルから導き出された保有される固定資本量の最大値と資本の技術的構成の観点から決定された必要とされる固定資本量との大小関係，及び，相互作用について考察することが必要になるのではないだろうか。相

互作用については，マルクス派最適成長論が資本の技術的構成を考慮していないことが逆にメリットとなり，なぜそのような技術が生み出されるのか，資本の技術的構成を規定する理論を展開できる可能性を持っているとも考えられる。

第二に，総労働量と生産性の変化についてである。マルクス派では，経済成長に伴い，その程度は経済成長の大きさよりも小さい（上で述べた，資本の技術的構成の変化に影響を受けるからである）が，雇用される労働者数は増加し，よって，投下される総労働量も増加すると理解されている。また，生産性についても，諸資本の競争によって技術革新が引き起こされ，生産性が上昇すると理解されている。ところが，マルクス派最適成長論では，投下される総労働量も，生産性も一定であり，そのために，生産財の生産量も一定となる。あるいは，労働配分を変化させたとしても，生産財の生産量の増加には限界があることになる。そのような想定のもとで，生産財の生産量と固定資本の減価償却部分との差額によって固定資本が増加し，それが経済成長の源泉となっているのである。投下労働量も増加せず，生産性も上昇せず，生産財の生産量も増加しない（あるいは，増加に限界がある）状況で，生産財の生産量と固定資本の減価償却部分との差額が経済成長の源泉となるという想定は，資本主義経済における経済成長の本質的な分析として適しているだろうか。しかも，労働が唯一の本源的生産要素であることを前提にすれば，投下される総労働量が一定で，生産性も一定であれば，生産財や消費財の生産量の増加がいずれ限界に達するということは，ある意味で，自明のことになってしまう。そのことは，(26)式や(27)式，さらに，図２でも端的に示されているところである。むしろ，この議論の意義は，逆説的ではあるが，経済成長には投下労働量の増加や生産性の上昇が必要である，ということを示したことにあるのではないだろうか。そのように考えると，資本主義経済における経済成長には限界があるというマルクス派最適成長論の主張が合理的な意味を持つためには，基本モデルにおいてパラメーターとしている要素の分析が求められることになる。例えば，資本主義経済において総労働量の増加や生産性の上昇が一定期間は継続的に行われるとしても，それらには限界があり，いずれは数式モデルで想定しているような，その大きさを一定とする状態に陥ることになる，という分析が必要になるだろう。

もちろん，これらの指摘は，いわば「外在的」なものであり，マルクス派最適成長論に内在する非合理性を指摘しているわけではない。抽象的な理論によって具体的な現象を解釈する際に必要な上向の過程のいくつかを指摘したものである。しばしば，理論研究に対して，「その理論は非現実的だ」という批判がなされることがあるが，理論が現実＝現象と全く同じであれば理論研究の必要はない。理論によって解明された現象の本質とその本質が現象した姿とが異なっていることは当然ありうる。むしろ，目に見える現象とは異なる本質を見つけ出すところに理論研究の意義があるのである。その意味で，マルクス派最適成長論に対して，単に，非現実的であるとする批判は妥当しないだろう。理論自体の検討は内在的に行われるべきであり，その上で，現実を解釈するための上向が求められるのである。

最初に述べたように，マルクス派最適成長論は，新古典派と通訳可能な理論の構築を目的としているため，基本的な部分で新古典派の理論を取り入れている。よって，様々な点において「マルクス派ではない」という指摘を受けることも予想されるが，資本主義経済の本質的な特徴を示すためにマルクス派の要素を強くすれば，本来の目的であった通訳可能性が低下してしまう。そのような「マル経でもあり，近経でもある」という困難なパスの中で研究が進めら

れているのである。その意味でも，マルクス派最適成長論は進化する過程にあるということが理解されなければならないだろう。今後の発展が注目に値するものである。

参考文献

大西広［2002］「マルクスの経済学」三土修平・大西広編『新しい教養のすすめ　経済学』昭和堂

――［2009］「数学利用におけるマル経 / 近経問題」『季刊　経済理論』第 46 巻第 3 号，桜井書店

大西広・金江亮［2008］「『マルクス派最適成長論』の到達点と課題」『立命館経済学』第 56 巻第 5・6 号

大西広・山下裕歩［2003］「新古典派成長論型マルクス・モデルにおける資産格差と時間選好率格差――ローマー的“搾取”への影響――」『政経研究』第 81 号

金江亮［2008］「『マルクス派最適成長論』の現実性と価値・価格問題」『経済論叢』第 182 巻第 5・6 号

田添篤史・大西広［2011］「『マルクス派最適成長モデル』における価値分割と傾向法則」『季刊　経済理論』第 48 巻第 3 号，桜井書店

山下裕歩［2005］「新古典派的『マルクス・モデル』における Roemer 的『搾取』の検討」『季刊　経済理論』第 42 巻第 3 号，桜井書店

山下裕歩・大西広［2002］「マルクス理論の最適成長論的解釈――最適迂回生産システムとしての資本主義の数学モデル――」『政経研究』第 78 号

――・――［2003］「『マルクス・モデル』の諸性質と生産要素としての労働の本源性」『経済論叢』第 172 巻第 3 号

劉洋［2008］「『マルクス派最適成長論』における政府」『経済論叢』第 182 巻第 4 号

茹仙古麗吾甫尔・金江亮［2009］「3 部門『マルクス派最適成長論モデル』と強蓄積期間」『経済論叢』第 183 巻第 1 号