数学における概念拡張の二つの様式

八杉　滿利子

目次

第1章　序章

1.1　はじめに

数学の各理論の発展に際しては様々な拡張が行われる。それは数学の実践自体から、すなわち数学の内部からの要請があるからだ。拡張には対象領域の拡張、演算あるいは関係などの定義域の拡張、新しい演算の導入などが含まれる。これらを総合すると、何等かの意味の新しい概念形成、あるいは概念拡張と表現できよう。

概念拡張に際して任意に新しい概念を定義しても科学の発展に貢献しないことは言うまでもない。それぞれの場面でなんらかの意味で必要に応じて拡張の方向が決まってゆく。同時にしかし当然ながら新概念がそれまでの知識から自動的・機械的に導かれるわけではない。科学者は一定の軌道内に留まりながら、その創造力を発揮して科学の発展の方向を決めてゆく。

概念の発展には前段階から断絶した飛躍もあり得るが、接続的な発展も多い。内容がより豊富になりながら、前段階と何等かの意味で同質な場合である。ではどのような条件のもとである概念拡張が同質的と考えてよいのだろうか。あるいは妥当で自然なものと考えられるのだろうか。この問いもそれに対する答も一言で書ききれるようなものではない。同質性を何等かの意味で保証する、数学理論とは独立な哲学的基礎を求めるとしても、一意的な答えは見いだせない

だろう。むしろ数学そのものに語らせる試みのほうが適切なのではないだろうか。この観点は[22]（Quine 1969）および[17] （Kitcher 1988）に啓発されて得たものである。

理論の拡張に関する数学観は時代によって変遷し、また数学の実践場面によっても異なるだろう。本論では、そのような数学観として１９世紀と２０世紀における主要な様式をそれぞれ考察する。それらはその後の数学の流れに決定的な影響を与えたとも言えるが、またそれらはその時代の数学の大きな流れを捉えたとも言える。その一つは１８５４年のデデキントの「大学教授資格取得講演」における「数学における新しい関数の導入について」で表明されているものであり（[6]: Dedekind 1854,『資格論文』と略す)、もう一つは１９５０年にアメリカ数学連合誌に掲載されたブルバキの「数学の建築術」で表明されているものである（[2]: Bourbaki 1950,『建築術』と略す)。

これらが重要な数学観であることは確かであるが、本論でとくに考察の対象とする理由は、それらが筆者の数学活動から生じた疑問への一つの答えとしての意味を持つからである。本論の問題の起源は連続体上の計算可能性問題の三つの研究方法にある。三方法とは、関数空間理論によるもの、一様位相によるもの、および極限再帰関数によるものである。詳細は後節に譲るが、ここで簡単に経緯を述べておく。

数学の対象やその上の演算などをアルゴリズムの観点から特徴付ける、数学における計算可能性という分野がある。計算可能実数など基礎になる領域における計算可能性の定義の後に、その上の連続関数の計算可能性概念が、入力値から出力値を求める機械的（実効的）な方法があることおよび連続率が再帰関数によって得られること（実

効的連続性）の二条件によって定義される。この定義は計算可能性概念を良く表現しており、計算可能という立場で数学の整合的な展開を可能にする。その意味で研究者たちの間で古くからその妥当性が合意されている。

他方多くの有用な不連続関数にも何等かの意味のアルゴリズムを付与できることが予想された。しかし不連続関数の場合には上記のどちらの条件も一般に成り立たないことが示される。そもそも不連続なのであるから、実効的連続性は問題外である。そのために不連続関数については連続の場合とは異なる視点で計算可能性を考えなければならない。連続の場合と異なって、何をもって計算可能と認めるか、という問題があるので、視点によって異なる特徴づけが行われるのは当然のことである。実際いくつもの理論がある。我々は上記の三つの研究方法を試みた。どの方法によっても興味深い数学の理論を展開でき、また、具体的な例に関してはどの理論でも計算可能性の成否は同じになる。その意味でこれらの方法には充分に数学的な価値がある。

三種の研究方法は2.3節で説明するが、標語的に極限再帰関数によるもの（2.2.3節）、実効的一様位相によるもの（2.3.1節）および計算可能性構造をもつ関数空間によるもの（2.3.2節）の三種である。これらは互いに異質な方法であるが、個々の具体的な関数については計算可能性という性質は同値になる。また前二者の関数値の実効的計算可能性は、ある自然な一般的条件のもとで同値になることが[38]（Yasugi and Washihara 2010）で示されている。以上の数学的な表現は付録Aで呈示する。

これらの理論の採用がアドホックでないことを示すためには、それ

らにおける計算可能性概念が連続関数の場合から不連続関数の場合に自然に接続することの説明が必要なのである。上述の二つの概念拡張の様式を精査した結果、極限再帰関数による理論と一様位相による計算可能性理論はデデキントの数学観に適合する（3.3.2節と3.3.3節）。[38]の結果を鑑みれば、両者が同じ拡張概念に乗ることは自然である。他方関数空間論による計算可能性理論はブルバキの数学観に適合する（4.2節、4.3.3節）。また、見方によれば一様位相の場合もブルバキの観点で説明可能である。二つの数学観はその意味でも無関係ではない。実際に3.2.5節と4.3.2節で提案する”内的必要性”と”保存性”という概念拡張の”同質性”はどちらにも付与可能なのである。

本論の主題である、数学における概念拡張の二つの様式についての考察（3章と4章）のためには、議論の基礎として採用した其々の文献（『資格論文』と『建築術』）を丁寧に読み込んでその本質を浮かび上がらせる手法をとった。したがって関連する歴史的事実あるいはそこに現れていない当時の数学研究については言及していない。いかなる文献も時間･空間的な環境の中で著されるものであることは言うまでもないことだ。しかし議論が発散することを防ぐために、対象文献に焦点を当てることにした。それによってこれらの文献の本質は十分汲み上げることが可能であると判断したからである。

しかしデデキントに関しては数体系に関する後続の文献、とくに[7]（Dedekind 1872(1932)）と[8]（Dedekind 1888(1932)）からはある程度引用する。それらが『資格論文』における諸主張の補足の役目をするからである。他方『資格論文』は数体系と実数上の数学における概念拡張に特化されているので、デデキントの代数学への貢献には3章では触れていない。

ブルバキの数学思想は、数学のテキストを通して、とくに数学者の間では、広く浸透している。また、時代による変遷やメンバー間の見解の相違を考慮しても、『建築術』が彼等の数学観を大筋表していると考えられる。したがって4章では、『建築術』以外の文献には触れていない。

本論は以上のようなスタンスを採用しているが、歴史的背景も概観する (5章)。その理由は、考察対象をある程度の広がりの中に置くことによってその本質の理解が深まる可能性があることと、異なる数学観も相互に継続的な変化によって関連している可能性があることである。たとえば、デデキントの数学観からヒルベルト、van der Waerden等を通してブルバキへ、という一筋の流れには、デデキントに発する代数学の見方の変遷があり (5.2.2節)、そのためにデデキントの代数学への言及もする (5.1節)。ブルバキ数学はその流れを当時の数学全般に適用した結果であり、『資格論文』とは守備範囲のスケールが違うかもしれない。しかしそれは各時代の数学的関心事の相違であり、概念拡張の様式という観点から見た二つの数学観の共通性を最後に再述する (5.3節)。

1.2 本論の構成

本論は次のような構成になっている。

2章で、まず筆者の連続体上の計算可能性構造の研究において対象が連続関数から不連続関数に拡張される際に研究手法の性能を上げる必要があったこと、およびそのような手法は一通りでなく、それぞれが連続関数の場合の手法から自然な拡張になっていることの基盤を求める必要性を述べ、本論全体の理解のための準備としてそれら

の手法を紹介する。

3章では、そのような基盤の一つとして数学における概念拡張の様式の一つの典型であるデデキントの数学論について、”教授資格取得講演”を分析し、妥当な拡張の条件として”同質性”という原理を提案する。その原理は”内的必要性”と”保存性”から成り、デデキントの数学観から導き出されるものである。これは１９世紀的数学観ともいえるが、その有用性は現代でも通用するものである。筆者等が採用した計算可能性理論のうちの二つがこの原理によって妥当であることを結論できる。

4章では、上述のような基盤の二つ目としてブルバキで代表される構造主義的様式を主題にする。ブルバキの”数学の建築術論説”にしたがって概念拡張の仕組みを考察する。その様式による拡張の仕組みにおいても同質性を保証できることを確認し、それが筆者等が採用したもう一つの計算可能性理論の妥当性の説明になることを示す。

ここまでが概念拡張の様式に関する考察のの主な部分である。以上で取り上げた二つの様式は数学の歴史の流れの中から形成されて行ったものであり、本来は歴史的コンテクストを考慮して考察すべきではあるが、それは話を発散させかねない。それゆえ各テキストを丁寧に読み込んでそこから汲み取れる数学観にしたがって妥当な概念拡張の原理を導いたのである。しかしながら多少の歴史的背景を加味することによって各数学観の理解が進むであろうことに鑑み、次の章でデデキントからブルバキまでの数学観の変遷を概観する。5章でデデキント、ヒルベルト、van der Waerden、ブルバキの系譜をたどることによって、デデキントの１９世紀的数学観からブルバキの２０世紀前半の数学観への継続的変化を見てゆく。5.3.1節と5.3.2節で、最後の

リマークとして二つの概念発展の様式に共通な本質を再考察する。

”結語”で簡単な締めくくりとともに、この研究によって見えてきた様々な課題を将来の問題として掲げておく。

なお、先行する章では詳細を避けた数学的記述を、付録Aに列挙しておく。

1.3 人名と参考文献の表記について

一般に人名は原語で表すが、内容的に主人公になっており広く知られている場合にはカタカナで表す。デデキント、ブルバキ、ヒルベルト等である。

参考文献には通し番号を付け、初出箇所では著者の姓と出版年を付す。とくに本論の考察の中心的な対象である二つの論文・論説は分かりやすいように以下のように略記する：デデキントの[6]（Dedekind 1854(1932)）は『資格論文』、ブルバキの[2]（Bourbaki 1950）は『建築術』。

いくつかの参考文献は本論のコアになっている。このような文献の扱い方は一定していない。たとえばデデキントの『資格論文』についてはサーベイとして3.1節で概観した後に3.2節で詳しい引用によってその内容と筆者の見解を述べている。この扱い方の理由の一つは『資格論文』のコンパクトなスタイルと１５０年余りの時代の相違のために、真意を読み解くには細心の注意を払う必要があるからだ。対してブルバキの[2]は要約をしつつ筆者の見解を付けている。これは前者ほどコンパクトでなく、その影響が現代数学のなかに染み透っているので理解しやすいことが主な理由である。それでも当該文献の意味と意義は十分伝わるものと考える。[21]（Pour-El & Richards 1989）の参照は抜き書きではあるが、かなり丁寧に再現している。計算可

能性研究のブルバキ的方向に関する哲学がきちんと述べられているからである。しかし詳しい引用をしないのは、個々の文章が証拠になるのではなく、全体の内容が問題だからである。

デデキントの後年の仕事やヒルベルトにおける数学観についての言及箇所は文献内の大まかな場所のみ記している。

1.4 参考論文について

本論への参考論文3編および本論の内容に密接に組み込まれている無査読のサーベイ論文2編は、この節の最後に文献番号と共に記載される。

参考論文のうち、[33]は不連続関数の極限計算可能性の意義と問題点について詳細に述べている。その内容はその後の研究の中に消化されてきたことと、技術的な部分が多いこともあるので直接引用はしていないが、これが本論に至る考察の最初の起源になっており、また、その内容は各所に現れている。とくに2.2.3節、2.3.3節および2.3.4節はその影響の下にある。

[38]は数学的な論文であるが、極限再帰的手法と一様位相的手法のある種の同値性の背後にある概念的特性を求める切っ掛けを目的として書かれたものである。それが本論の3.3.2節と3.3.3節に結実している。すなわち、一見全く異なる観点からのアプローチである二つの手法が同じ枠組みで連続関数からの同質的拡張と見なせることを数学の結果から予見されたのである。同値性の数学的記述はA.5節に置く。

[40]は本論の3.2節の、したがって本論の主要テーマの一つの、核心部分をなしている。ただし次のような重要な変更がなされている。本

論の中心的な主題である、概念拡張における”同質性”の条件として、[40]では”内的必要性”、”健全性”、”保存性”の３項目を要請した。これらの内容については本論でも変わることはない。しかし、拡張された理論で定義し直された演算等を初期理論の領域に限定するときにその内容が不変である、という意味の健全性と、演算を規定する法則が拡張後の理論でも遵守されるという保存性を完全に分離することは不適切ではないか、という指摘を受けて、再考を行った。実はこれらは一つの事象の表裏と言えることで、形式と質料あるいは形式と実質に関わる古くからの論争に関係する事柄でもある。したがって前者を”実質保存”、後者を”形式保存”あるいは”法則保存”と名付けて、”保存性”を異なる視点から見ていることを明示した。また、[40]は計算可能性への応用は含んでいない。本論の主題は計算可能性問題を支える数学観であるから、3.3.2節と3.3.3節でその件を詳述している。3.3.1節では例を補供している。

サーベイ論文のうち、[37]は極限再帰関数の手法と実効的一様位相を例に、連続体上の計算可能性問題の解説をしており、その内容は2章に反映されている。[39]は本論の3.1節に採用されている。ここで『資格論文』のサーベイを行い、次の3.2節への準備をしている。

なお、本論4章は3章と並ぶ主題であるが、その内容は未発表である。

参考論文（有査読）

[33] 八杉満利子, ”不連続関数の極限計算可能性－意義と問題点”, 科学基礎論研究　第１００号 vol.30, No.2(2003), 13-18.

[38] Mariko Yasugi and Masako Washihara, *Sequential computability of a function*

-*limiting recursion versus effective uniformity*, Scientiae Mathematicae Japonicae 71, No.3(2010), 331-341;

Online, e-2010-16, No. 23(2010), 153-163: available at

http://www.jams.or.jp/scm/contents/e-2010-2/2010-16.pdf

[40] 八杉滿利子, ”デデキントの数学観–大学教授資格取得講演における概念拡張の仕組み–”, 哲学研究 596 (2013), 24-45.

サーベイ論文（無査読）

[37] 八杉滿利子, ”連続体上の計算概念について - 再帰関数を超えるもの - ”, サーベイ論文, 哲学論叢XXXV(2008), 京都大学哲学論叢刊行会編, 199-209.

[39] 八杉滿利子, ”数学における概念拡張の仕組み - デデキントの研究計画に沿って - ”, 哲学論叢XXXIX別冊(2012), 京都大学哲学論叢刊行会編, サーベイ論文集、24-35.

1.5 謝辞

筆者が、数学研究において持っていた哲学的な疑問とその一つの解決方法を本論の形にまとめるまでには多くの方々のご支援を賜った。とくに京都大学大学院文学研究科の伊藤邦武先生、出口康夫先生、林晋先生、北海道大学大学院文学研究科の中戸川幸治先生には演習や研究会での発表および個人的なご指導における批評と助言、インフォーマルな話し合いにおける示唆、文献の紹介などで多大なご教示をいただいた。セミナーや勉強会、論叢原稿の検討会などでお付き合いいただいた哲学研究室内外の皆様からも多くを教えられた。また、本論の起源である連続体上の計算可能性研究はつねに共同研究

者との協力で進めてくることができた。ここにお名前を明記していない方々も含め、お世話になった方々に感謝の意を表します。

第2章　問題の起源

自然数上あるいは一般に離散構造上の計算可能性概念は、テューリング機械や再帰関数などによって厳密に定義され、関連諸理論が発達した。その後実数や実数上の連続関数などの計算可能性概念も導入された。さらにその理論の不連続関数への拡張も研究対象になった。その経緯と共に、いくつかの研究方法とその問題点などを述べ、本論への序章とする。

2.1　連続体上の計算可能性について

2.1.1　背景

近年、数学における計算可能性問題が、数学研究において重要なテーマになってきた。最初は離散構造上の計算概念が論じられていた。離散構造上の計算可能性概念は、たとえば再帰関数論あるいはテューリング機械理論等によって表現される。その方法は数種あるがどの理論でも”計算可能性”は明確に定義されており、また数学的にはすべて相互に同値である。離散構造上の計算概念はこれら（のそれぞれ）によって尽くされている、という「チャーチのテーゼ」は広く認められている。人がこれらを「計算」と呼ぶのは、各人にとって少なくともその一つが”計算”という感覚に合致しているからだろう。我々は研究に際して再帰関数を採用している。

その後連続体上の「計算可能性」が考察の対象となり、解析学における計算可能性構造の研究が進んだ。ここでは実数体上の数学に話を限定する。

数学における計算可能性の特性は、入力の情報から出力を求めるプロセスとして決定論的なものが要求されることである。数学的にはこの条件を”列計算可能性”によって特徴付けることができる。

実数および実数上の連続関数の計算可能性の定義は計算の意味を適切に表現するものとして合意されており、それに基づく数学の実行によってその妥当性が十分検証されている。たとえば[21]や[31]（Yasugi & Washihara 2000）などが参考になる。

実数においても連続関数においても、計算可能性の基礎になるのは再帰関数であり、有理数列、諸々の収束率や関数の連続率などが再帰関数で与えられる。

しかし、科学・技術において有用な不連続関数は多数あり、それらの計算可能概念は普遍的な問題である。不連続関数を含めた計算可能性の基礎概念は連続関数の場合の単純な拡張にはならない。そのための理論は多数提案されてきた。それらによる計算可能不連続関数は適当な条件の下で同じになるが、一意的な計算可能性概念は確定していないのである。

本節では我々の三種類の研究方法、すなわち”極限再帰関数による収束率の容認”、”関数の定義域の位相の変更”および”関数空間論の手法”について概説し、それらにおける「計算概念」について検討し、問題点を指摘する。

2.1.2 計算とは

本論に入る前に、連続体上の計算可能性問題において何を計算と考えるか、あるいは何を計算と認めることができるか、について考えておきたい。

まず基本になる再帰関数の特性を考えよう。再帰関数とは大まかにいえば計算プログラムが書ける離散構造上の関数である。再帰関数は本来自然数上で定義されるが、その定義は整数、有理数などに拡張できる。一歩一歩の計算が実行され、やがて計算が停止して答えが出力される。人はこのように、一歩一歩の結果とともに「有限回で求める値に到達する保証」があれば、そのプロセスを「計算」として受け入れる。

再帰関数とテューリング機械による計算が同値であることは数学的な事実であるが、両者は「計算感覚」として同じではない。それにも関わらずその差異について議論されないのは、経験的に両者間の変換に慣れ親しんでいるからだと考えられる。

実数および実数上の連続関数の計算可能性は、それらの通常の定義において、有理数列、諸々の収束率や連続率などをすべて再帰関数に限定することによって得られる。たとえばある実数が計算可能とは、それを近似する（それに収束する）再帰的有理数列があって、その近似の精度（近似率あるいは収束率と呼ばれる）が再帰関数で与えられることである。整数、有理数、数学でよく知られている$e, \pi, \sqrt{2}$などの無理数は計算可能である。この計算可能性の定義は容易に実数の列に拡張することができる。

他方、不連続関数は”連続でない”という以外の特性を持たない。たとえば連続関数の連続率に対応するような量は定義できない。そ

のために不連続関数の計算概念は一通りには決まらず、各方法論に依存して定義されることになり、その都度"何をもって計算と呼ぶか"を検討する必要が生じるのである。

不連続関数の計算可能性の基礎としては再帰関数の極限をとること、あるいは関数の定義域の位相の変換など、再帰性を超える原理を必要とする。これらを計算として認めようとする場合に何が問題になるか、どのような解決策があり得るか、を問うことが本節の主内容である。どちらも前述のような再帰関数の有限的な「計算感」からの飛躍であるが、「慣れ親しむ」ことによって「再帰性の延長上にある計算」として容認できる範囲にはあると思われる。これらの意味は、以後各節における計算可能性に関する解説を通してより明確になるであろう。

ここで一点注意しておきたい。我々は通常の古典数学に携わっているのであって、いわゆる構成的数学とは立場が異なる。すなわち、古典数学を全面的に仮定している。たとえば実数の中での代数的数について研究するように、普通の実数体の中での計算可能実数の構造について研究する、という立場である。

2.1.3 計算可能な対象

ここで計算可能実数および実数上の連続関数の計算可能性の概略を説明する。厳密な定義は付録Aで与える。

前述のようにある実数が計算可能とは、それが再帰的有理数列によって再帰的な精度をもって近似されることである。

一般に収束（近似）や連続の精度（収束率または近似率、連続率）が再帰関数で得られるときには、その現象を"実効的"と呼ぶ。前述

の計算可能実数の特徴付けは、古典数学で実数を有理数列の極限として定義することの実効化といえる。

実効性とは、計算可能性問題の再帰性への還元を意味する。数学における種々な対象、たとえば実数、実数列、連続関数などの計算可能性は再帰的有理数列と、収束率あるいは連続率の再帰性のみに依存している。

実数上の連続関数の計算可能性は、"列計算可能性"（計算可能実数列を計算可能実数列に写す）および"実効的連続性"（再帰的連続率の存在）によって定義される。

以上は実数および実数列と、実数上の連続関数についての計算の意味を適切に表現するものとして、広く合意されている。列計算可能性と実効的連続性は連続関数の計算可能性のパラダイムと称してよいだろう。

2.2　連続関数から不連続関数へ

不連続関数の計算可能性については、当然ながら連続性に基づく定義を適用するわけにはいかないので、実効的連続性の条件は論外である。ではせめて、列計算可能性を計算可能性の一条件とできないだろうか?しかしこの期待が裏切られる例がある。したがってどのような不連続関数を計算可能と認めたいか、という問題が生じ、それによってこの反例の意味も変わるが、不連続関数の計算可能性についての多くの理論において計算可能であることが示され、かつ素朴な意味でも計算可能と感じられる例である。そして、そのような関数を計算可能と認めるのは自然であろう。

2.2.1 不連続関数についての反例

最大整数値関数あるいはガウス関数と呼ばれる関数は、整数ではその値を関数値とし、次の整数までは同じ値をとる。関数値が各整数点で飛躍するので不連続であるが、整数間の半開区間では連続である。個々の関数値は整数なのだから当然計算可能である。後で説明するようにガウス関数が計算可能だという感覚をもつのは自然だ。他方列計算可能性が成り立たないという意味で、関数値の一般的な計算方法は無いことが導かれる。この事実は任意の入力値について、それが整数か否かの判定の決定不可能性から生じる。

ガウス関数は計算可能性についての、数学的な定義と人の感覚のずれを示す例といえるし、個々の関数値の計算可能性とその計算方法の存在とは別の事柄であることを示す例でもある。

このように不連続関数について、人の感覚による計算可能性を何らかの形で反映させる方法が不連続関数についての計算可能性理論であり、それは一通りではない。しかしどの理論においてもガウス関数は拡張された意味で計算可能である。

2.2.2 不連続関数の計算可能性について

不連続関数の計算可能性は、当然ながら連続性に基づく定義が適用できないので、連続関数の場合の多少の変更によって得る、というわけにはいかない。さらに2.2.1節で見たように、列計算可能性も一般には成立しない。それでも人はある種の不連続関数について計算可能感をもっていることは前述の通りである。

ただ一点確実に要請されるべきことは、計算可能な入力値に対しては関数値も計算可能である、ということだ。ただしこれはそのよ

うな事実が要請されるのであって、入力値から関数値を得る実効的方法（計算方法）があるという意味ではないことは2.2.1節で見た通りである。

不連続関数の計算可能性理論は多数提案されてきた。そのなかでも、（不連続関数を含む）”計算可能な関数の族”の作る数学的構造の研究を目的とする、Pour-ElとRichardsが[21]で提唱した、”実効的関数空間論”が数学者にとっては魅力的であった。その理論では関数は空間内の1個の要素であり、計算可能性は空間からの点列の集合的性質として定義される。そのあらましを2.3.2節で説明し、A.2節で数学的定式化を述べる。[31]にも概説がある。この方法の利点は、再帰関数の定義とそのいくつかの初等的な性質の理解以外は通常の数学の知識と技術によって（不連続関数の）計算可能性の研究を進めることができることにある。

この方法論は有効でまた美しく、解析学における計算可能性問題について多くの成果をあげてきた。しかし関数空間論とは、一般に関数の不連続点における挙動を無視して、ある区間内での関数の平均的挙動を扱うものである。他方具体的な不連続関数については多くの場合、不連続点での関数値は容易に計算できるものであり、人はまずそれを計算する。筆者は、このような人間の知的行為を数学的に表現することが、数学における計算可能性問題の特性を示すことである、と考えている。その目標に向かっているときに自然に行き着いたのが、”極限再帰関数”および”実効的一様位相”を使う手法であった。

不連続関数の不連続点における関数値の計算には一歩一歩感は希薄であるが、実際に計算している、という事実はある。これを従来の計算論で基礎付けようとすると、極限再帰性あるいは位相の変換の

ように、伝統的な計算論からの「飛躍」を認めなければならない。飛躍を含めたプロセスを「計算」と認識できるか、また、その認識は何に基づくものか、などの疑問がわく。そのような疑問は簡単に決着がつくものではない。

以下では、連続関数の計算可能性を基本にして、不連続関数の計算可能性についての三つの視点を紹介し、その意義と問題点を検討していきたい。

2.2.3 極限再帰関数

三つの方法の一つである、有理数列の実数への収束率に再帰関数より論理的に強い極限再帰関数を認めよう、というものがある。その状況および再帰関数と極限再帰関数の計算過程の相違は大筋以下の通りである。

2.2.1 節のガウス関数の例で言えば、その関数値を計算可能な入力値から得ようとするとき、入力値が整数かどうかの判定が実効的にはできない。そのために関数値を近似する有理数列の収束率は再帰関数では得られない。しかし再帰という条件を少しゆるめて”極限再帰関数”を認めれば関数値の計算ができたことになる。

一つの再帰関数の計算を逐次進めるときに、もしも「ある数から先は一定の値になる」ことが保証されているならば、その一定の値を関数値とするような関数は極限再帰関数と呼ばれる。この条件は”極限同定可能性”(identifiability in the limit) と呼ばれる。再帰性を超えるのはこの条件で「ある数から先はすべて」という部分である。無限個の値を調べる必要があるからだ。

対して再帰関数にはいわゆる”停止性”(halting condition) が条件に

なっている。これは逐次計算において有限ステップで決定可能な条件を満たし、その事実が決定可能である、つまりその時点で計算が停止し、正しい答を得ることが分かることだ。

再帰関数の極限値をとるというのは便宜上の操作のように見えるが、Goldが学習理論のために[11] (Gold 1965)で導入した概念であり、「極限同定」と表現されている。問題は再帰関数の極限同定を計算として認める根拠は何か、ということだ。言い換えると、極限同定可能性が停止性の自然な拡張になっている、と主張できるか、できるとすればその根拠は何か、ということだ。これが本論の一つの課題であり、それについての考察である[33]（八杉 2003）が本研究の発端となった。

2.3 三種の研究方法

極限再帰関数の使用による不連続関数の計算可能性問題は2.2.3節で概略を述べた。以下では一様位相による手法と関数空間による手法について概観し、それぞれの意義と問題点および本論における解決への道を述べる。

2.3.1 実効的一様位相

一様位相とは、距離位相と類似の性質をもつ位相である。一様位相の条件のいくつかが再帰関数によって表現されるとき、実効的一様位相と呼ぶ。

関数の観察者の立場では、たとえば不連続点を計算とは別途に認識し、実数空間を不連続点によって分割できる。ある不連続関数についてこの方法で実数空間にユークリッド位相から誘導される一様位相を導入し、ユークリッド連続性を保存しつつその関数の連続化がで

きる場合がある。さらにその一様位相が実効的な場合がある。この事実を利用して、ユークリッド位相における不連続関数の計算可能性問題はこのような関数の定義域の位相の変更によって、連続関数の計算可能性問題に還元可能なのである。すなわち、この一様位相における連続関数の計算可能性を、その位相における列計算可能性と実効的連続性として書き直せばよいことが[28] (Tsujii, Yasugi & Mori 2001)より分かる。この場合の列計算可能性を”一様位相的列計算可能性”と呼んでおく。

不連続点を認識しそれを基に位相の変換を行うプロセスあるいは（知的）行為は、計算そのものとは別の事象とみなされる。このプロセスは通常の数学であり、数学者にとって自然なことである。位相の変換後は再帰関数による収束率と連続率さえ求められればよい。その意味で、一様位相による不連続関数の計算可能性問題の扱いは、数学者の思考に近いといえる。この手法による研究として[35]（Yasugi, Tsujii & Mori 2005）と[36]（Yasugi, Mori & Tsujii 2007）を挙げておく。また、極限再帰関数による手法と実効的一様位相による手法の相互関係については[34]（Yasugi & Tsujii 2005）、[38]等で究明している。

2.3.2 計算可能構造をもつ関数空間

簡単のために実数の閉区間上で定義される実関数に限定して説明する。連続関数の族は実係数に関する線形結合について閉じていてノルムと呼ばれる関数の”大きさ”の線形結合に関する公理を満たす。このような関数を要素とする理論をノルム線形空間と呼ぶ。さらに適切なノルムに関してコーシー列の極限が同じ空間に存在するとき、つまり空間が完備であるときに、その空間をバナッハ空間と呼ぶ。連

続関数を含むバナッハ空間は一般に数学的に意味のある不連続関数を含む。

バナッハ空間の計算可能性構造とは、バナッハ空間の公理を”計算可能”という修飾をつけて述べ直した条件を満たす点列集合の部分族である。その構造は点列として計算可能な係数列による線形結合に関して閉じていて、ノルムの列が計算可能実数列であり、そのノルムによる”実効的”極限に関して閉じている。計算可能性構造の要素およびその列の各関数を計算可能と呼ぶ。ここで注意すべき点は、実際に計算可能と指定される対象は実数列のみであることだ。すなわち計算可能性構造は公理群によって規定されるのであって、その要素を明示的に指定するわけではない。多くの有用な不連続関数について適切なバナッハ空間とその計算可能性構造があり、その関数の計算可能性が示される。

この方法によれば関数空間論に則ってその要素全体についてその実効的挙動を研究でき、その上の作用素の性質を調べることができる。この手法による研究結果の例として[21]の他に[29]（Washihara & Yasugi 1996)、[32]（Yasugi,Brattka & Washihara 2003）などがある。

2.3.3　各方法の意義と問題点

一様位相の導入は数学的に扱いやすく、また直観的である。しかしここで問題になるのは、この方法には不連続点を認識するという超越的な思考を伴うものがあり、したがってそのプロセスに相対的な計算可能性概念である、ということだ。それは一見極限概念よりも直観的で自然に思われる。では、それを自然で直観的である、と思わせるものは何か、を説明できないといけない。これがこの手法の課題

である。

ガウス関数の例で極限計算による（不連続点における）関数値の計算の試みをしたが、これは典型的例であり、極限計算の本質を捉えている。それは[32]で示したように決定不可能な場合分けがあるために、計算手続きにおいて再帰性を超える部分が入り込むことだ。

数学的には,極限計算を実現する関数族の理論[18]（Nakata & Hayashi 2001）などがあり,極限計算の理論的意義に問題はない.また,古典的な立場では、極限同定可能性の下では極限値は必ず存在するのであって、その情報に基づく計算を正当化することにも問題はない.極限計算により,分岐する二つの道（場合分け）のどちらかで計算が進み,正しい答えに到達する,という現象を,計算という概念で統一的に表現できることには,大きな意義がある.

極限計算とは,数論的関数がある時点から定数値になる場合にその定数値を出力することである.実際にいつかは定数になる関数であれば出力すべき値はは決まるが,いつその値に到達するか予測できないだけでなく,今の値がその極限値であるかどうかということも,一般には判定できない。しかしこのような場合には,我々は知らずにいても,計算自体は正しい値に到達しているのである.

とは言っても、どう解釈し直しても、無限個の値の点検が必要なことに変わりない。極限再帰関数が再帰関数のなんらかの意味での妥当な拡張であると主張するために停止性条件と極限同定可能性条件を比較しようとしても、その手がかりがない。そのためにこれらと数学的に同値な条件である”有界性条件”を定義し、その形を比較することによって拡張の妥当性を考察する（3.3.3節参照）。

極限再帰的列計算可能性と実効的一様位相的列計算可能性とは、

概念的には相互に異質なものであるが、前述のように[38]によればある自然な条件の下ではそれらは同値になる。以後の検討においてこの事実が示唆することは大きい。

関数空間論的手法は、”計算可能性構造の存在”という公理を加えたバナッハ空間の下部構造の数学的研究であり、構造主義数学そのものと言える。数学者にとっては研究しやすい方法だ。ただこの方法はバナッハ空間という大がかりな仕組みに立脚しているので、他の方法との比較は簡単ではない。また、関数値の計算には直接結びつかない。この方法のディフェンスはその創始者たちの著書[21]に詳しく書かれており、その観点は非常に重要なので、4.2節で詳説する。

2.3.4 二つの様式による問題解決への道

以上の三手法における計算可能性概念の拡張の妥当性を、数学における概念拡張の二つの様式によって検討し、そこに我々の問題の解があることを見てゆく。なお本論では、”様式”とは理解の仕方、あるいは”理解様式”(the art of understanding) の意味で使用している。

これらの様式は１９世紀半ばのデデキントの”発生論的”概念拡張に関する数学観と、２０世紀半ばのブルバキの構造主義的数学観である。これらはアドホックに選ばれて偶然問題解決に役立ったわけではない。既存の理論から数学的な要請にしたがって理論を拡張する際に認められる原理を緻密に分析し記しているデデキントの『資格論文』が比較的論理的な研究方法の基礎を担うことが予想された。他方関数空間論の手法はブルバキの構造主義そのものを使っている。すなわち、計算可能性構造をもつ、という公理を加えた構造の研究になる。

問題解決の方法は他にもあるかもしれないが、我々は数学自体にその妥当性を語らせる立場をとる。

筆者の最初の哲学的関心事は、我々が採用してきた三種の計算可能性問題の研究方法のうちの極限再帰的方法にあった。それは有限回のステップで値が確定する保証がある一方で、確定値を知るには無限回の操作が必要であるという評価方法を従来の計算概念の自然な拡張として認識できるか、できるとすればどのような基盤の上で可能なのか、という問題であった。それは"極限同定可能性"の妥当化の問題といえる。このような問題についての初期の考えについては[33]で検討している。その後論理的には同値であるがコンパクトな表現を考察の対象とし、概念拡張の原理に乗りやすい形を得た。それがデデキントの『資格論文』に結びつき、次第に問題の設定自体が明確になり、一つの答えの提案に至ることになった。前述のように極限再帰の方法による関数値の計算理論は数学的に一様位相の手法とある種の同値性があり、双方とも『資格論文』から導かれる"同質性"原理に則って妥当性を確保できたのである。

さらに関数空間論による手法はブルバキの構造主義そのものであり、その手法の分析によって、ここでも同質性原理が働くことが明らかになった。

以上によりデデキントの数学観とブルバキの数学観という二つの数学観の様式の分析により、筆者の疑問を明確にし、その一つの解法を提案することができると予想し、遂行したのが本論である。

第3章　デデキントの数学観による概念拡張の仕組み

概念拡張の様式の一つとしてデデキントの「大学教授資格取得講演」[6]（Habilitationsrede Dedekind 1854 ; 以後『資格論文』と略）をとりあげる。『資格論文』を含むデデキントの数に関する論文の翻訳を編者のコメント付きで掲載している[9]（Ewald 1996）も参照にする。『資格論文』を集中的にとりあげる理由は、筆者の関心事が数学における発展的概念形成の一般的な原理の探求であり、それには『資格論文』がひとつの有効な様式であるとともに、『資格論文』では概念拡張の意味ある具体例を中心にその仕組みの考察が行われていることである。またその内容はデデキントの後年の諸研究成果、たとえば[7]（Dedekind 1872）と[8]（Dedekind 1888）、につながるものでもあり、デデキントの研究計画という意味合いももつ。さらにデデキントの数学論および数学の効果が現代までも続いているという事実が、この研究計画に意義を与えている。『資格論文』はデデキントの数学の哲学を示すものでもある。『資格論文』においてデデキントは直接に哲学を論じているわけではなく、数学の発展の仕組みについてのひとつの洞察を示しているだけだ。しかしその背後にあるデデキントの数学に関する哲学的思考を汲み上げることは可能である。

『資格論文』は妥当な概念発展に関して、科学一般の発展の法則というべき考察から始め、数学の発展もその法則に則ることを述べ、具

体的な事例についてその観点の根拠を説明している。それらは今日教科書に載るような基本的な例であり、しかもその議論を抽象化すれば、現代にいたる様々な数学の分野に適用可能な原理を引き出せる。その意味で『資格論文』は現在でも新鮮味を失っていない。

本章ではまず3.1節で『資格論文』の概要を[39]（八杉　2012）に沿って紹介する。次に『資格論文』から読み取れる概念拡張の仕組みを3.2節で[40]（八杉　2013）に沿って述べる。3.2.5節でその仕組みを同質的拡張として汎用性のある形で定式化する。3.3.1節でその仕組みを現代数学に適用して、同質的拡張の具体的なイメージを供与する。本論の起源である計算可能性理論に関しては、3.3.2節と3.3.3節で一様位相の方法と極限再帰の仕組みが妥当化される。なお、デデキントの[6]、[7]、[8]に関しては[9]も折りに触れて参照する。

3.1　『資格論文』における概念拡張：サーベイ

本節では概念拡張のひとつの仕組みを論じている『資格論文』におけるデデキントの数学論とそれに関連するデデキントの後年の研究およびそれらについての近年の研究を、現代における応用を視野に入れながら行う。デデキントの数学観を受け入れる立場から、数学における概念拡張の仕組みという視点で『資格論文』の内容を概観する。

『資格論文』においてデデキントはまず自然数上の加法と乗法を基礎にして、新しい演算、すなわち逆演算を可能にする対象領域の逐次導入の方法を述べているが、既存の対象領域内での関数概念の拡張・転換についても考察している。現代では後者の状況のほうがより切実な場合が多い。

デデキントの概念拡張に関する肯定的なスタンスは、数学の成長期にその発展自体によって引き起こされたものと推測される。そして我々はそれを読み解くことにより、その背後にあるデデキントの数学に関する哲学的様相を汲み取るのである。

デデキントの『資格論文』に関係する後続の仕事は3.1.5節で、また関連するデデキント研究については3.1.6節で述べる。

本節の基調は次の二点から成る。第一点は、『資格論文』において「演算拡張」が同時に「概念拡張」ともみなされるものであり、またその拡張は三種類に分類され得ることを示すことである。（次の3.2節でこの分類をさらに精密化して、五種類（五場面）に分類する。）第二点は現代の数学の発展への応用の視点から"拡張"の本質を整理し、その一般的枠組み設定のための準備を視野に入れること、である。この準備を基に次の3.2節で枠組みに関する考察と提案が行われる。

3.1.1　概観

ここで3.1節の趣旨の理解のために、『資格論文』を概観しておく。

英訳[9]では原文『資格論文』のパラグラフ番号を付しているので、本節以降その方式を採用する。以下で$\langle i \rangle$は『資格論文』における第iパラグラフを表す。ただし『資格論文』の直接的引用をするものではなく、そのパラグラフの内容の、著者のことばによる説明である。

『資格論文』で展開されるデデキントの数学観においては、数学の発展の仕方が大筋三段階に分類される。第一は上述のように新しい演算とそれに伴う新領域の創造である。ここでの認識論的問題は新しい演算と数の創造に関わる。この創造は「数学の発展における必要性」によって承認されている（『資格論文』のパラグラフ$\langle 7 \rangle$- $\langle 9 \rangle$）。こ

こまでで無理数・虚数が必要となる。第二（⟨10⟩- ⟨11⟩）はすでに仮定されている実数領域の一部で定義されている演算の性質およびその定義域の拡張が問題にされる。第三（⟨12⟩）はさらに高度の数学概念に移り、演算の定義域の拡張に際してもとの演算の定義が放棄される。すなわちより広い定義域をもち、限定された領域ではもとの演算と（値が）一致する別な演算が採用される。この場合には単なる定義域の拡張ではなく、概念の転換が起っている、という見方ができる。

いずれの場合にも、演算の適用領域の拡張は演算の概念拡張だといえる。また、その拡張は限定された領域における演算の基本性質の充足性を要求する。すなわち、当該演算を規定するとみなされる性質が、拡張された領域でも成り立つことが要請されるのである。

三つの段階のすべてが数学の発展に関わっている。現在数学者の間でその認識論的意義がその都度問われることは少ないが、必要なときには我々はデデキントの『資格論文』に立ち戻ることができる。その意味で、この内容を現代的な見地から概観しておくことは有用だ。

『資格論文』で提示される概念拡張に関する数学論は、[20]（野本 2010）の”保存拡大的条件”という表現に習えば、”デデキントの保存的拡張原理”と呼ぶことができるだろう。”保存的”と形容する理由は、その拡張が旧理論で成り立つ普遍妥当な性質が拡張後も妥当であるという制約のもとでのみ認められるからだ。

後で見るように、『資格論文』における概念形成の最初の例は新しい対象領域の定義あるいは構成の必要性を含む。その構成方法は今日よく知られており、数学的には問題を呈さない。また、デデキントも新領域についての存在論的意味を問うことはしていない。

まず正整数とその上の後者関数という演算を基に、同じ領域で（つ

まり領域は不変で）加法と乗法を、逐次「ある手続きの反復のプロセスを一つの操作としてまとめる」ことによって定義する。加法の逆演算としての減法をとりあげるとき、対象領域の拡張が必要になる。ではなぜ減法が必要なのか、そもそもなぜそういうものを考えつくのか。減法は実生活でも科学でも使いこまれてきた演算であるとともに、数学者の立場からは「方程式を解く」という数学の基本的な活動を可能にするためだ。デデキントは「間接的逆演算」という表現を使っている。

たとえば等式$a+x=c$が成り立つxを求める操作を、aとcを引数とする演算とみなすとき、減法と呼ばれるこの演算は加法の逆演算であり、式$a+x=c$が減法を間接的に伴うと考えられる。つまり減法は加法と上記等式によって間接的に規定される演算なのだ。

以下、3.1.2節〜3.1.4節で『資格論文』の内容を吟味・解説する。最後の3.1.7節で『資格論文』で貫かれている原理の枠組みについて整理し、3.1節を終える。

3.1.2　科学の発展における一般法則

デデキントは$\langle 3\rangle \sim \langle 5\rangle$で科学を発展的・動的な体系と捉えて、$\langle 6\rangle$で数学についても同様の見方を提示しており、それが『資格論文』の骨子になっている。

とくに$\langle 3\rangle$にはデデキントの科学観が明確に表れている。すなわち、科学はその目標である真理（Wahrheit）にいたる知識獲得の過程を表現するものであるが、科学はまた人の営みなので、人の任意性と知力の不完全さにしたがう。ゆえにその過程は多様で、異なる表現が可能だ。どのような概念がより有効かそうでないか、は科学のさらな

る発展が決めることだ、と言う。

学問とは、不完全ながら知性をもつ、あるいは知性をもつが不完全な人間の営みに他ならないことを考えれば、この観点への共感は容易であろう。ただし、数学では一度証明された定理はその正当性が確立されるが、観察や資料を基にする分野では新事実の発見による解釈の書き換えなどの可能性がある、という相異がある。

⟨4⟩では法学の例が扱われ、⟨5⟩で科学の創造性が（既得事実のみでなく）「内的必要性」に支えられていると主張される。この内的必要性は[10]（Ferreirós 1999）に詳しく論じられているように、デデキントのその後の数学の展開でつねに考慮される。科学あるいは数学そのものの内的必要性への信頼がデデキントの数理哲学の基本なのだと考えられる。なお、内的必要性についてはその訳語とともに3.2節で詳しく検討する。

⟨3⟩と⟨5⟩を総合すると、デデキントの考える「科学の発展の一般法則」は次のように表現できる:（体系化された知識としての）科学（の各分野）においては、過去の成果に加え、その内的必要性によって、次の方向が逐次決まってゆく。換言すれば、科学者は多様な可能性のなかから（当該科学分野の）内的必要性に導かれて適切な方向を選び取ってゆくのである。

⟨6⟩が科学の発展の一般法則の数学版だ。すなわち、数学も「上記の一般法則」の例外ではないと言う。数学の特徴は何らかの対象、たとえば演算、についての定義からはじまることだが、「定義は最初はまず限定された形で必然的に現れる。」関連する理論の展開にともなって定義領域の拡張が必要となるが、それは先行する定義からの「内的必要性にしたがうもの」であり、その必要性とは、最初の定義が指

示する概念の発展への数学的要求である。

デデキントの主張する科学の発展は、発明と発見のデリケートな混合物と言える。すなわち、科学は人間の自由な思考活動の産物という意味で発明であると同時に、内的必要性によってある程度方向が定まるという意味で発見でもある。

3.1.3　領域の創造を伴う演算の拡張

パラグラフ⟨7⟩は数学概念の逐次発展に関するデデキントの哲学が明確に表れている重要な箇所だ。すなわちこの部分がデデキントの（保存的）拡張の第一段階である。そこでは間接的な逆演算の導入とそれに伴う領域の拡張が丁寧に論じられている。

デデキントの表現によれば、正整数上の後者関数（継続的前進）が算術のもっとも初等的操作（Operation）であり、数学のすべてはそれに基づいている。この初等的操作の反復をひとつの行為としてまとめることによって、人は加法の概念に行き着く。同様の考え方で加法から乗法、さらにべき乗等の演算概念が発生する。

以上のことは、”演算の概念”を”計算可能”と読み替えるならば、原始再帰関数の逐次定義に相当する。その本質は「一つの操作の反復のまとめ上げ」、すなわち既に計算可能と認められている関数への原始再帰原理の適用である。

これだけならば正整数領域で十分で、領域の拡張は不要だ。他方これでは明らかに算術の発展には不十分だ。算術はその発展のために減法や除法などの（間接的な）逆演算が無条件に実行可能なことを要求する。この要求によって新しい数のクラスの創造が必要となる。

創造の結果数学が整合的に実行可能でなければならない。そのた

めにはもとの演算（加法など）を、もとの領域（たとえば正整数領域）を含む拡張された領域全体（たとえば整数領域）に適用可能なように定義し直す必要がある。さらにその結果が旧領域上ではもとの演算概念と一致すること、および「前述の一般的原理」（⟨6⟩）を遵守することが要求される。すなわち、旧領域でもとの演算を特徴づける法則が新領域全体に拡張された演算に関しても成り立つこと（普遍妥当性）が要求される。正整数領域における加法と乗法を特徴付ける交換律や分配律などがその例だ。

これらの法則について何か一般的な規定が可能なのか、という問いが発せられるかもしれないが、その問いはほとんど無意味だ。科学あるいは数学の発展は一種の必要性にしたがう、というデデキントの主張は、その必要性が最初から厳密な方向性を規定することまでは意味しない。数学の発展の各段階は人間の営みなのだ。発展の仕方が決定されているのならば、数学の研究など不要だろう。⟨3⟩の表現を借りるならば、「数学のさらなる発展」によって次第に方向が決まって行くものなのだ。数学のある理論の実行においてまず局所的な必要性が気づかれ、ある程度の発展の後にそこで満たされるべき普遍的な性質あるいは法則について合意されるが、ときには後に軌道修正が必要なこともあり得る。

この後⟨8⟩と⟨9⟩で乗法とべき乗（指数関数）の導入に関する説明がある。乗法に対する逆演算すなわち除法の導入は数領域の有理数への拡張を要求する。有理数領域での指数関数は、指数が有理数の場合に無理数を、底が負数のときに複素数を要求し、数の新領域へと導く。デデキントはこの最後のステップは「大ごと」だと言い、後年[7]で実数の構成に関わることになる。

さて、なぜ加法に対する減法のように、逆演算の導入が「必要」なのか。それは前述のように数学の豊かな発展のために数学自体が要求する、「方程式を解く」などの活動のために必要なのである。

以上のように、第一段階は数学の概念拡張に関する重要な諸事項を含んでいる。それらをここで整理し、一般的な表現で述べておこう。

1. 基礎領域における基礎演算の反復とそのまとめ上げによる新演算の構成
2. 1で得られた演算の本質を規定し、普遍妥当と目される条件（等式その他の関係式で表現される法則）の設定
3. 1と2を基に数学活動（方程式を解く、など）に必要な新しい演算（逆演算など）とそれに伴う、もとの領域を含む新領域の導入
4. 3で得られた新領域における、もとの演算に関する2の法則の成立（法則の充足性）の確認
5. 旧理論におけるもとの演算の不変性

3.1.4 既存領域内での演算拡張

$\langle 9\rangle$の要求によって実数領域が創造されたものとしよう。$\langle 10\rangle$-$\langle 11\rangle$では三角関数を例に、実数領域内での定義域の拡張が取り上げられる。これが拡張の第二段階だ。

角の関数である$\sin$と$\cos$の定義は最初は幾何学的に直角三角形の辺の比によって定義される。その場合定義域は鋭角に限定される。ここでの普遍的法則は、たとえば加法定理$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$などだ。この等式を右辺から見るとき$x,y$それぞれが鋭角であれば意

味をなすが、$x+y$が鋭角でないとき左辺は定義されないことになる。つまり$x, y, x+y$がすべて鋭角のときのみ等式が意味をもつ。この不自然さを解消し、さらに任意の実数値が角度として意味をもつことにも対応すべく、加法定理を保存しながら任意の実数について sin と cos が定義されるようになった。

この場合、実数領域は既存のものと仮定されているので、sin と cos の関数概念の拡張のみが問題になる。幾何学的･直観的な意味をもつ三角関数は限定された領域で定義された。その本質である加法定理等を保存しながら定義域を拡張できたということは、関数概念の拡張であり、加法定理のより広い領域での充足性が成り立つということになる。拡張された後でも sin 等の引数値は角度と考えられ、もとの領域では最初の三角関数の概念が保存されている。

第一、第二段階は制限された領域にのみ関係する概念がより一般的な領域上の概念に拡張されるという数学発展のひとつの特性を示すものだ。これらの場合には関係する概念はもとの領域においては拡張前の概念そのままであることが保証される。

これに対して次の第三段階では「概念転換」というべき状況が生じる。

$\langle 12 \rangle$では、定義域の拡張に際してもとの定義あるいは関数が放棄され、したがってもとの領域においても概念変更が起こるケースを（定）積分とΓ関数の例で説明している。前者では原始関数による積分値から面積としての積分値への移行、後者では正実数でのみ定義されたΓ関数の実数全体への拡張をΠ関数として定義し直すこと、が概念転換になる。周知のように、面積としての積分概念がルベッグ積分、さらに広範囲の積分論に発展することになった。これらの場合でも、基

本性質（積分の線形性、自然数上でのΓ関数の挙動に関する法則等）の普遍妥当性は成り立つ。

なお、積分の場合には定義域は数ではなくて関数族であることに着目しよう。当初の定義域は原始関数をもつ関数族であり、概念転換後にはより広い関数族へと拡張される。

3.1.5 演算と領域の拡張に関するその後

以上のように、『資格論文』は数学発展（の一側面）に関するデデキントの観点を述べたものであり、その意義はその後に展開された『資格論文』に直接つながるデデキントの仕事およびデデキント研究によって強化されると考えられる。

まずデデキントは[7]において『資格論文』の研究計画にしたがう形で実数（無理数）の構成を実行してみせる。さらに[8]では当初は所与のものとされている自然数（正整数）の基礎付けを集合論的構成によって試みている。これら数学上の成果の哲学的な意味づけは3.1.6節で紹介するように[20]等で詳しく検討されている。

[25]（Sieg & Schlimm 2005）は3.1.3節に相当する、新しい関数の導入とそれに伴う数の新領域の創造に視点をおき、それにまつわる「微妙な循環性」（subtle circularity）を指摘している。正整数から整数全体、整数の対としての有理数の構成、その上での加減乗除の定義などはデデキントの出版論文としては現れていない。[25]は未公開の資料の中に現在の数学者になじみのあるこれらの考え方の記録を発見し、『資格論文』における「微妙な循環」の回避の考察がデデキントにすでにあったことを示している。すなわち、デデキントはまず後者関数を自然数領域の生成者として他の演算と区別し、加法や乗法の逆演算を

微妙な循環なしに保証するために整数領域と有理数領域を公理的に特徴づける。この公理的分析（analysis）は綜合（synthesis）によって補完される、という。「総合による補完」とは、それら公理の様式を形成する領域の明示的定義を与えることである。

[25]は自然数（正整数）と後者関数による整数、整数の対としての有理数、有理数の部分集合の対としての実数という三種の構成によるデデキントの数領域の逐次拡張の発想を明らかにした。続けて各ステップでその領域における加法等の演算は、もとの領域上の同種の演算を基に定義されることに注意を喚起している。たとえば有理数に対応する整数の対の加法は、整数上の加法から誘導される、ということだ。

「微妙な循環性」についての[25]の説明は次のようなことである。『資格論文』によれば、新しい数は限定された演算の「無限定な逆演算」によって生成され、限定された演算はその生成された領域に拡張される。限定された演算として正整数上で定義されている加法を考えれば、その逆演算として求められる減法は正整数上のみでは完全に定義されない。つまり定義域を限定しない無限定な逆演算を認めなければならないことになる。無限定な演算である減法によって整数が生成され、その後にもとの限定的演算である加法が整数全体に拡張される、という状況なのだ。通常演算は所与の領域上で定義される。しかし上の状況では、整数領域の生成のためにまず定義域が指定されていない（逆）演算が必要なのである。ここに「微妙な循環」が生じるのである。

[25]でひとつ興味深いことはScholzが1982年の論文で引用しているHerbartの次のことばを冒頭に掲げていることだ:数学は哲学的に扱わ

れることによって哲学の一部分になる。『資格論文』は本論および[25]の上記の観察どおり数学あるいは科学的経験の分析を基にした数学論であるが、哲学的に扱うことが可能な内容であり、そうすることによってデデキントの数学論の根底に流れる数理哲学観としての『資格論文』の意義が生じる、という意味なのだろう。

[7]における実数の構成について一言添えよう。そこでは2個の有理数の集合の組を実数に対応する対象としており、そのような組の構成を「切断 (Schnitt)」と呼ぶ。いわゆるDedekind cutだ。3.1.3節で触れた「大ごと」な仕事とはこのことである。

領域と演算の拡張のこの方法は現在（有理数のコーシー列による実数の構成とともに）数学の標準項目になっている。Dedekind cutという呼称以外はその起源への注目もなくなっている。その事実がデデキントの数学論の妥当性を物語っているといえるだろう。

3.1.6 デデキント研究の紹介

3.1.5節で『資格論文』に関わるデデキントの数学的展開とそれに関する哲学的考察を紹介した。本節では『資格論文』を中心とした数学思想史におけるデデキントの位置付けについてのいくつかの見解を紹介する。

デデキントの数学思想史における位置付けは難しく、研究者の間でも見解が異なる。視点の相違が見解の相違に現れるわけだが、デデキントの時代が数学発展におけるある種の過渡期という理由もあると思う。本論は数学史的考察が主題ではないので、いくつかのデデキント研究を紹介しそれに対する筆者のコメントを添えるに留める。デデキントの数の構成における思想とヒルベルトを通してのデデキン

トの数学観については5.1.1節と5.1.2節で紹介・検討する。筆者は特定の目的のために『資格論文』を考察しているが、その考察の過程全体が筆者のデデキントの一面に関する見解といえよう。

[10]は集合概念の発生期から集合論の創設を経て公理的集合論に至る数学思想史の著書であり、そのなかでデデキントの数学観についても詳細に論じている。とくに「デデキントの数学観がRiemannの影響を受け、RiemannはHerbartを哲学上のメンターとしていた」こと、「Riemannとデデキントは数学研究において集合の言語を導入した初期の人たちである」ことなどが書かれている。[8]につながる書き物でデデキントが写像（Abbildung）の概念の重要性を説いている箇所を引用して、「デデキントはすでに彼の論理主義的（logicistic）観点を示唆している」という。『資格論文』に関しては「デデキントの基礎付け的観点（foundational views）の最初の記録であり、自然数からはじめて算術の段階的・発生論的な展開のプログラムを提示した」と説明している。

[20]は「第一期論理主義の中に位置づけられるもの」としてデデキントの一連の数学的成果を解説・検討し、「[8]に論理主義と看做し得る見解が述べられている」という。『資格論文』の、本論3.1.3節に相当する箇所についても詳しく検討している。そして「『資格論文』は、デデキントの最初の基礎論的見解であり、デデキントの厳密さの問題への関心と数学の歴史的発展という理解の視点が現れているという点で興味深い」と言う。『資格論文』は数学の概念拡張の具体的成果ではなく、概念拡張の仕組みについての見解、という意味で"foundational"あるいはメタな考察であることは間違いない。ただし"基礎論的"という表現が適切かどうかは検討の余地がある。現在の"（数学）基礎論"

という表現に関係するかどうか分からないからである。デデキントの観点がそのように限定的に表現されるものでないことは確かだ。

さらに「『資格論文』には数の系（System）という概念は出ていないのに対して、[7]からは系から新しい数を定義（創造）するという立場をとるようになる」と指摘する。この点は3.1.5節で紹介した[25]でも取り上げられており、[20]もそれを参照している。

[20]の「デデキントが無理数を新しい数として導入した更なる理由は、数の同質性（homogeneity）の保存という目標であり、数に関するわれわれの直観的観念のあるものを保存しようとしたのである」という一文は本論にとって貴重なリマークだ。この同質性という観点こそ本論が、数に限らず様々な数学的対象に関する概念の保存の仕組みを求めて、『資格論文』の紹介を試みている所以である。3.1.7節でそのことに触れる。

なお[20]はデデキントの概念発展に際しての二つの要請に言及しており、保存拡大的と内容的という表現を使っている。本論の3.2節で展開される同質性条件の形式保存性と実質保存性に対応する。

[23]（Reck 2003）は[8]に焦点を当て、未公開の資料にもあたり、デデキントが「方法論的構造主義者でありまた論理的構造主義者であると解釈できる」と主張する。ここで[23]のいう構造主義とは、「(数学における）個々の諸対象ではなくそれらを抽象化して残った構造の研究が数学である」という観点のことだ。構造自体を数学研究の対象とすることはブルバキの構造主義に他ならないが、デデキントはそのように構造を自覚していたとは考えにくい。それのみならず、4.1節で見るように、ブルバキは「デデキントもペアノもヒルベルトも数学を構造的に見たにしても、それは個々の理論の構造に限定されて

いた」という趣旨のことを述べている。

[10]も「デデキントは古典数学を再考してそれを体系づける試みをしたが、厳密な構造的視点で数学を見たかどうかは疑問である」と指摘している。デデキントにとっては数の体系が本質的であったのだと考えられる。

[25]と[23]によれば、「デデキントは有理数や実数について自由な創造（free creation）という表現を使う。」[23]はこの「創造という概念を文字通りに、かつ深刻に受け止めるべきだ」と主張する。「デデキントはある書簡の中で、数学の実践において実数は（有理数の）カットとは別の新しい対象であり、自分はカットを直接扱うことはしない、と書いている。」デデキントの[7]や[8]を読めば、数学における"概念の自由な創造"がデデキントの数学観の根幹にあったことは推察可能である。

『資格論文』等の英訳を掲載する[9]の編集者Ewaldのノートも参考になる。たとえばデデキントが偉大な主流の数学者であったこと、とくに代数的数論の創始者であり、そのほとんど全道具立てを導入したこと、それらは二十世紀の数学を支配したことなどを確認するとともに、デデキントが数学の基礎における仕事で哲学者に知られていることを説明している。

また数学の基礎に関するデデキントの後年の仕事の萌芽が『資格論文』に見いだされること、すなわちそこにおいてデデキントは数学における数の新しいクラスの起源の一様な、アドホックでない記述を展開することに関心をもち、その分析を[7]と[8]で深化させたこと、も述べている。さらに、『資格論文』でデデキントが検討している生成原理、すなわち数の新しいクラスは旧クラスのある演算のもとで

の閉包をとることによって生成されるという原理と数の諸クラスを根元的であるとみなす観点とが彼を代数的数論における新しい構造の発見に導くことになったことにも言及している。

いずれにせよ、デデキントの抽象的・概念的観点（Riemannの影響といわれる）によって導かれた数学の方法論こそ、その後の構造主義的数学の文脈において非常に豊かな結果をもたらしたといえるだろう。後の5章においてデデキントの思想史的意味を少しずつ語ってゆく。

3.1.7 『資格論文』の表題について

『資格論文』の標題は”Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik”である。この中のFunktionを本節では関数あるいは演算と訳している。『資格論文』で扱われるFunktionの例がすべて関数か演算だからである。数学では一般に関数と演算は区別して使用されるが、『資格論文』におけるFunktionの例は加法や正弦のように通常関数と呼ばれるものと積分のように演算と呼ばれるものを同等に扱っているので、本節では主に演算という用語を使用している。

しかし3.3節で見るように『資格論文』から導き出される原理は”関係”に関しても適用可能である。Funktionは本来機能の意味であり、それは関係性をも意味する。したがって本論ではFunktikonを広く機能あるいは関係性まで含めて考える。

3.2 概念拡張における同質性

『資格論文』の主眼は題名の示すごとく新しい関数の導入であるが、それらに伴う領域拡張や従来の関数の定義域の拡張も必要な場合がある。

『資格論文』は１８５４年に語られたものであり、１９世紀半ばという時代の産物である。その内容もその意義も時代の中で位置づけられることが望ましい。しかしここでは原典を丁寧に読み込んで、その意図を汲み上げることに専念する。

筆者の理解では、『資格論文』の意義は拡張前の対象と拡張後の対象の間の概念的つながりを解明しようとしていることにある。すなわち『資格論文』は両者の接点を見極め、それを通して自然に接続される場合に拡張の意義を認めているのである。

前3.1節で本節の準備として、『資格論文』のサーベイを行い、『資格論文』およびデデキントの諸成果に関する既存の文献をいくつか紹介した。デデキントの数学観の歴史的位置についての研究にも文献[39]では触れているが、本論ではそれは3.1.6節で紹介した。それら以外にも多くの研究がある。それゆえに、『資格論文』の解説という意図は本節にはない。また、既存の文献に関する検討もここではしない。『資格論文』から筆者なりの結論を導くことが本節の目標である。

同じ資料を扱っているので本節には3.1節と重複する表現も多々あるが、ここでは前3.1節よりも深く『資格論文』に踏み込んで分析を精密化し、3.2.5節で結論を導く。

ここで一言所見を述べておきたい。それは、『資格論文』は一つの理論の必要に応じた拡張について考察しているのであって、数学を全体として下から積み上げてゆく構成主義あるいは基礎づけ主義の見解はとっていない、ということである。また、その数学論は数学の発展の一つの方向に関することであって、数学の発展はその方向に限定されるものではないことを注意しておきたい。『資格論文』の理解のためには、予め現在の視点での枠組みに嵌め込むことをしてはなら

ないと考える。

本節の内容と特色はおよそ以下のとおりである。本節では『資格論文』の主張について先行文献では深く追求されていない概念の明確化・精密化を目指す。とくにデデキントが概念拡張の妥当性の要件としたと考えられる三項目である、”内的必要性”、”法則の遵守”そして”実質の不変性”、について、『資格論文』では全編を通して説明されてはいるが、本節でさらにその意味を哲学的に明確にし、汎用性のある定式化を行う。

3.2.1節から3.2.3節で『資格論文』における概念拡張についての考察を行う。3.2.4節では『資格論文』で提示される数学の様々な場面における具体例を、五場面に分類し、それぞれにおける概念拡張の特性を詳細に記述し分析する。ここで数学における”場面”とは、ある理論とそれに関する数学活動を意味するものとする。正整数上の加法と乗法の理論とこれらの演算に関する様々な算術的操作は、その基本的な例である。

3.2.5節では、先行節の分析から『資格論文』において適切であると認められている概念拡張を”同質性”という術語で表現する。筆者の提案する同質性原理は、”内的必要性”および”保存性”という二つの要請で構成される。そして保存性は”形式保存”と”実質保存”から成る。これらがそれぞれデデキントの考える法則の遵守と実質の不変性に相当する。

これは筆者の観点であるが、いかなる思想も議論も、その解釈は何等かの観点を通してしか行われ得ないものだ。その際に自らの立場を明確にしつつ原典の意図を丁寧にたどりながら解釈してゆくべきであると考える。その原則をできるだけ守るつもりである。

3.2.6節で『資格論文』の数学観を本節の内容に沿って述べなおしてみる。そしてデデキントの数学観に調和する概念拡張は、数学の発展における一つの重要な方向であると結論づける。

3.2.1　科学一般の概念発展について

3.2.1節～3.2.4節で、『資格論文』における科学・数学の発展に関する観点を筆者の言葉で述べてゆく。3.1節と同様に[9]に倣って原文『資格論文』のパラグラフ番号を引用し、第iパラグラフを$\langle i \rangle$で表す。

3.1節ではデデキントの数学観による数学の概念拡張の場面は三種類に分類されると述べた。第一は新しい演算とそれに伴う新領域の創造であり、『資格論文』のパラグラフ$\langle 7 \rangle$- $\langle 9 \rangle$に相当する。正整数領域とその上の加法と乗法を基礎にして、逆演算である減法および除法とそれらが実行されるための有理数領域、その上での指数関数が定義されるための無理数と複素数の領域が創造される。

実数領域が導入されたものとした上で、第二は実数領域の一部分で定義されている演算の実数領域全体への定義域の拡張問題であり、その際には定義の仕方、すなわちその演算の概念が拡張される。これは$\langle 10 \rangle$- $\langle 11 \rangle$に相当する。

第三の$\langle 12 \rangle$では、演算の定義域の拡張に際してもとの演算の定義が放棄され、演算の概念転換が起こる。

しかしより詳細には3.2.4節で見るように、『資格論文』における概念拡張は五種類の数学的場面において検討されている。いずれの場合にも、演算の適用領域の拡張は、限定された領域における演算の基本性質、すなわち当該演算を規定するとみなされる基本性質の、拡張された領域での充足性が要請されている。その基本性質あるいは

法則を旧･新の概念の接点とみなすことができる。この要請にしたがう概念拡張は”保存的”と称するのが相応しいだろう。

⟨3⟩ の冒頭でデデキントは、「科学の目標が不変の真理の究明であるとしても、人は大概はそれに単に近づけるだけである」という意味の発言をしている。さらに次のように主張する。

> これらの結果に至るまでの人の知識の歩みを表現し続けるものである科学自体には、無限の多様、無限に異なる表現が可能なのである。(『資格論文』 p.428)

それは「人間の不完全さによる恣意性」の問題であるという。そしてたとえば鉱物の分類方法について意義深いものとそうでないものの区別をするのは

> 人が科学の内的性質 (die innere Natur der Wissenschaft) に置くところの仮説である; さらなる経過においてはじめて科学はそれに対して答える; ··· (『資格論文』 p.429)

(キーワードには括弧内で原語を付す。以下同様。)

科学の内的性質を科学者がどのように発見し、理解し、言語化してゆくか、は一筋に決定されるものではないが、科学者は概念拡張を行う際には、その内的性質を十分に把握しつつその時点までに得られた知識を活用するので、方向性を誤ることは少ない。とくに、証明という保証機能をもつ数学においてはそうである。

法学においても類似の現象が生じるとするパラグラフ ⟨4⟩ には、次のような興味深い表現がある。

> 何かある動機から導入された諸概念が、それらが最初限定的過ぎるかあるいは広過ぎて理解されたために、それらの

有効性、それらの射程範囲をより大きい領域に拡張できるように、修正を要求する。(『資格論文』p.430)

後出の数学に関する諸議論はこれと類似の形をしている。

⟨5⟩で科学の創造的発展が歴史的事実であるだけでなく、内的必要性（innere Notwendigkeit :『資格論文』p.430）に基づくものである、と主張される。

ここで本論全体に関わる用語について述べておく。Notwendigkeit の日本語訳は必要性あるいは必然性である。innere Notwendigkeit という表現があることに鑑みれば必然性という訳が適切であるかにみえる。しかしその意味するところは論理的必然性ではなく、様相における必然性でもなく、また自然的な因果関係を表すものでもない。数学活動において重要であること、という意味で必要性が適切であると考えられる。したがって本論ではNotwendigkeitの訳は”必要性”で統一する。

以後の話の展開のために、”内的必要性”について多少考察しておく。概念拡張における必要性は、たとえば3.1節で議論された算術における減法のように、当該分野の活動から生じる必要性と理解できる。”内的”については、p.429から引用した”科学における内的性質”、すなわち当該科学内部の要素のみに依存して生じるもの、あるいは後の5.1.1節で[8]から引用するように、「当該理論に無い異質な概念が入り込まない」という意味だと理解するのが順当だろう。

3.1.2節で、⟨3⟩と⟨5⟩から導かれるデデキントの「科学の発展の一般法則」を次のように解釈した。（体系化された知識としての）科学（の各分野）においては、過去の成果に加え、その内的必要性によって、次の方向が逐次決まってゆく。科学者は多様な可能性の中から内的必要性に導かれて適切な方向を選び取ってゆく。もちろんここで内的必要

性によって次の方向が一意的に決定されると言っているわけではない。

⟨6⟩で数学の発展法則に関わる一般論が述べられる。最も明瞭であるとされる数学にも、科学の発展における一般法則は適用されるという。

> 数学の諸定義もまた最初は必然的に限定された形で登場する。そしてさらなる発展によってはじめてそれら定義の一般化が生じる。(『資格論文』 p.430)

しかし数学では、定義の拡張において

> 当初の諸定義から生じかつそれら諸定義によって標示される概念に対して特徴的であるような法則を普遍妥当とみなすという原則 (『資格論文』 p.430)

が適用されるという条件のもとで、恣意性が制限されるという。そして

> 逆にこれらの法則は普遍化された諸定義の起源になるだろう; (『資格論文』 p.430)

ただし

> 普遍的な定義はどのように理解されなければならないか···
> (『資格論文』 p.430)

ということを問いながら法則を見出しその普遍妥当性を確認しなければならない、という趣旨が続く。

以後のパラグラフで言及される具体例では上述の原則とこれらの見解が明確に示されている。

このパラグラフの最後は

> この帰納の原理をいくつかの例において実行する(『資格論文』 p.430)

ことが自分の意図である、と締めくくられている。帰納原理については最後にApeltの「帰納論」を紹介して、それ以上立ち入らない、としている。帰納への言及は、このような科学の発展の仕組みに関する考察は一つの解釈であり(もちろん慎重に検討され実際にその方向が実現される予想のもとに、である)、それが帰納の原理によって妥当化されると主張する意図があったということだろう。

以後数学の具体的な場面における概念拡張の仕組みが続く。

3.2.2 演算による領域の拡張

パラグラフ⟨7⟩は間接的な逆演算とそれに伴う領域の拡張という数学における概念拡張に関する基本的な項目である。しかしその前に所与の領域内での反復のまとめ上げによる新しい関数の導入が説明される。初等算術の基本的操作は後者関数であり、他はそれを基礎にして「反復のまとめ上げ」によって生成される。

> この初等演算の複数回続けて反復された実行を唯一の行為にまとめるならば、人は加法概念に達する。これより同様にして乗法概念が、それより累乗概念が発生する。(『資格論文』 p.431)

この手続きを繰り返すだけならば、関数の定義領域は正整数領域を越えることはない。しかしそれでは算術のさらなる発展には不十分なのである。なぜならば

> 間接的な逆演算である減法、除法等の無条件の実行可能性の要求（die Forderung）が新しい数のクラスを形成することの必要性（Notwendigkeit）に至る、$\cdots$（『資格論文』p.431）

この結果負の数、有理数、無理数、複素数と、領域が拡張される。新しい諸数の実際の形成については『資格論文』では言及されていない。現在では正整数からのこれらの諸数の逐次構築は良く知られているので立ち入らないが、[7]において無理数の形成が扱われていることは指摘しておこう。なお、『資格論文』を通して正整数についての疑義は表明されず、最も基本的な領域として前提されている。[8]ではじめてそもそも正整数であるところの数とは何か、が問われることになる。

『資格論文』では間接的逆演算とそれに伴う新領域に関する動機は述べられていないが、方程式を解くという活動を可能にするための演算の必要性というコンテクストで捉えられるべきだろう。数学概念の拡張が必要と認められるのは、それが数学の活動において自ずと要求されるときだからである。それは現実の数学活動に依存するものであり、拡張の時期に必要と認められるものが導入されるのだ。

新しい演算とそれに伴う数の領域の創造の結果問題になるのは、数学理論の整合性である。3.1.3節でも指摘したように、既存の演算を拡張された領域全体の上で定義しなおさなければならない。そしてその結果が旧領域ではもとの演算概念と一致すること（本論では"実質保存"と呼ぶ）およびその基本性質を規定する法則が拡張された領域で改定後の演算について成立すること（本論では"形式保存"あるいは"法則保存"と呼ぶ）が要求される。後者は⟨6⟩で述べられる「一般原理」である。これらの保存性が旧理論と新理論の接点になる。旧・

新における領域の要素と演算は保存性を通して同じ機能を果たす、あるいは共機能性をもつ、とも表現できる。

内的必要性と保存性という制約は”恣意性の排除”という意味をもつ。しかし恣意性の排除は概念拡張を一意的に規定するものではない。二つの制約は数学者が創造性を発揮しながら遵守すべきものである。以下の諸例がこの解釈を裏付ける。

この後、パラグラフ⟨8⟩で乗法の整数領域への拡張が詳しく検討されている。正整数領域における乗法の本質は被乗数の加法の反復のまとめ上げであるが、その定義では負の乗数に関しては乗法に意味を与えることはできない。

> 定義を最初の制限から解放するためには、特別な定義を必要とする；(『資格論文』 pp. 431-432)

しかし新しい定義は任意性を許す。たとえある定義が有用であることが判明しても、それが偶然でなかったとはいえないかもしれない。そのような事態を避けるために

> ⋯ 一般的原理を使用しよう。⋯ 人は積がどの法則に支配されているかを調べなければならない。そのためには積が受ける変化の規定だけですでに十分である。(『資格論文』 p.432)

積、すなわち乗法が受ける変化とは、乗数が1だけ増加したときの積がもとの乗数による積に被乗数を一回加えたものになる、ことである。正整数で成り立つこの事実が乗法の満たすべき等式として扱われ、それより導かれる加法と乗法に関する諸定理が、加法と乗法に関する法則となる。

⟨9⟩では累乗について類似の考察を行い、その指数を正整数から有理数全体に拡張しようとすると必然的に無理数、さらに複素数領域が必要になることを説いている。デデキントの見解が明確に表現されている部分を引用しておく。

> ここで少なくとも虚数の出現とともに体系的な算術 (systematische Arithmetik) の主要な困難が始まる。それにもかかわらず以下のことは期待できる。すなわち、人はここでもまたいかなる恣意性も許さず、つねに発見された法則自体によって導かれるべきであるという原則 (Grundsatz) の恒常的な使用によって、算術の真に堅固な体系を獲得するだろう。(『資格論文』 p.434)

3.2.3 既存領域内での演算概念の拡張

パラグラフ⟨10⟩-⟨11⟩では実数領域内での定義域の拡張が三角関数を例に考察されている。デデキントは明言していないが、⟨9⟩の要求によって実数領域が創造されたものと仮定していると理解してよいだろう。

正弦と余弦は最初は幾何学的に直角三角形の辺の比によって鋭角上の関数として定義された。しかし、直角以上の角度自体は古くから扱われているので、三角関数の定義域の拡張を求めることは自然なことであった。⟨10⟩では、一般的にこれらの関数が考えられることもあるが、その様子は「完全に任意に見える」という。

⟨11⟩におけるその解決方法は、大筋次の通りである。最初限定された領域、すなわち鋭角の領域、で定義された正弦と余弦についての加法定理を普遍的な法則として採用する。正弦の加法定理は3.1.4節の

式のように、二個の角度の和の正弦の値（左辺）が各々の角度の正弦と余弦の値のある組み合わせ（右辺）に等しいことを表現している。鋭角の和が直角以上の場合にはその和における当該関数の値を、加法定理の右辺で定義する。

> そしてそのように続行するならば、人は容易に正の角度に対する一般的定義へ、そしてまた減法によって同じように負の角度に対する一般的定義へと達するのである。法則はまたここで、人がある概念を最も有効になるようにするには、それをどのように捉えるべきかを教えてくれる。(『資格論文』p.436)

上述のように、ここでは領域の拡張は生じないので、関数概念の拡張のみが問題になる。幾何学的･直観的な意味をもつ三角関数は限定された領域で定義された。その本質を表現する法則の一つである加法定理によって定義域の拡張が可能になる。その方法は同時に拡張された定義域でも加法定理が成り立つことを保証する。拡張された後でも引数は角度とみなされ、もとの領域では最初の幾何学的三角関数の概念が保存されている。なお角度と実数とは、とくに断りなしに同一視されている。

〈12〉は次のように始まる。

> これらの例が、数学において限定された領域にのみ関係する概念のより一般的な諸領域への発展の特性を立証するのに十分である。これらすべてのケースにおいてしかし限定された領域に対するもとの諸定義は触られていない。(『資格論文』p.436)

ここで強調されているのは定義域拡張という意味での概念拡張である。したがって限定された領域で定義された概念は変更されない。

しかし3.1.4節で述べたように、定義域の拡張に際してもとの演算あるいは関数が放棄され、したがって旧領域においても概念変換が起こる場合も考察の対象になっている。積分演算とΓ関数の例で説明している。積分演算の場合には演算の線形性などが普遍妥当な法則の役目を果たす。

なお、積分演算の場合のように、概念拡張についての考察において、対象領域を数に限定する意図は『資格論文』にはみられない。このことは『資格論文』から数学観を抽出する際に重要な事項である。

最後のパラグラフ$\langle 13 \rangle$では詳細を語る余裕はないと断りつつ、類似の事項として楕円関数の理論の変遷に触れている。そして最後にApeltの本の紹介で、この講演を終えている。

3.2.4 デデキントの拡張の分類

3.1節および3.2.2節と3.2.3節で見たように、デデキントの概念拡張の考察はいくつかの数学的場面から成る。3.1節ではそれらを三段階に分けて考察したが、より精密な分析の結果では五場面に分類するのが妥当である。それらの場面とそれぞれにおける基本原理を整理すると、次のようになる。

第一場面は、$\langle 7 \rangle$の最初にある、同一領域内での反復のまとめ上げによる新しい関数の導入であり、この場合には新しい演算の明示的な定義が与えられる。反復のまとめ上げを一つの演算とみなすことは、原始再帰的原理の容認と言い換えることもできる。これなくして算術は始まらないのである。

$\langle 7\rangle$の主題である第二場面は間接的逆演算に関わるが、その演算は、それが満たすべき要件によって暗黙的に導入されるものであり、演算の構成方法が与えられるものではない。それに伴って領域の拡張が要求される場合がある。

第二が概念的には一番難しいケースで、数学における概念拡張の本質を含んでいる。通常演算は定義領域と値をとる領域との三つ組で考えられるので、新しい演算とその定義域は同時に導入されるべきものである。減法の導入の際に負の数が同時に求められる所以だ。

現代では領域の指定なしにある機能をもつ演算という概念は珍しくない。その意味でたとえば加法に関する方程式を解くべき新演算を求めるとき、それが適用可能なように拡張された数領域の形成、ということで解決がつく。しかし当時としてはこの点はいささか微妙であり、その点に関するデデキントの解決の試みを[25]がデデキントの未刊の資料も含めて研究している。ここでは『資格論文』の内容を吟味してそれから外れないようにしながら、現代的観点から一般的な原理を抽象する方針に徹する。

もうひとつ、たとえば加法も拡張された領域で定義し直される、という意味で概念拡張が起こっていることに留意しなければならない。こうして拡張された加法などの本質が変更されていないという条件が保存性である。

デデキントの考察の範囲においても数学発展の方向が一筋ではない可能性があることは明らかだ。最初に正整数上の乗法に関する方程式を解こうとすれば、要求されるのは正の有理数だ。正有理数領域での算術において加法に関する逆演算のために負の有理数領域を導入する、という順番でもよいわけだ。

第三は限定された領域で定義された既存の演算の定義域を拡張しようとするときに、領域の拡張が要求される場合であり、⟨9⟩に相当する。

有理数全体において累乗の定義を試みる場面を考えよう。指数が正整数であれば、累乗は乗法の反復のまとめ上げによって定義されている。その意味で新しい関数の導入ではない。しかし任意の有理数を底と指数にとる累乗の値は無理数、さらに複素数を要求する。概念拡張は指数が正整数のときの累乗に関する法則のもとで行われる。しかもその拡張が全く新しい数の領域を要求するという特徴をもつ。指数を正整数に限定すれば、拡張前の性質が保存されている。ここで注意すべきことは、加減乗除および累乗の定義域をすべて複素数にまで拡張しなければならないことだ。

第二と第三の場面は、現在の我々がその本質を抜き出そうとするときにとくに慎重を要する。負の整数、有理数、無理数、複素数などは現在の数学においては標準的な対象であり、その構成方法も既知であるために、その存在論的意味などについて通常の数学活動で語られることはないからである。デデキントの時代にもこれらの数は使用されていたが、その導入のされ方がアドホックであったことからデデキントが問題視して取り上げたのである。

第四は⟨10⟩-⟨11⟩に相当し、既存の演算の、全体領域内での定義域の拡張であり、もとの定義域では演算の意味が不変な場合である。三角関数の例で説明している。

以上では、初期の限定された領域では既存の演算の意味は拡張後も不変である。

第五は⟨12⟩に相当し、全体領域内での定義域の拡張ではあるが、拡

張の際に初期の演算は放棄され、演算自体の転換が起こる場合である。そうではあっても、それを束縛する初期の法則は遵守される。積分の線形性は法則の一例である。この場合、拡張された演算の旧定義域への限定はもとの演算とは内容は異なる。しかしデデキントがこの場面を『資格論文』に含めた意図は、このような状況でも実質が不変と見なせると考えたからであろう。その意図を生かすことは次のように考えれば可能である。旧領域に限定された拡張後の演算あるいは関数は、もとの演算あるいは関数で完全に置き換えることができる。その意味で両者は数学理論の中では同一視可能なのである。

3.2.5 妥当な拡張の原理：同質性

以上の概念拡張に関するデデキントの観点を壊さないようにしつつ、現代の目から見てその本質を抽出し、様々な数学の場面で拡張の妥当性の説明を可能にする原理は、以下の二点から成ると考えられる。すなわち、関連理論の内的要求によっての拡張であること（内的必要性）および概念の基本性質を保存すること（保存性）である。保存性には二面ある。一面は拡張後の概念が初期領域に制限されたときにもとの概念と一致すること（実質保存性）であり、これはヒルベルトの言を借りるならば、内容的 (inhaltlich) 保存性とも言える。[20] も内容的という表現を使っている。他の一面はもとの概念を規定する（形式的に表現された）法則の普遍妥当性が成り立つこと（形式または法則保存性）である。これら二種の保存性はいわば一つの事象の表裏といえよう。

本論における拡張の妥当性というのは決して基礎づけ的な構成性でも無矛盾性の問題でもない。各場面でその拡張が数学的に自然で

あることの説明可能性なのであり、拡張後の演算や定義域を初期のものと同質であると受け止めることができる、という意味である。そしてそれはあくまでもそこで問題になる演算やその法則に関して相対的なものである。このような妥当性の意味付けは『資格論文』の趣旨にも適うものと考えられる。

上で提案された拡張原理を説明するために、まず何か数学の理論を想定する。これを初期理論と呼び、拡張後のものを新理論と呼ぶ。これらの名称は区別のための符号にすぎず、本論のみの用語である。

数学の理論として、その理論で初期に仮定する領域、すなわち対象の集合、その上あるいはその部分集合上の演算あるいは関係、それら演算あるいは関係を特徴づける法則、の三つ組みを設定する。ここで注意すべきことは演算あるいは関係とそれらが定義される集合、すなわち定義域は前述の減法と負の数のように対の概念として捉えておくべきであるということだ。

理論の拡張とは、領域の拡張、新しい演算または関係の導入あるいは既存の演算または関係の定義域の拡張を意味する。法則は初期理論のものを形式的に引き継ぎ、新たに加えられることもある。

理論の妥当な拡張とは、上述の内的必要性と保存性を満たすものであるとする。このとき、新理論における新領域あるいは新定義域は初期領域あるいは初期定義域と、当該演算あるいは関係およびその法則に相対的に同質である、つまり同じ機能をもつとみなせる。同様に、定義域を拡張された既存の演算・関係は、初期理論におけるものと同質とみなせる。換言すれば、数学の対象として同じ性質をもっている。したがってこのような条件を満たす拡張を同質的と呼ぶ。

同質的な概念拡張は、領域の要素や演算の本質が保存されるとい

う意味で、妥当な拡張であると考えられる。同質性を内的必要性と保存性に絞ることが可能なのは、3.2.1節~3.2.3節で紹介した『資格論文』の内容全体から汲み取れることである。

この観念的主張を3.2.4節の各場面に沿って具体的に見てゆく。

第一場面における反復のまとめ上げによる演算の導入はそれ自体が算術の基本である。その意味で内的必要性は明らかだ。この場合には領域も既存演算も不変であり、新しい演算は具体的に反復のまとめ上げによって構成されたのであるから、その性質を算術における法則として新たに掲げることができる。

第二の暗黙的な逆演算の導入では、演算の構成方法は定義されない。逆演算は方程式を解くなどの数学における要求から導入されるものだ。これが内的必要性である。実際にそれが満たすべき性質をもつ演算を仮定しても理論全体の整合性が保たれることが数学的に示されなければならない。たとえば減法を正整数に限定して定義することも可能ではある。しかし普遍的に方程式を解くという数学の要求を満たすためには被減数と減数の大小にかかわらず減法を定義する必要がある。現在では整数の構成方法、その上での加法、乗法等の再定義、そしてそれらに関する保存性は示されている。加法、乗法、減法に関しては整数は正整数と同質であり、加法と乗法は拡張前の演算とそれぞれ同質である、と言える。

第三場面では、初期理論の領域は有理数の集合であり、領域全体で定義される加減乗除の演算および指数を正整数に限定した累乗とそれらの関連法則を前提とする。累乗の定義域の全領域への拡張は数学の遂行における要求である。その結果無理数および複素数が要求され、全体領域が拡張されることは前述のとおりである。それに伴

い、加減乗除の演算の定義域も拡張されるが、それらを有理数領域に制限した場合にはもとの演算と一致し、新領域でももとの法則は満たされる。累乗については指数が正整数に制限された場合にはもとの累乗と一致し、拡張領域でも諸法則は成り立つ。

ところで、無理数および複素数の導入の必要性は有理係数多項式の解の問題からも要求される。これも一つの内的要求である。注目する場面によって異なる方向性も可能な例だ。

第四場面の初期理論は、直角三角形の角に対応する辺の比としての三角関数の理論であり、その定義域を実数全体に拡張する方法が与えられた。その方法から三角関数の実質は拡張後も鋭角については不変であり、加法定理等の法則は同じ形で成り立つ。その意味で鋭角に対応する実数の領域と実数全体とは三角関数の加法定理に関して同質であると言ってよい。

第五場面については、積分のケースを扱おう。実関数全体の領域の中で、初期理論における定義域は原始関数をもつ関数の族である。積分はまた面積の意味をもち、したがって面積に対応する演算を求めるのが自然な要求だ。その結果がリーマン積分であり、新定義域はリーマン可積分関数の族になる。原始関数をもつ場合に限定すればもとの積分と同じ意味になり、値も一致する。線形性などの法則は成立する。積分自体の意味が変化するにもかかわらず、この拡張も内的必要性と保存性を確保している。

以上『資格論文』の例はそのタイトルに「新しい関数の導入」とあるように、すべて演算に関する拡張であった。しかし、『資格論文』で展開された概念拡張の観点の有効性は演算概念に限られない。次の3.3節では関係に関する拡張の例も含め、さらなる例を示す。

以上の観察をもとに、同質性の各要因について再考しよう。内的必要性とは、数学のある場面である分野を産み出す要因となる目的の発生を指すと解釈できる。それはその場面での活動による要求の結果であり、既存の理論とその上での活動から生じるという意味で「内的」なのである。保存性とは新理論が初期理論と断絶せずにつながって首尾一貫していることである。その要因の一つは形式保存性が成り立つこと、すなわち、初期理論における概念を規定する法則が普遍妥当であることだ。もう一つは実質保存性、すなわち概念の内容が変わらないことである。したがってある理論の拡張が同質的であるならば、その結果の新理論は初期理論の自然な発展であると捉えることができる。

ただしデデキントは決して断絶のある飛躍を否定していない。『資格論文』の論点はあくまでも概念拡張に限定されている。

なお、[40]では本論の形式保存性に相当する条件を"保存性"、実質保存性に相当する条件を"健全性"と呼び、両者は分離した概念として扱っている。しかし、これら二者は分離されるべきものではなく、また、保存性と健全性の対は論理学における用語と混同されやすい、という助言があり、再考の後現在の内容と用語になった。

3.2.6 内的必要性の意義

以上で『資格論文』に込められた概念拡張に関するデデキントの哲学を筆者の解釈を通して明らかにした。最後にそれを簡単にまとめておこう。

内的必要性によって数学の発展の方向が一筋に決定されるものではないことは、すでに述べた。『資格論文』では方向があたかも決定

されているように見える例が多かった。しかしそれは一つの道をたどり、それが発展の原理に適っていることを示したものであり、一般には数学者の創造力の発揮が可能になるように発展の道に緩みをもたせなければならない。様々な情報のなかから発展の必要性を見出し、形式的および実質的保存性が成り立つ拡張によって新理論を創造するとき、それが初期理論と同質性をもつものと認められる、ということを『資格論文』から読み取れる、というのが3.2節の主張である。

先行する節でも述べたように、『資格論文』における数学観によれば、数学のある場面において、自ずと新な目的が生じ、その目的達成のために、あるいはその問題解決のために、新たな演算、関係、領域などの創造が行われ、理論が発展する。内的必要性とは、このように次なる目的が自ずと生じることとも言える。そして生成される新な概念は一意的ではないがその目的に適うという制約のもとで規定される。それゆえに保存的なのである。このような数学概念の拡張による数学の発展は、数学の一つの大きな流れであり、現在でも有効な視点である。『資格論文』はその源流といえるし、現在でもその意義は失われていない。

この観点から概念拡張の同質性を再度記述してみると、次のようになるだろう:その拡張が、初期理論から発生する問題が提供する目的に適うものであり、新しい演算や要素も含めてもとの概念の働きが保存される、その意味で共機能性が成り立つことである。

3.2.4節の第二場面への解説に示唆されているように、デデキントの論点は種々な拡張が段階的に逐次決定される、ということにあるわけではない。恣意性の排除と一意性とは別のことである。発展の道筋は一筋ではないかもしれないが、意味のある拡張はしかるべき原

理に基づいている、というのがデデキントの数学観なのである。それは概念発展の時系列の観察を基にしてその仕組みを合理的に再構成しているものであり、同時に数学発展の標準的方法論を提示してもいる。そして基本的な具体例がこの基準に準拠していることが示された。さらに多くの具体例がデデキントの数学観に当てはまることは3.3節で示す。

なお、概念拡張の”保存性”という表現の意味は本節を通して説明してきた通りであり、数理論理学における”保存的拡大”(conservative extension)とは別の事象であることに再度注意を喚起しておきたい。

3.3　具体例と計算可能性

以下まず3.3.1節でさらなる例によって、妥当な概念拡張の条件として同質性を提案した本論の『資格論文』の解釈の意義を補強する。とくに拡張されるべき概念として演算のみならず性質あるいは関係も含めて同質性が適用可能なことを示す。次に3.3.2節と3.3.3節で不連続関数を含む関数族に関する二つの計算可能性理論が連続関数族における計算可能性理論の同質的な拡張になっていること、したがってこれらの研究方法が妥当であることを示す。

3.3.1　さらなる例

『資格論文』では当時の数学における基本的な場面を題材に概念拡張に関するデデキントの数学観が述べられており、それらは3.2.5節で提案した同質性の条件を満たしているのであった。その後の数学の発展においても拡張原理に沿う例は多い。現代の問題への適用においてはデデキントの意図を損なわない範囲でその後の数学の発展に

照らし合わせて考察の範囲を広げてゆくことは許容されるものと考える。同質性という原理の汎用性・有効性を示すためにも、さらにいくつかの例を挙げたい。

第四場面の例として、2次元点集合の面積と測度の関係およびリーマン積分とルベーグ積分の関係を見よう。

平面図形の面積は四角形や円などについて良く知られた概念である。素朴な意味の面積とは図形に実数を対応させる演算と見なすことができる。2次元点集合の族のなかで通常の意味の面積が確定するもの全体の領域で、面積という演算が定義される。面積に関する法則は空な図形の面積は0であり互いに疎な有限個の図形の和の面積は各図形の面積の和であること等だ。しかし図形という性質を持たなくても面積に類似の性質を持ち得る点集合が存在し、面積の概念の拡張が望まれた。これが内的必要性である。拡張された面積は測度と呼ばれる。測度を持ち得る集合は可測集合と呼ばれる。典型的な測度としてルベーグ測度がある。ルベーグ測度は1次元点集合にも定義される。いずれも上記法則を満たし、図形と呼べる集合では面積と同じである。それゆえ可測集合は図形と同質であり、各測度は面積と同質である。

次にルベーグ測度と密接な関係にある、ルベーグ積分を取り上げる。初期理論は実関数の族全体を領域とするリーマン積分の理論とする。その定義域はリーマン可積分な関数族という他はない。法則は積分の線形性などである。面積としてのリーマン積分の本質を捉えたルベーグは、ルベーグ積分に行き着いた。この場合の内的必要性はまさに積分演算の本質から生じている。定義域はルベーグ可積分な関数の族に拡張される。この族を積分とは独立の概念で規定するこ

とはできそうにない。つまり定義域は演算の拡張によってのみ規定される。ルベーグ積分は演算としてリーマン積分の拡張であり、積分演算の諸法則を満たす。ゆえに実質的および形式的に保存性を満たす。

次に演算ではなく関係あるいは性質に関する拡張例を挙げる。この場合には定義域という言葉は適切ではないので、集合論の言葉を使って”外延”を扱う。ある集合上の関係（性質を含む）の外延とはその集合の要素の組でその関係を真にするもの全体の集合とする。したがって関係の場合には基礎になる集合とその要素の組の集合の双方を考えなければならない。たとえば正整数の自然な順序関係ならば、外延は正整数の対で第一要素が第二要素よりもその順序関係で前にある、あるいはより小さいものの集まりである。

最初の例は証明論的順序系である。簡単に紹介するが、数学的事実については、たとえば [27]（Takeuti 1987）に詳しい。

証明論においては構成的な整列順序系が重要な手段となる。最初それは正整数あるいは自然数であった。ヒルベルトが目指した有限の立場は自然数論の内に収まるものと想定された。しかしゲーデルの不完全性定理により自然数論の無矛盾性を示すためにもそれでは不十分である。Gentzen によって、自然数の形式的体系の無矛盾性証明に必要かつ十分な大きさの整列順序系が構成された。それは自然数に同型な部分集合を含むという意味で、構成的整列集合としての自然数の拡張になっている。さらに強い体系の証明論のために、たとえば Takeuti によってより大きい順序系が構成された。双方とも無矛盾性証明の内的要求から必要に応じて構成されたものである。

ここで領域の”構成性”は理論の外から見る概念として、理論発展の検討では反映させないことにする。

初期理論は正整数領域とその自然な順序関係とする。外延は前述の例の通りである。その順序関係については線形性と整列性に注目し、これらの表現を法則とする。逐次構成された順序系は、前のものを後のものがその最初の区分 (initial segment) として含むと考えられるので、領域の拡張になっており、拡張された順序をもとの領域に限定すれば外延は不変である。ゆえに実質保存性が成り立つ。形式保存性はそのように定義されているので明らかである。この場合には無矛盾性証明という（方程式を解くなどと同様な）動機があり、そのためにはより大きい整列順序系が必要となる。それが内的必要性になる。これは新領域の形成を伴うので、第三場面に相当する。

3.3.2 一様位相における計算可能性

以上の準備の下で、2.2節で説明した不連続関数の計算可能性研究の三方法のうちの二つについて、それらによる不連続関数の計算可能性が連続関数の計算可能性の拡張であり、その拡張が同質的であることを見てゆく。この節では一様位相による方法について考察する。

実関数の族を全体領域とする。初期理論はユークリッド位相における連続関数の計算可能性である。ここではある実関数が"計算可能"である、という性質を問題にする。当然その外延は計算可能連続関数の全体である。この性質は（ユークリッド）位相における"列計算可能性"と"実効的連続性"という法則によって規定されている。この性質を科学・技術において重要な多くの不連続関数に拡張したい、というのは数学の豊かさを求める方向においての内的必要性であった。ここで注目すべきことは二つの法則は実数体上の位相によって表現されるが、その位相の具体的な性質は指定されていない。ユークリッ

ド位相はユークリッド距離によって誘導されるが、距離は本質的ではない。ユークリッド位相のいくつかの特性さえ満たせば、同じ形の法則が形式的に書けるのである。

初期理論の自然な拡張として実数空間にユークリッド位相の特徴を保存する”実効的一様位相”を導入し、初期理論における法則をこの位相に適用すれば、計算可能性概念をユークリッド不連続な関数に拡張できる。上記法則のなかの”近傍”をこの実効的一様位相に適用すればよく、形式的変更は全くない。数学的詳細はA.3節で紹介する。

ある（不連続）関数を連続化するような一様位相を定義し、それがユークリッド位相と両立する、つまりユークリッド位相の開集合は新しい位相でも開集合になり、かつ実効的一様位相であるならば、そこでの”計算可能である”という性質の外延は初期理論の外延を部分とし、さらに新しく不連続ないくつかの関数も含む。その意味で実質保存が成り立つ。法則の形式は不変であるから、形式保存も成り立つ。これは第四場面に相当する。

3.3.3　極限再帰関数による計算可能性

2章で見たように、計算可能性の条件のうち、”列計算可能性”の概念拡張として、計算可能な入力値に対して関数値の評価が極限再帰関数に依存するものを容認する方法がある。連続関数については再帰関数で評価されるので当然その範疇に入る。この方法によれば、ある条件のもとで一様位相における列計算可能性と同値になる。その意味でも興味深い。

本節ではその評価自体は省き、極限再帰関数が再帰関数と同質であることを観よう。両者の相違は再帰関数に関する、停止性（halting property）と極限同定可能性（identifiability in the limit）にある。前者はゼロ点の存在保証であり、後者は定常点の存在保証、すなわちその先は関数値が一定になるような点の存在保証、である。正確な表現はA.4節で与える。両者はその表現が明らかに異なり、実際に論理的な強さが異なる。しかもこのような形では、後者が前者の自然な拡張になっているか否かは明らかではない。

これらはそれぞれ次のような形に還元される。この還元は数学的な事実であり、数学者にとってはこの形で同質性が成り立てば十分なのである。

初期理論の全体領域は再帰的な自然数の集合列全体、問題となる性質はそのような集合列の”実効的有界性”である:「集合列$\{C_n\}$の共通部分（無限積）$\bigcap_n C_n$は、その列から実効的に得られる数Nまでの有限個の共通部分（有界積）$\bigcap_{n\leq N} C_n$に等しい。」この性質を”実効的有界性”と名付け、仮に$R(\{C_n\})$と表そう。その外延はもちろんこの性質を満たす列全体であるが、そのような列は数多くある。また、満たさない列も多くある。この性質を規定する法則は、各列$\{C_n\}$について

$$\exists N. \bigcap_n C_n = \bigcap_{n\leq N} C_n \tag{3.1}$$

の形に表現される。初期理論はこのNが$\{C_n\}$から具体的に得られる場合だ。しかし、上界Nが具体的に得られなくても無限積が有界積で表される列は多くあり、数学的に意味のあるものも多い。したがって性質Rを実効的ではない”一般有界性”「集合列の共通部分（無限積）は、有限個の共通部分（有界積）に等しい」に拡張したい、という要求、すなわち内的必要性があった。そのためにはRの外延をこの条件を満たすもの全体に拡張する必要があった。Rを初期外延に限定すれば初期の性質と等しいので、実質保存性は成り立つ。法則は式(3.1)の

ままであり、形式保存性も成り立つ。したがって実効的有界性から一般有界性への拡張は同質的である。この場合も第四場面に相当する。

この同質性が再帰関数から極限再帰関数への拡張の同質性を導くと考えられるのは数学的な事情であり、A.4節で概略を述べる。

第4章　ブルバキ構造主義における概念拡張の仕組み

4.1　『建築術』における構造理論の概要

この節ではブルバキの短い論説「数学の建築術」[2]（Bourbaki 1950 :『建築術』と略記）を”数学理論の発展”という視点から概観する。厳密な引用による紹介ではなく、そこで言及される内容を、その意図を壊さない範囲で短く、自分のことばで表現し、続いて所見を加えることもある。括弧（「」）内は原文に近い形の表現を意味する。ブルバキ構造主義の思想史的位置付けについては、5.2節で考察する。

なお、この論説は１９４８年に出版された”Les grands Courants de la pensée mathématique ”（F. Le Lionnais 編集、Cahiers du Sud 出版）の１章の、”authorized translation ”（原著者許可済みの英訳）である。

『建築術』は７節から成り、以下の4.1.1節～4.1.7節に相当する。関連箇所が分かりやすいように、各節のパラグラフ番号を付すことにし、i 節の第 j パラグラフを $\langle i\text{-}j\rangle$ と記す。各節のタイトルは敢えて原文のままにする。和訳の効用を見いだせないからである。

ブルバキの数学観は数学の諸理論の構造を基本とするものであり、構造主義とも呼ばれる。数学の構造主義も１９６０年代からの様々な分野における構造主義と無関係でないことは承知されている。また、デデキントやヒルベルトにもその要素が無いとはいえない。しかし

ここではそのような広い文化の中での構造主義については検討しない。『建築術』の中に見られるブルバキの数学的構造への信頼に忠実に従って、その視点で数学を観ることにする。

4.1.1　1 Mathematic or mathematics?

1 節では、『建築術』の動機になった疑問とそれへの回答の求め方を述べている。その疑問がこの節のタイトルである。

⟨1-1⟩ 数理科学（mathematical science）が多量の成果で豊富になり、変遷をたどり、「諸理論に分岐していっている。」

⟨1-2⟩ 「諸分野が各々の目的のみでなくそれらの方法あるいは言語においてさえも」分岐している。「今日我々は一つの数学（a mathematic）を手にしているのか、それとも諸数学（several mathematics）を得ているのだろうか?」

⟨1-3⟩ この問いは新しいものではなく、ピタゴラス学派の算術化（”すべては数である”）による科学の統一の試みの無理数の発見による挫折以来である。

今日数学はさらに多様化している。それら全体を分離することなく数学と呼んでおり、それゆえに数学が内容豊かに発展している、というのが現在の数学者の見方であろう。”mathematic”は通常形容詞でであって”mathematical”と同義であり、”mathematics”を複数と考えることはない。ブルバキは当時主流の数学を一つの観点から統一できると見通したのであり、その観点は現在でも生きている。ただしその観点で統一され得ない分野が大きな流れになってもいる。

⟨1-4⟩ 数学の一元的な概念の変遷を追う試みは哲学者にゆだねる。「数学者の仕事はより慎ましく狭い」ものであり、「数学の中で、数学自

体の手順を分析することによって」前述の質問への答えを探求することにある。

「数学の中で、数学自体の手順を分析することによって」数学についての考察を行うという主張は、ブルバキの数学の哲学の立脚地なのであり、また筆者の本論全体の立場にも通じる。

4.1.2 2 Logical formalism and axiomatic method

２節では公理的方法の重要性と、数学の本質はその論理的･形式的側面では捉えられないことを説いている。

⟨2-1⟩ 数理科学は一見多様であるが、異なる諸数学理論間に存在する諸関係の系統的研究という、内的進化（internal evolution）が我々を「公理的方法」へと導いた。

内的進化の結果が公理的方法を要請した、ということは、数学の方法論が内的必要性によって公理的方法へと発展した、と言えるだろう。

⟨2-2⟩ ここで”形式論（formalism）と”形式論的方法” の不明確な使用による混乱には警戒しなければならない。数学の理論が表面的には、論理体系の規則にしたがって導かれる命題の連鎖であることはよく知られている。しかしそれは数学者が自分の考えに与える外的形式であり、他人とのコミュニケーションの媒体である。その意味でそれは数学に適切な言語であり、有効であるが、それ以上のものではない。これは公理的方法の一つの側面、すなわち論理的形式論（logical formalism）であるが、数学としては面白くない側面である。

脚注： 数学の証明を構成している諸演繹の正しさをを一歩一歩確か

めても、その基にあるアイディアへの明瞭な洞察を得なければ証明を理解したとは言えないことを、数学者は知っている。

⟨2-3⟩ 公理的方法の本質的目的は、数学の深遠な明瞭さ（profound intelligibility）にあり、それは論理的形式論がそれ自体では供給できないものである。公理的方法は、数学が単なる三段論法の連鎖ではないという信念に基礎をおき、諸理論に共通のアイディアを見出すために深いところにある理由を探すことを教える。

以上のブルバキの数学観は現在ではほとんどの数学者が共有しているものだ。論理的正当性のみでなく数学活動の総体を体験しなければ、数学に関わっているという実感は湧かない。定理も証明も"腑に落ちる"のでなければ、真に理解したことにはならないのである。言語、式、推論等は他者への伝達手段であり、数学が文化として社会の中で認知されるための基礎でもある。その意味で数学の本質の部分は実質に、学問としての部分は形式に対応すると考えられる。

4.1.3 3 The notion of structure

⟨3-1 ⟩ 上記のこと、すなわち公理的方法の目指すところ、はどのように成され得るか?公理的方法が実験的方法に最も近いのはここである。ある理論における議論の諸主因を分離する。次にその各々を抽象的な形にし、その帰結を展開する。その後元の理論に戻り分離された諸要素を再結合し、相互の影響を問う。この古典的な分析と綜合の間の往復は新しいものではないが、この方法の独創性はそれが適用される仕方にある。

⟨3-2⟩ 以下で抽象的群論の例によって上述の作業を説明する。例として 1. 実数の加法、2."素数pを法とする"整数の乗法、3. 3 次元ユークリッ

ド空間における置換（displacement）の”合成”を取り上げる。各々で、2個の要素に一意的に1個の要素が対応する演算が定義される。それら演算に共通な性質としてたとえば以下の3種を採用できる。(a) 結合律 ; (b) 単位元の存在 ; (c) 逆元の存在。

⟨3-3⟩ 三つの理論において共通の記号で同様に表現される性質は、3個の性質(a)∼(c)からの帰結である。そのとき個々の要素の性質は完全に無視される。また我々の関心は実数、$p-1$以下の負でない整数あるいは置換の存在にあるのではない。唯一重要な前提はこれらの要素の上の演算$x\tau y$が性質(a), (b), (c)を持つことである。性質(a), (b), (c)は群の構造の公理と呼ばれ、それらの帰結の展開は群の公理的理論を構成する。

それぞれの理論において本質的な要素は、2項演算と(a), (b), (c)という性質である。このように個別理論を分析した後に各理論の具体性を考慮からはずして、(a), (b), (c)からの論理的帰結を求める。得られた結果を各理論に解釈しなおして適用すると、その理論における単位元や逆元の内容が明らかになる。最後は個別の具体へ帰るのである。

脚注：”公理”（“axiom”）ということばのこの解釈と伝統的な意味である”明らかな真理”(“evident truth”）の間にはもはやいかなる関連もない。

この時点で「公理」の意味の転換が起きている。ある公理群が認められるのは、数学理論の展開を可能にするかどうか、であって、数学の実行とは独立な真偽という概念は数学の現場では意味をなさない、という立場であり、そのことは現代数学では広く了解されている。もちろん任意に公理を並べるわけではない。十分な検討の結果承認さ

れるもののみが採用されることは言うまでもない。

$\langle$3-4$\rangle$ 一般に数学的構造として何が理解されるべきか。その構造における諸概念の共通な特性は、それらを性質が明記されていない要素の集合に適用可能だということだ。ある構造を定義するために、いくつかの関係を所与のものとみなす。関係の引数は未指定の要素である。たとえば群の構造では、演算τと特性をもたない引数x, y, zについて$z = x\tau y$を所与の関係とする。次にその関係が満たすべき条件、すなわち公理、を設定する。それらは明示的に表現される。それらからの論理的諸帰結がその構造の理論である。要素に対するほかの仮定はすべて排除している。

３節について、いくつかコメントしておきたい。

（１） 脚注で「我々は数学的”存在物”（”beings”）あるいは”対象”（”objects”）の性質（”nature”）に伴う困難な問題は扱わない」としながら、”存在物”の心的表象の把握の仕方の変遷を述べている。それは大筋、多元論から一元論へ推移し、一元論における対象はは自然数概念から集合概念へ、そして数学的構造へと変化してきた、という。この時代には一般にそれが最終の数学的存在物と見なすことは妥当であっただろう。現代では再び多様化していると言えるが、本論では立ち入らない。

（２） ”構造”においては個々の要素の性質を捨象しているので、同じ構造のものはその限りで同一視される。これをその構造に属する諸理論が（その構造で問題にしている関係に関して）”同質”である、と呼ぶのは適切であろう。

（３） $\langle$3-4$\rangle$の内容は今では通常の数学活動だが、その事実を明示的に気づいたことが後の数学発展の鍵となった。

（４）ブルバキは注意深く「哲学者の仕事と数学者の仕事は別」と述べており、数学者の分限を守っている。すなわち、根源的存在論に関わるような哲学的考察には踏み込まない、正しくは踏み込めない、ということである。しかし、数学理論における個別の性質を問わずに構造の同一性のみで数学が進展するという考え方は、一つの哲学的姿勢である。

4.1.4　4 The great types of structures

⟨4-1⟩ 構造の定義における諸関係はそれぞれ異なり、いくつかのタイプがある。第一の例は、群構造のように（演算に関する）"合成律" (a "law of composition")を有し、その場合には対応する構造は代数構造と呼ばれる。
⟨4-2⟩ 第二のタイプの例として順序関係で定義される構造がある。
⟨4-3⟩ 第三の大きな構造のタイプは位相的諸構造（あるいは位相:topologies）に表れる、近傍、極限および連続性の直観的概念の抽象的数学的定式化である。

構造を三種のタイプに分類しているが、タイプは数学の対象として研究されるわけではない。その意味では構造とは異なる種類の概念である。

4.1.5　5 The standardization of mathematical technique

⟨5-1⟩ 公理的方法の最も著しい特色は相当な「思考の節約」(economy of thought) をもたらすことであり、構造はそのための道具である。数学者は、あるタイプの構造に属する一般的な定理を個別の場合に自由に使えるようになった。

一般論が個別の場合よりもはるかに複雑で膨大な知識を必要とするのでは、興味深い個別の理論に適用できるまでには多大な時間がかかる。公理的方法が今まで成功しているのは、各構造の理論が比較的シンプルで、抽象的でありながら直観が湧きやすく、しかも一つの構造に多数の意味ある理論が属するからだ。そして個別の理論が逆に構造の理解の助けにもなっている。（数学者の直観については、下の⟨5-2⟩に詳しい記述がある。）

ここでいう「思考の節約」はオッカムの剃刀として標榜される同表現とは意味が異なることに注意しておこう。何かの説明に必要最小限の仮定のみを使う、という要請ではなく、総合的な見地から手間を省ける、という意味である。構造の理論を打ち立てておけば、それを無数の個別の理論にただちに適用できる。個別の概念定義や証明は不要になり、一般論の引用のみで済む。さらに個別では具体性がありすぎて見えない本質が直ちに分かるのである。

そのような状況を鑑みれば、ここでの「思考の節約」は効率と見通しの良さを意味すると考えてよいだろう。

⟨5-2⟩ ただし、数学者の研究における特殊な直観によって果たされる基本的な役割を強調しすぎるということはない。その直観はすべての推論に先立つものである。数学者は長年の関わりから数学的存在物について実世界における存在物についてと同じように慣れ親しむようになる。さて、（個別の）諸理論の公理的分析によって構造が導出されたのであるが、その結果各構造はそれ自体の言語をもつようになる。その言語は元の諸理論から導かれた特殊な直観的参照 (references) を積載している。そして、この構造の発見は研究者にとって、ときに元の理論から得ていた直観からは予期しない方向に思考の直観的進

路を方向付け、その数学的風景を新しい光で照らす。１９世紀初頭の虚数の幾何学的表現によって複素数の集合の中にユークリッド平面という位相構造が発見されたのはその一例だ。それは広範な応用の可能性をもっていた。その結果Gauss、Abel、Cauchy、Riemannによって、解析学に新しい生命が与えられた。最近５０年の間には、ヒルベルト空間、もっと一般的に関数空間、は要素が関数である集合における位相構造を樹立した。ハール（Haar）測度は積分概念の拡張と連続群の諸性質の非常に深遠な解析を可能にした。これらは数学の進歩の決定的な事例であり、一つの転機の事例である;その転機において天才のひらめきが理論の新しい方向づけを、構造の存在を示すことによって、もたらした。

他の例では、一様位相という構造によって、ユークリッド位相による連続関数の概念がユークリッド不連続な関数に連続性の概念を与えた。すなわち、連続性というのは何を近傍（ご近所）と考えるか、に依存する概念だ、という連続性の本質が示された。

脚注:すべての直観と同様に、この直観もまたしばしば間違っている。

直観はときに間違ってよいのである。それでも直観は数学発展を導き、その正当性の確認の手助けをするのだ。

⟨5-3⟩ 総じて数学は今までになく孤立した式の間のゲームではなくなっているし、発見の起源において直観が支配している。しかし今数学は大いなる構造のタイプの理論に伴われた強力な道具を所有している。それは以前は完全に混沌とした状態だったが今や公理的方法で統一された莫大な分野に広がっている。

直観あるいは実質と形式は、ここで形式は構造の公理と言えるが、実際には数学の発展のどの場面でも協働してきたはずだ。何に注目するか、が時代や分野によって異なるだけなのだ。ブルバキは明言していないが、本質的には実質と形式の協働を説いているのである。

4.1.6　6 A general survey

⟨6-1⟩ 公理的概念に導かれて数学の世界の全体を俯瞰すると、代数、解析、数論、幾何などという伝統的な分野の仕切りが無意味になる。そして、新しい編成原理は構造の階層であり、それは単純なものから複雑なものへ、一般的なものから個別のものへと進む。

伝統的な分野横断の例として、素数の理論と代数曲線の理論などを挙げている。現代ならば素数の判定法と楕円曲線と暗号の関係も挙がるだろう。また、たとえばノルム線形空間（normed linear space）では、2 次元ベクトルも関数も同じに扱える。それは単に技術的な問題ではなく、それらの理論に内在する本質の同質性を物語る。その意味で数学の世界が新しい光景を表す。

⟨6-2⟩ 4 節の大きな構造の諸型は母構造（mother-structures）と呼ばれ得る。最も一般的な構造の公理数は最も少なく、追加の公理で型が豊富になる。たとえば、母構造である群論は有限群やアーベル（Abel）群などの下部構造をもつ。同様に、順序集合という母構造の下には全順序集合や整列集合などがある。位相構造にも諸段階がある。

ノルム線形空間の下部構造としては、たとえば完備性公理の添加によって得られるバナッハ空間や内積によってノルムが定義される内積空間などがある。なお、次のパラグラフが示すように、下部構造関

係は木構造にはなっていないことに留意しておこう。

⟨6-3⟩ さらに多重構造 (multiple structures) と呼ばれ得る諸構造がある。それらは複数の大母構造 (the great mother-structures) がいくつかの公理によって有機的に結合されたものである。位相代数 (topological algebra) がその一例である。代数構造と位相構造の公理で支配され、代数的演算が連続関数であるという要請によって、それらが連接するのである。

大母構造ではないが、半順序構造の下部構造としての整列性構造と全順序構造が結合された多重構造として整列全順序構造が得られ、いわゆる順序数の理論に至る。

⟨6-4⟩ やがて個別と呼ばれるのが適切な理論に到達する。それらの領域の要素はより明確に特徴付けられた個性を持つ。しかし個別の理論はもはや以前の自主性は持たず、より一般的な諸構造がそこで出会い、互いに反応する交差点となっている。

⟨6-5⟩ 以上のスケッチは数学の実際の状態の非常に大まかな近似に過ぎず、図式的で理想化されているとともに凍結されている。

⟨6-6⟩ 図式的 (*Schematic*) : 実際には物事はそんなに単純で組織的には起こらない。たとえば母構造から順次個別理論に降りていくとは限らない。実数論のような特定の理論が位相とか積分のような一般論の構築において不可欠な場合がある。

たとえば、ノルム線形空間の定義には、ノルムと係数が必要であり、実数または複素数が関わる。抽象的積分論でも積分値は実数または複素数だ。この場合には実数論や複素数論という個別の理論を構造の定義に利用しているのである。

⟨6-7⟩ 理想化されている（*Idealized*）: ある種の理論（たとえば数論）においては多数の孤立した結果が残り、型にはまるとは限らない。

現在では計算機による四色問題の証明、フラクタルなど実験的要素のある数学、などこの建築術に沿わない数学分野は多数ある。当時でも実数上の微積分の細かい結果など、大きい構造からは得られない事実が多数あった。さらに証明論、計算論、モデル理論などの論理学に関する数学は『建築術』では考慮外にある。

⟨6-8⟩ 凍結されている（*Frozen*）: 科学の静的把捉（static conception）は公理的方法から程遠い。構造は種類もそれらの本質的内容においても、不変ではない。数学の将来の展開が基本的構造の数を増やしたり、公理の新しい結合を増やしたりするかもしれない。また、実際に知られている構造は決して完成された建造物ではない。我々がそれらを基に数学の内在的な生命、その統一性並びにその多様性についてより良く認識するようになれば、現存の構造も変化し得る。

科学は日進月歩であり、結論が出て報告されたものは科学活動のごく一部分でしかない。文書化された結果自体には生命は宿っておらず、それ以上の発展は起こらない。結果はつねに未完成であり、真実への一歩ではあっても、そして数学では証明が認められ成果が確定していても、その意義、それが所属する理論、などは変化し得る。数学者はこの建築術に沿って仕事をしているわけではない。構造化は現場で起こり、その結果を使って研究が進められてきた。ブルバキの著作はその整理であるとともに、研究の道具として役に立ってきた。構造理論を供給された数学者たちは、それについて理解を深める努力をする過程で数学の進歩に、そして構造の変化にも貢献するのである。

4.1.7 7 Return to the past and conclusion

⟨7-1⟩ 上記の概念はそれまでの半世紀以上にわたる数学の進化の一つのステージであり、哲学者たちや数学者たちの深刻な反対にも遭った。数学者の多くは長いこと公理論 (axiomatics) のなかに不毛な論理的な小事へのこだわりしか見ようとはしなかった。初期の公理的研究は、デデキントとペアノによる算術の基礎やヒルベルトによるユークリッド幾何の公理化など一価の (univalent) 諸理論、すなわち公理系によって完全に決定される諸理論を扱った。これらの公理系は元の理論以外の理論には適用できないものだ。公理的方法の力は、その後の数学の発展によって明らかになったが、なお反発があるのは、具体的な問題を扱うときに、直接的でない高度なステージの抽象によってのみ到達されるある種の直観が実り豊な結果をもたらし得る、ということを知性 (mind) が認めるのが難しいからである。

現在では通常の数学活動において公理的方法、少なくともブルバキの構造の理論、への反発は無いと見てよい。それによる成果が巨大であったこと、また、数学者たちが抽象的直観への経験を積んだことがその理由であろう。

⟨7-2⟩ 我々は哲学者たちの反対に関わるための十分な適性をもっていない。それは経験の世界と数学の世界の間の関係という大問題に関わるからだ。実験上の現象と数学的構造の間に緊密な関係があることは、現代物理学の発見によって確認されている。しかし我々はこの事実の理由について全く無知であり、つねに無知なままだろう。これら二つの分野の本当の関係はアプリオリに想定されうるよりははるかに深く隠されていると考えられる。

この件は哲学的には重要な意味があり、様々な答えが試みられてきた。ここでは立ち入らないが、数学者に向けて一言私見を述べるならば、我々が世界を見るその様式の一つが数学（の一部分）なのである。

⟨7-3⟩ 公理的観点からは、数学はかくして抽象的形式－数学的諸構造－の宝庫であり、経験的現実（empirical reality）がこれらの形式に自分自身をはめこんだのだ。形式のほとんどがもとは明確な直観的内容をもっていた。しかし内容の意図的な捨象がまさにこれらの形式にその能力を与えたのである。

抽象の際に何を捨象し何を保存するか、は、一意的に決まっているわけではない。実数を四則の演算に関する体とみるか、順序集合の特殊な例とみるか、距離に焦点を当てるか、などいろいろな可能性があり得る。『建築術』ではそのような具体例は挙げていない。

⟨7-4⟩ ”形式”（“form”）という言葉のこの意味においてのみ公理的方法を”形式論”（“formalism”）と呼ぶことができる。それが数学に与える統一体（unity）は、形式論理とはちがって、生命があり、発達の真っ最中にある有機体であり、しなやかで肥沃な研究手段である。それはガウス以来のすべての偉大な数学思想家たちが、”計算の代わりにアイディアを用いる”（“substitute ideas for calculations”）ために努力してきた結果である。

ゆえに、構造を基礎に考える数学は生きている、と結論できるだろう。

『建築術』はこれで終わっている。『建築術』あるいはブルバキ構造主義に関する研究については取り上げない。『建築術』の主張は現代

の数学者の観点から大筋共観できるものであり、本論の目的にとって有効である故に、『建築術』の見解に即して以後の議論を進める。ただし5.2節ではCorryの視点[4]に沿ってヒルベルトからブルバキへの変遷を概観する。

4.2 計算可能性構造 : Pour-El & Richardsの視点

不連続関数を含む連続体上の計算可能性理論の関数空間による手法はPour-El & Richards [21] によって創始された。それは古典的バナッハ空間という構造に、その領域の点列の部分集合に関する公理を付加することによって下部構造を定義し、その構造に関する理論を展開することであった。計算概念を伴う数学の公理的手法はこれが最初であり、おそらく唯一であろう。他の同時期に発表された手法では、まず拡張された計算理論の構築をして、その理論上で計算可能数学が展開される。このような歴史的立場を踏まえて、その導入部分（２章の序文）でこの手法が計算可能性という概念を実現していることを丁寧に説明している。哲学という語は用いられていないが、計算可能性概念を伴う解析学（および物理学）に関する哲学的スタンスを示したものといえる。この部分をブルバキの構造概念との照合も込めて、詳しく見ていくことにする。以下括弧内はこの序文の内容を私なりに表現したものであり、その他にも必要に応じてコメントをつける。

ここに述べられているのは、バナッハ空間の計算可能性構造（computability structure）の概念を採用する際の哲学である。その方法全体の説明がブルバキの構造主義に基づいている。ブルバキにも構造主義にも言及はないが、その公理的手法の主張と非常に良く同期している。ブルバキの方法論のなかで発展してきた数学を学び研究する

立場では同じ考えの方向に行き着くのは当然であろう。以後、筆者の立場（妥当な、すなわち同質的概念拡張を求める）から、内的要求と保存的拡張という観点でPour-El& Richardsの視点を俯瞰してゆく。

4.2.1　内的要求から生じる問題

「計算可能性構造（computability structure）は次の問いへの応答として生じたものである。すなわち、解析学や物理学におけるプロセスのうち、どれが計算可能性を保存しどれが保存しないか、という問いである。以下でこの問いを正確に表現し、それに対して答えていこう。」

この問いはまさに”内的要求”である。そして次にその内的要求に答えるために問題設定をする。その設定は内的要求から自ずと生じる方向性を定めるものだ。

「この、”プロセス”をどのように理解すべきか?物理学のプロセスとしては、波動方程式、熱拡散方程式、ラプラス方程式その他多くのものを含むべきであるし、解析学におけるプロセスとしては、フーリエ級数、フーリエ変換、などがある。これらのプロセスの解（solution operator）が関数を関数に写す線形作用素であることは、納得できるだろう。そのようなわけで、我々は関数のバナッハ空間上の線形作用素に関心をもつ。それらが我々の”プロセス”なのである。」

この問題設定の上で”プロセスの計算可能性”の解釈を与える。

「以上のような関心事によれば、”計算可能”とは、次のように理解すべきである。適切な概念は”実・複素変数の計算可能関数”である。古典的定義（実数・複素数上の連続関数についての計算可能性の定義）は既出である。上述の様々なプロセスを扱えるためには、その定義を任意のバナッハ空間上の計算可能性に拡張しなければならない。」

ここは構造主義の見地からも我々の立場からも重要な箇所だ。計算可能な関数の定義の一条件は”実効的連続性”であり、したがってその適用は連続関数に限定される。上述の内的要求に答えるためには定義の制約を緩める必要がある。しかも”計算可能関数”の領域の拡張が保存的であるためには、しかるべき法則を形式的に保存し、連続・不連続を区別しない”計算可能性”概念が必要となる。それがここではバナッハ空間上の計算可能性なのである。”計算可能性構造をもつバナッハ空間”は一つの構造であり、それはバナッハ空間の公理系にその部分構造に関する諸公理を加えて下部構造にしたものである。ブルバキの構造主義の見地からは計算可能性構造をもつバナッハ空間は単にバナッハ空間の下部構造というだけで、何ら特別なものではない、通常の数学的構造である。関数を要素とするバナッハ空間ではそもそも連続関数と不連続関数の理論的差異はない。したがって計算可能性構造をもつバナッハ空間では連続、不連続を問わず関数の計算可能性が定義される。もちろん個別の理論において意味ある不連続関数が計算可能になることは確かめなければならない。

「拡張された定義は以後重要な役割を果たす。とくに第一主要定理は上述の質問への答えの準備になる：どの”プロセス”が計算可能性を保存し、どれが保存しないか、について答えるのである。さらにある作用素とその固有値・スペクトル・固有ベクトルの間の計算可能性関係が一般的な設定のもとで決定される。なかでもヒルベルト空間における（非有界）線形作用素は物理学においてかなり重要なものである。」

「”バナッハ空間における計算可能性構造”の概念は公理的に与えられる。これは多くの応用をもたらそうとするならば自然なアプロー

チである。」

一つの理論で多くの応用をもたらすこと、それが構造の特徴である。

以下で、どのような公理が選ばれるべきか、が論じられている。この箇所は”内的必要性”から理論の拡張をするに当たって、どのように進むべきか、が、数学者の創造性と元の理論および内的要請との照合によって決まってゆく様子が明白に示される好例である。

「どの概念が公理化されるべきか?”計算可能な点”の概念だけでは不十分だ。解析学の問題の解決には位相的概念が不可欠だからであり、バナッハ空間は距離空間でもあるので、その位相は収束列によって与えられる。このことが示唆するのは、公理化のための適切な概念は”計算可能な点列”である。もちろん他にもやり方はあるが、このアプローチは計算可能性研究において自然である。そもそも再帰関数論の基本的直観は”計算可能な正数列”である。同様にバナッハ空間ではその”計算可能点列”の公理化である”計算可能性構造”が問題解決の有用でしなやかな道具を供給する。」

計算可能性理論は、内的必要性の要求を満たしつつも多様な発展が可能な数学的場面の例を提供する。2章で述べた三種の研究方法の他にも、型2のテューリング機械で統一的理論を作る方法[30]（Weihrauch 2000）や実数間の等号の判定を計算可能とみなす方法[1]（Blum, Shub & Smale, 1989）などがある。そのどれを採用するか、は、自由なのである。不連続関数の計算可能性はその意味で数学者のある程度の裁量に任せられる。さらに、関数解析の手法を使うなかでも、どの関数空間を採用するか、の自由度もある。全体として解析学における計算可能性の理論が豊かに発展する予想をもって方向を決めて行くので

ある。

「”計算可能点列”を公理化するという方針が決まってしまえば、実際の諸公理は自然にしたがう。」

そして以下のように必要な項目を列挙する。ここで”自然にしたがう”というが、それはバナッハ空間の基本性質を反映させることだ、という、次の方針を決めたことになる。ここでも発展の方向は数学者の創造力によって産出されるものだ。それが一意的であるかどうか、は問わない。それが”自然”であることを我々は保存性という原理に照らして判断するのである。

バナッハ空間の点列の族が”計算可能性構造”であるために次のことが要請される。

「バナッハ空間は線形であるから、線形性 (linearity) の公理（公理１)、完備であるから、完備性 (completeness) の公理（公理２)、そしてノルムをもつから、ノルム(norm) の公理（公理３）が必要である。実際これらで十分である。」

十分である、というのは証明できることではない。熟慮の後にこれらの公理をもつ構造を扱うことに決める、ということで、結果として十分な成果を得られるのである。これらの公理は線形性、完備性、ノルム所持、というバナッハ空間の公理を”実効化”したものである。計算可能性構造をもつバナッハ空間はバナッハ空間の下部構造であるから、当然もとの構造における要素間の演算やノルムは継承している。計算可能性構造に属する点列を計算可能と呼ぶ。

「このように見ると、この公理群は極小、つまりこれだけは必要であるように見える。後でわかるように、非常に一般的な設定のもとで、それはまた極大でもある。」

「可分（separable）バナッハ空間の実効化も有用だ。バナッハ空間Xの計算可能性構造$\mathcal{S}$が実効的に可分（effectively separable）とは、その一つの要素である点列について、その線形包（linear span, linear hull）がXの中で稠密（dense）であることだ。そのような点列を$\mathcal{S}$の実効的生成集合（effective generating set）と呼ぶ。」

ここで計算可能性構造をもつバナッハ空間のさらなる下部構造として、実効的に可分な構造を導入する。それは古典的バナッハ空間の可分性を実効化したものである。

4.2.2 公理的アプローチのdefense

「再帰関数論の専門家には、計算可能性の公理的アプローチは驚きかもしれない。計算可能性については何か発生論的な（genetic）ものがある。この領域の初期の研究では、計算可能性の直観的な概念を適切な定義で捉えようとした。たとえばPost, Herbrand, Gödel, Markov。彼等の洞察が同じクラスに導いたことは、自然数上の計算可能関数の”正しい”定義が見出されたと結論する際に重要だった。」

”直観的な概念の適切な定義”がある時期までの数学の基本であった。１９世紀に次第に転換が起こって、非ユークリッド幾何や集合論等が発生したが、その存在論や直観に訴えるか否か（訴えないのが問題だった）などについての論争が起こった。それを経て、２０世紀半ばの『建築術』の時代も過ぎて、数学者の自由度は増して行った。

「対して計算可能性構造への公理的アプローチによれば、バナッハ空間上に複数の計算可能性構造が可能であり、それは応用上重要なことだ。それらは適切な構造ばかりではないが、公理的方法は計算可能性の概念を案外良く捉えることができる。その理由を考えてみ

よう。」

計算可能性構造が一意的でないのは、不連続関数には自ずと伴う計算概念がないからで、観点によって少しずつ変化する、という事情に関連している。

「普通のバナッハ空間、たとえば$C[0,1], L^p[0,1], l^p(1 \leq p < \infty)$など、には”固有の”(intrinsic)計算可能性概念があり、それが”計算可能性構造”の諸公理を特定する。”固有の”計算可能性構造はただ一つである。固有の計算可能性構造の表現方法は種々あり、その相違の起源の一部は解析学の異なる分野にある。それぞれで親しまれている空間内の稠密な関数列に焦点が当てられる。計算可能性構造はこのような列の実効的閉包として得られる。たとえばフーリエ級数に興味があれば、自然に三角関数の有理係数多項式がその列にあたる。$L^p[0,1]$上の測度と積分に関心がある場合には、有理端点を持つ階段関数全体を考えるほうが自然だ。これらの例は実効的生成列になり、どの列でもすべて同じ計算可能性構造を生成する。そのようなわけで固有の計算可能性構造は多様な応用において基本的な役割をもつ。この事実は応用のみでなく、一般にバナッハ空間上の計算可能性の性質について理解するためにも重要である。」

関数空間論の本質が良く分析されており、著者たちの哲学的視座が数学活動の現場の具体的で重要な例に即して展開されている。上述の固有の生成列はそのバナッハ空間で数学的に自然で有用な稠密列である。計算可能性構造は、具体的な数学の場面に即して考えられるものである。したがって具体的には対象にしている個別のバナッハ空間から自然に得られるものである。

「計算可能性構造の定義の発生論的な特質(genetic quality)は可分

バナッハ空間よりも一般的な文脈において観ることもできる。バナッハ空間上の計算可能性構造の公理群は一様に極小であると見えたことを想起しよう。実効的可分空間については計算可能性公理群に何かを付け加えても、計算可能性のより直観的な特性を得られるわけではないということだ。それは次の定理の結論である。
安定性補助定理:バナッハ空間からのある列の線形包が空間で稠密であるとき、この列を要素として持つ計算可能性構造はただ一つである。」

「かくして実効的生成列を持つ計算可能性構造は真の拡張を持ちえない。ゆえに、前述のように、これ以上の公理は余分である。」

公理群の十分性という哲学的概念が数学の実態に密着して考えられている。

「実効的可分バナッハ空間については計算可能性構造の公理群は極大であり極小である、という事実は、次のことを示唆するようだ:少なくともこのような空間については、計算可能性構造という概念は我々が必要とする直観的概念、すなわちバナッハ空間上の計算可能性という概念を捉えている。」

こうして公理的方法が"バナッハ空間上の計算可能性"の直観的概念の把捉を可能にする、と結論付けている。

ここで注目すべきことは、バナッハ空間における計算可能性構造の公理系には、バナッハ空間に関わる概念以外一切入っていないことだ。そのことが目的ではなかったにしても、5.1節でも言及されるようなデデキントの概念拡張における規制を満たしている。すなわち、古典数学であるバナッハ空間論から計算可能性概念を導入して得た下部構造において、再帰関数という計算に基本的な対象以外何ら新し

い（異質な）概念は持ち込まれていないのである。

「安定性補助定理は非常に一般的な設定のもとで成り立つものであるが、計算可能性構造が実効的生成列を要素として持つ、という条件はついている。この条件は実際にはほとんどの場合に成り立つが、一般論としてはこの条件ははずせない。人工的ではあるが、実効的生成列を持たない計算可能性構造を構成することができる。こういうものを”アド・ホックな構造”と呼ぼう。」

安定性補助定理は個別の空間に限定されるものではなく、一般的な構造において成り立つものである。それは計算可能性構造をもつバナッハ空間という構造の下部構造になっている。意味ある空間は事実上実効的生成列を持ち、したがって計算可能性構造の一意性は成り立つ。この一意性はまた、計算可能性構造による”計算可能性”の定義の有意性を含蓄する。

「アド・ホックな計算可能性構造は無用の副産物ではなく、我々の研究において重要な役割を果たすことを指摘したい。解析学においては反例を得るときの自然なテクニックがあり、それらは一般に実効的ではない。そしてそれらは容易にアド・ホックな計算可能性構造へと我々を導くのである。反例をアド・ホックな構造経由でなく発見するのは難しいだろう。固有ベクトル定理ではこの方法が使われる。」

数学における一つの重要な活動は反例の構成であり、反例とはある主張の否定の証拠であるから、その性格上一般に実効的ではない。ゆえに計算可能性は期待できない。そのことから計算可能性理論においてはアド・ホックな構造が導かれることを見抜いている。

「最後に次のことを述べておきたい。我々は計算可能なバナッハ空間なるものを定義したのではない。我々はバナッハ空間から出発して、

そこに計算可能構造を定義したのだ。論理は古典論理を使用し、非構成的方法を自由に使っている。そしてすべての列から成る大きいクラスの中で計算可能列を特徴付けたのである。かくして我々の仕事は再帰関数論の伝統の中にある。」

これは重要な視点だ。バナッハ空間という古典的数学の構造を前提として、その理論はすべて認めて、そこに公理を増やして下部構造を作っただけなのである。つまり構造理論に乗っているのであって、改めてその意義や正当性を問う必要はないのである。空間の点列全体の集合から計算可能性構造と呼ばれる部分集合を切り出したのであり、これは3.3.3節で自然数の再帰的集合列全体の中から有界性を持つものを切り出した視点と同じである。

ブルバキ構造主義は、できる限りの一般化への道である。対して、Pour-El & Richardsのこの扱いは、ある種の構造のより詳細な観察により、その構造にまつわる理論の本質を見極める、という視座である。この考察を終えた後にはブルバキの場合と同じく、数学がサクサクと進むのである。それゆえに論理や計算論などの専門家でなくても、解析学の素養のある数学者が容易に研究に着手できるのであり、研究に必要なのは各数学者の創造性のみなのである。

4.3 構造理論による同質的拡張と計算可能性構造

『資格論文』におけるデデキントの数学論を検討した3章では数学理論の拡張の妥当性の特徴づけとして”同質性”を提案し、そのコンテクストの中で我々の計算可能性研究のうちの二つの方向が2章の問題提議に対して意味のあるものと結論付けた。本節では構造理論の観点からの拡張の同質性を提案し、2.1節で紹介したもう一つの方法

である関数空間論による計算可能性研究の妥当性を確認する。しかも3.3.2節で扱った一様位相による方法にも構造主義の手法が適用可能なことを示す。

4.3.1　構造の具体例で見る数学発展

『建築術』に見られる構造の例は群論であり、群の公理系の記述もある。群は初等的な具体例を挙げることもでき、公理も説明しやすい。

ブルバキが実際に著した著作の主題は、集合論、代数、位相、実一変数関数、位相線形空間、積分、可換代数、リー理論、スペクトル論、多様体要約である。たとえば位相線形空間はその下部構造としてバナッハ空間、その下部構造としてヒルベルト空間などの構造をもつ。ここではバナッハ空間の理論と一様位相の理論について簡単に説明し、その中に個別の数学発展の基礎を見ることにしよう。

バナッハ空間は実数または複素数を係数体とする線形空間であり、ノルムと呼ばれる要素の大きさを表す量が定義される。そしてノルムから定義される距離に関して完備である。これらの条件（公理系）は有限個の式で表現される。個々の要素、線形演算、ノルムの内容は問わずに、公理から様々な性質を導くのがバナッハ空間の理論である。

バナッハ空間の個別の例として、たとえば以下のようなものがある。各正整数nについて、n次元ユークリッド空間で通常のベクトルの長さをノルムとするもの；任意の1以上の実数pについて、p乗総和可能実数列の族で、ノルムはp乗総和の$\frac{1}{p}$乗としたもの（l^p）；pは上記と同じとして、p乗ルベーグ可積分関数全体の集合で、その積分の$\frac{1}{p}$乗をノルムとしたもの、たとえば$L^p(\mathbf{R})$、$L^p[0,1]$など;ノルムを内積から

定義する実ヒルベルト空間。

実関数のうち、連続有界関数あるいはコンパクト区間上の連続関数等は最大値、最小値を有し、中間値の定理が成り立つなど、好ましい性質を持つ。しかしたとえばコンパクト区間 $[0,1]$ における連続関数列で各点極限が不連続になる例 $\{x^n\}$ がある。

$$\iota(x) = \lim_n x^n = 0(x \in [0,1)); = 1(x = 1)$$

の例では極限関数 ι は不連続だ。解析学では極限概念が重要である。ゆえに連続という性質を緩めても、元の関数（列）とその極限関数を一つの枠組みの中で扱えれば、数学としては実り豊かになる。たとえば x^n も $\iota(x)$ も $L^p[0,1]$ （たとえば $p = 2$）の要素であり、そのノルムに関して x^n は $\iota(x)$ に収束する。$L^p[0,1]$ はそのノルムに関する極限について閉じている。バナッハ空間という構造の一例として $L^p[0,1]$ を見るとき、その要素は連続関数も不連続関数もそのノルムに関しては区別がないのである。その意味でそれらの要素は空間 $L^p[0,1]$ の中では同質と言ってよいだろう。このようにして数学を構造的にみたときに、連続関数からある種の不連続関数へと同質な拡張が得られるとみなすことができる。

このような理論の特色は、関数の個体としての性質は捨象され、空間の一点にすぎないことだ。

もう一つの例として、位相構造の下部構造として一様位相という構造がある。

『建築術』の $\langle$5-2$\rangle$ の補足で述べたように、一様位相という構造によって、ユークリッド位相による連続関数の概念がユークリッド不連続な関数にも連続性の概念を与えた。ただしこの意味ではユークリッド連続性からはるかにかけ離れた関数も連続ということになって、あ

まり意味をなさない。その解決方法として、第一可算空間や可分空間などの構造と併せた複合構造（⟨6-3⟩）が考えられた。すなわち、一様位相になんらかの好ましい制限をつければ、拡張された連続性はユークリッド連続に近い性質の関数族に制限される。その意味で「少しだけ不連続」な関数を連続関数と同様に把握することができる。

上述の通り、位相という構造の下部構造として一様位相構造があり、その位相での連続関数の定義がある。それらはすべて未定義の要素に関する公理で一律に表現される。したがってある一様位相において関数が"連続である"という意図の述語を用意して、その意図を表現する公理を書いておけば、その意味の連続関数はその一様位相構造の中ですべて同じ意味をもつ。ユークリッド位相の開集合が保存されるような実数上の一様位相構造では、ユークリッド連続な関数はそこでも連続であり、さらにいくつかの不連続関数が連続になる。我々が扱ってきた個別の例である、ガウス関数、その他の階段関数、正接関数、Fine連続な関数等は適切な一様位相の導入によって連続関数になる。

歴史的にはAndrei Weilが１９３７年に一様位相構造の明示的定義を与えた。それ以前には距離空間に付随するものとして扱われていた。ブルバキは"Topologie Generale"で近縁系を用いた一様構造の定義を与えた。

4.3.2 構造理論における概念拡張の同質性

筆者は、デデキントの『資格論文』における数学観を論じた3.2.5節の冒頭で、デデキントの数学観を壊さないという制約の下で、現代の目から見て数学における概念拡張の妥当性の説明を可能にする原

理は以下の三点から成ると考えられる、と述べた。すなわち、関連理論の内的要求によっての拡張であること（必要性）、拡張後の概念が初期理論に制限されたときにもとの概念と一致すること（実質保存性）および上述の法則の遵守（形式保存性）である。そして、この三点を擁する原理に沿った拡張を同質的と称した。実際に多くの数学発展の例がこの原理に従っていることを、いくつかの例で見た。

『資格論文』では同質性の確認は具体例に即して行われている。4.1.7節で見たようにブルバキは、デデキントやヒルベルトの数学の公理化は一価の諸理論を扱ったために、汎用性がない、という意味のことを述べている。現代数学に対処すべく、ブルバキは構造の理論をベースに数学を展開した。したがって数学における概念拡張もその視点から考えることができる。本節では構造主義的立場から、上記の同質的拡張原理について解析学における連続関数の領域の拡張の例で検討する。

解析学において連続性や微分可能性などは個別の関数の性質であり、これらの条件から様々な理論が生じる。また、ベース領域（実数、複素数など）においてもその上の関数についても重要な事項が極限概念である。有理数のコーシー列の極限の存在の仮定から実数の連続性が導かれる。微分も積分も実数列の極限の存在に依拠して定義される。関数のテイラー展開は級数の収束概念から証明される。高度な数学においても極限概念の重要性は変わらない。収束概念も極限概念も、通常要素間の何等かの意味の”距離”が基になっている。実数であれば２数の差の絶対値を距離と呼ぶことが多いが、連続関数の場合には値の差の絶対値の最大値を距離としたり、関数の差の２乗積分の平方根を距離としたりする。要するに”近い･遠い”を数値で表

現する。実際には距離という数値がなくても、”近さ”、つまり”ご近所”を位相的に定義すれば、収束条件は表現できる。

初期理論が一つの構造に属するとき、その下部構造に属する新理論について、例で見てみよう。

簡単のために閉区間$[0,1]$上の実連続関数のなすノルム線形空間$C[0,1]$を初期理論とする。ここで関数のノルムは関数値の絶対値の最大とする。4.3.1節で見たように、この空間においてコーシー列の収束先は必ずしも存在しない。極限が再び連続関数になる連続関数のコーシー列の族はかなり限られたものになる。不連続関数を含めて完備性を担保しようという内的必要性が生じるとき、上の定義では不連続関数に関してはノルムにならない。そこでたとえば2乗ルベーグ可積分関数について2乗積分の平方根をノルムとする関数空間$L^2[0,1]$を新理論とすると、それは連続関数全体を含み、さらに多くの関数がその要素となる。この空間はノルム線形空間に完備性公理を加えて得られる下部構造であるバナッハ空間に属する。空間に属する要素、ここでは関数、が増え、領域の拡張となる。$L^2[0,1]$に属する関数はそのノルムに関して”連続関数に近い”関数といえる。ここで保存されるべき法則はノルムをもつ線形空間の公理群であり、ノルム自体は変更されるが、拡張後もそれらの法則は成り立つ。さらに拡張の動機である完備性が成り立つ、すなわちすべてのコーシー列は同じ空間内に極限を持つという新しい公理が付加されたことになる。新理論はノルム線形空間に”完備性”公理を付加して得られる下部構造に属し、その領域は初期理論の領域を含み、線形演算はもとの集合上では不変である。初期理論の公理は当然成り立つ。以上より初期理論$C[0,1]$から新理論$L^2[0,1]$への拡張は同質的といえる。

ここで拡張とは何の拡張なのか、整理してみよう。初期理論である、ノルム線形空間に属する連続関数の理論で、任意のコーシー列が極限をもつような拡張が欲しい、というのが内的要求であった。そのためにはノルム線形空間の公理に完備性を加えたバナッハ空間という構造を採用する。2乗可積分関数に積分によるノルムを付与した空間は領域として前者を含み、線形結合に関して前者は閉じていてる。これを新理論とすると、ノルム自体は変化するが、初期理論のコーシー列は新理論でもコーシー列になる。そしてバナッハ空間であるから、すべてのコーシー列は極限をもつ。こうしてノルム線形空間の公理は保存され、もとの理論は後者で再現され、しかもコーシー列について”極限を持つ”という述語の外延が拡張されている。これにより内的必要性と保存性は明らかだろう。

上記の例から一般論を引き出すと、以下のようになる。初期理論が、ある構造に属し、その上の演算あるいは関係（性質）に関して理論の拡張という内的必要性が生じたとする。それに応じて定義される新理論が初期理論の属する構造に公理を付加した下部構造に属するとするとき、この拡張は同質的、と見なしてよい。内的必要性は当然成り立っており、理論の法則は構造の法則として形式的に継承されるとともに、初期理論の要素も演算も変化を見ない。したがって実質保存も成り立っている。

もう一つの例を考えよう。実数上の関数についてユークリッド位相での連続性は通常の距離によって定義される。しかしたとえば各整数点間では連続な関数は連続に近い性質をもつ。何か拡張された連続性概念を導入してこのような場合にも連続関数の理論を展開したい、というのは一つの要求であった。そこで一般位相の下部構造として一

様位相の構造が考えられた。一様位相によって連続関数族が定義される。個別の理論としてのユークリッド空間は一様位相に属し、ユークリッド開集合が開集合になるような一様位相においては、ユークリッド連続関数を含む連続関数族が定義される。このような一様位相空間ではユークリッド位相において連続であるか不連続であるかの区別はない。初期理論で問題にする関係（性質）が関数の連続性であれば、その外延はユークリッド連続関数全体である。新理論は連続化したい関数の連続化を可能にする、ユークリッド位相を保存する一様位相とそこにおける連続性であり、"関数の連続性"の外延はその位相における連続関数全体である。両者とも一様位相の構造に所属するので、位相の公理も連続性の公理もどちらでも全く同じ形式で表現される。したがって形式保存性は成り立つ。新理論の選び方によってユークリッド連続な関数は新理論でも連続である。新理論における"連続である"という述語をユークリッド位相で連続な関数に適用すれば、その意味は不変である。したがって一様位相による連続性という意味のユークリッド位相からの概念拡張は同質と見なすことができる。

これらの例を参考に、構造主義における同質な概念拡張の一般的な説明を試みる。

一つの数学理論に関して新しい演算や関係の導入、あるいは定義域の拡張への内的必要性が生じたとしよう。その要求に答えて新理論が初期理論が所属する構造と同じ構造あるいはその下部構造に属し、初期理論が新理論に埋め込まれるならば、新理論は初期理論の同質的な拡張といえる。ここで"埋め込まれる"とは、初期領域が新領域の部分であり、初期領域における演算等に関して閉じており、関係についてはその外延が新理論における外延の部分集合になっている、

こととする。初期理論の属する構造の公理が法則となる。したがって法則保存性あるいは形式保存性は成り立つ。埋め込みの定義から、実質保存性も成り立つ。

最後に、ここれ触れなかった重要な事項として線形作用素について簡単にコメントする。本節の例ではコーシー列の極限を問題にしたが、微分や積分等をその空間の作用素として扱い、その性質を調べるのが関数空間論の一つの効用である。4.2節で紹介したPour-El & Richardsの視点にもあったように、彼等が関数空間論を扱ったのはそのようなプロセスが実効的か、という問題の理論的扱いのためであった。しかしここでは数学にあまり立ち入らずに、概念拡張に的を絞っている。

4.3.3 計算可能性構造

実数上の関数の計算可能性概念は当初連続関数を対象にしていた。計算可能実数の入力に対して実効的な方法で計算可能実数を出力できるのは連続関数に限定されることが数学的に分かっていたからだ。しかし「連続に近い不連続関数」を連続関数と統一的に扱いたいという数学の要求と同様に、「連続に近い不連続関数」の計算可能性概念を確立したいという内的要求が結実し、いくつかの異なる方法が書籍および解説論文として出版された。機が熟したのであろう。そのうち当初我々が採用し研究したのは[21]の関数空間論による手法である。その後我々は実数体上の不連続関数を連続化する一様位相の手法、および出力の値を再帰関数よりは広い極限再帰関数によって支配することを認める方法も開発した。ここでは前二者について考察する。第三の方法は2.3.3節でも扱われた。第二の方法は、3.3.2節でも取り上げ

た。なお、これらに関する問題点や数学観などについては[33]、[37]および[40]などで解説・検討している。

関数空間の手法について[21]を参考に説明しよう。実係数体（複素でもかまわないが、簡単のため実数にする）上のバナッハ空間が計算可能性構造（computability structure）を持つ、とは次の3個の公理を満たすような、その領域からの点列の集合があること、である。以下の3公理は（未規定の）点列集合の族に関する条件を述べている。ここでは技術的な表現を避け、正確な公理はA.2節で述べる。この公理系の必要性は4.2.1節で述べられている。

公理-1 (線形性 : Linear forms). その族の2個の点列の、計算可能な2個の実数列による線形結合の結果の点列は同じ族の要素である。

公理-2 (極限 : Limits). その族の2重列が実効的に収束する点列は同じ族の要素である。

公理-3 (ノルム : Norms). その族の要素のノルムの列は計算可能実数列である。

これら3公理を満たす点列の族を、その空間の計算可能性構造と名付け、その要素である点列は計算可能である、という。

ここで注意すべき点は、この公理系はノルム線形空間においても意味をもつことと、公理-2では"実効的に収束するならば"という条件がついていることだ。コーシー列の収束性を主張しているわけではない。

公理1-3は、バナッハ空間の部分構造を規定する公理群であり、未規定の集合とその要素によって表現されている。空間の要素も演算もそもそも未規定である。3個の公理は未規定な構造のなかの未規定な部分構造に関する叙述であって、典型的にブルバキ的である。ただし、

実数および実数列の計算可能性はすでに規定され合意されたものを使用する。このことは[2]でも触れている事実であり、数学の諸理論を構造的に見るという数学観ではそれはとくに問題にはならない。基礎づけでも構成主義でもないのである。

３個の公理は未規定の述語”計算可能である”によって記述されているのである。4.2節で紹介したPour-El & Richardsの観点に沿っていることが分かる。Pour-El & Richardsは計算可能性構造の公理をバナッハ空間に対して定義しているが、実はノルム線形空間でも定義自体は意味を持つ。ノルムと線形演算が定義されていれば定義の記述は可能なのである。

個別の例として連続関数のノルム線形空間$C[0,1]$において計算可能連続関数列の族は３個の公理を満たす。反例に使われた関数列$\{x^n\}$はその空間で収束しないので、問題にはならないのだ。ここではユークリッド連続関数列としての計算可能性と、計算可能性構造の要素であることは同値である。

他方バナッハ空間$L^2[0,1]$においてノルムは前述のように絶対値の２乗積分の平方根である。この空間の計算可能性構造を、計算可能なユークリッド連続関数の列によってL^2-ノルムで実効的に近似可能な（近似率が再帰関数で得られる）$[0,1]$上の関数列の族、と定義すると、その族は確かに上記の３個の公理を満たす。ユークリッド連続な計算可能列とともに、連続に近く計算性をもつと想定される関数列はすべてこの意味で計算可能になり、前出の単項多項式列$\{x^n\}$は極限関数ιに実効的に収束し、したがって$L^2[0,1]$では関数ιは計算可能なのである。

この事実を念頭に4.3.2節と照合すると、次のようになる。連続関

数の空間$C[0,1]$はノルム線形空間の下部構造である計算可能性構造をもつノルム線形空間に所属し、その下部構造である計算可能性構造を持つバナッハ空間の構造に所属する$L^2[0,1]$空間に線形部分空間として埋め込まれる。$C[0,1]$の計算可能性構造は$L^2[0,1]$の計算可能性構造の一部分である。言い換えると要素の点列が"計算可能である"という述語の外延が後者では増えている。$C[0,1]$を初期理論とすると、$L^2[0,1]$は"完備性"という内的要求に沿った拡張としての新理論になっている。上述のように初期領域は新領域に埋め込まれ、"計算可能"という述語の外延は拡張されている。ノルム線形空間としての法則も計算可能性構造の法則も公理として全く同じ形式が継承されるので、形式保存性は成り立つ。初期領域に限定すれば"計算可能性"はもとの意味をもつので実質保存性も成り立つ。以上により$L^2[0,1]$は$C[0,1]$の、計算可能性構造を含めての同質的な拡張になっている。

次に、一様位相の手法について考察する。可算基本近傍系をもち、その一様性公理での基本近傍系の諸対応が再帰的である"実効的一様位相"という構造を定義できる。その上の関数の実効的連続性はその位相のみを使って定義できる。初期理論がその構造に所属し、その開集合を保存する新理論が同じ構造に所属するとき、初期理論の計算可能連続関数は新理論でも計算可能連続になる。したがって実質保存性は成り立つ。同じ公理を使うので、形式保存性は当然である。こうして"計算可能連続関数である"という性質の外延は拡張され、その拡張は同質的である。3.3.2節の例はこの一般論の具体例になっている。なお、この方法はデデキントの数学観によっても説明ができた。強いて一方を選択する必要はない。

第5章　歴史的背景

4章までで数学における妥当な概念拡張の二つの様式を検討し、著者の数学研究である計算可能性理論の妥当性をそれらに照らして論じてきた。

二つの様式であるデデキントの発生論的（genetisch）数学観とブルバキの構造主義的数学観とは、かなりの違いがある。時代的にも一世紀の隔たりがある。しかし数学観は突然変化するわけではなく、継続的に変化するのが常である。本章ではデデキントからブルバキまでの変化を概観してゆく。それが二者それぞれの数学観の特徴をより明らかにし、本論の主題である概念拡張の同質性にもさらなる意味を与えると考えるからである。ただし歴史的変遷は大きなテーマであり、詳細はさらなる研究を待たなければならない。ここでは先行する研究に大きく依存し、それに関する私見を述べるにとどめる。

デデキントからブルバキの間にはデデキントを継承しながら公理的・論理的観点を進めたヒルベルト、ヒルベルトの（ブルバキによれば）一価的公理系から、代数学の構造主義的展開を完成させたvan der Waerdenを経由して、数学観としての構造主義を表明したブルバキまでの系譜がある。その系譜をたどってゆく。

5.1 デデキントからヒルベルト

デデキントの『資格論文』は１８５４年のものであり、いわばデデキントの将来の仕事のプロポーザルである。実際の数の概念の拡張としては、有理数の切断による実数の構成を１８７２年に出版した。5.1.2節でも触れるが、ヒルベルトはこれらに見られるデデキントの数学観を発生論的 (genetisch) と見ている。ヒルベルトは有理数の集合あるいは列から実数を定義する方法を”発生学”と呼んだ ([13] 林・八杉 2006, p.91参照)。本論第3章を通して明らかにすることを試みたデデキントの概念拡張に対する観点を見れば、ヒルベルトの評価は正しいと言える。

上述の観点については一つ注意すべき点がある。それは、デデキントの１８８８年の[8]における自然数の定義だけは発生論的ではなく、異なる様相をもつ、ということである。自然数は拡張すべき基になる領域がない、つまり無から作り出すしかなかったからだ。

以下でデデキントとヒルベルトの仕事の中からその数学観の歴史的位置を探るのに役立つ箇所を見ていこう。

ヒルベルトについては5.1.2節で述べるが、算術は発生論的、幾何学はユークリッドの精神で公理と演繹、すなわち論理が中心で、二つの性質の比較は論理的に互いに導出されるかどうか、の問題だと主張している。

ヒルベルトの数学観の特色はブルバキの言うように一価性 (univalent : 4.1.7節) ということもあるが、論理中心であったことが大きい。数学の内容が論理式で書かれ、二つの性質は論理的演繹によって関係付けられた。二つのものの比較に実際の数学的対象間の射 (morphism) を考えることはなかった。それがヒルベルトの公理的方法の数学への

貢献の限界であった。しかしメタ数学への貢献は大きかった。

5.1.1 数の構成におけるデデキントの思想

ヒルベルトは[15]（Hilbert 1900）においてデデキントの数学観を”発生論的”(genetisch）と呼んでいる。（本章ではヒルベルトの著作に関しては主に[19]（中村幸四郎訳昭和４５年版）を参照する。)『資格論文』の主題はまさに概念拡張の原理の追及なのであり、『資格論文』がデデキントの当時の数学研究のプロポーザルであることに照らせば、ヒルベルトのこのデデキント観は正しい。数学の理論を拡張・発展させるために数学者に認められる原理の一つが概念拡張のこの意味の発生論である。他方には公理的方法がある。概念発生的原理と公理論的 (axiomatisch) 原理は異なる。そして我々の連続体上の計算可能性研究を支える原理としてはこの両者が必要だったのである。

[8]における自然数の定義に関して、恣意性はその内的必要性から当然排除されるはずだが、デデキントは一意性は要請していない。その9節で、デデキントは原始再帰法による定義の合法性を打ち立てている。これはまさに3.2.2節で検討したように、『資格論文』における反復のまとめ上げである。

[8]の序文（ここでは１８９３年版の第二版を引用する）で、デデキントは「数概念の逐次導入、すなわちゼロ、分数、無理数、複素数の逐次創造、を、先行するものへの還元によって、そして異質な概念の導入なしに（ohne jede Einmischung fremdartiger Vorstellungen ）完成する方法は何か。このことについて少なくとも無理数については[7]において示した」と言う。”異質な概念”とは、たとえば可測量 (meßbaren Größen : 物理的量と思われる）のような概念だと言っている。無理数を有理数

の集合の対で定義し、その上の四則の演算は有理数の対応する演算から誘導されることから、有理数から無理数への概念拡張において、有理数に関する演算や関係以外は入り込まないのである。

概念拡張における"異質な概念の排除"は、『資格論文』にはその表現としては出現しない。しかし妥当な拡張の原理として3.2.5節で整理し提案した同質性はまさに異質性の排除を含蓄している。野本も[20]で[8]に関してこの点を取り上げている。『資格論文』自体には明確な表現がないので、3章ではこの件に関して言及しなかった。

[8]に見られる自然数の定義は、自然数をベースにした概念拡張によるその後の数体系の定義とは性格が異なる。自然数は"その前"がないのだ。したがって概念拡張の原理は使用できない。本論ではその内容の紹介はしないが、直接定義をしなければならなかったのである。

さらに「数学においても他の科学においても最も偉大で実り豊かな進歩は新しい概念の創造と導入によってもたらされた。それらは、複合的な現象の頻繁な再起によって必要とされた。これらの現象は古い概念で管理するにはかなりの困難が伴った」と言う。『資格論文』ではこのような動機は明示的に述べられていないが、『資格論文』を含め、数を基礎にした一連の数学に関する考察は、デデキントが当時の一般的な数学観の限界を見抜いた結果であろう。

デデキントの仕事のうち代数的側面に関しては、[9]に収められているデデキントの著作の一つ、'The tenth supplement to Dirichlet's lectures on the theory of numbers' (Dedekind 1871)についての編集者Ewaldのノートが示唆に富む。それによれば、１８７１年の時点でデデキントは集合の言語で数学の対象を定義していた。たとえば体は実数または複素数の部分集合で算術演算に関して閉じているものだったと言う

ことだ。（集合はSystemと呼ばれた。）体の概念を規定する公理は一つの構造を表すものであるが、後にブルバキがデデキントとヒルベルトの公理についてその一価性を指摘したように、ここでの体は実数上のものに限定されていた。なお、一価性というのは同型の意味での一価性である。

Ewaldはさらに、デデキントはこのTenth Supplementでは『資格論文』のアイディアをより高い抽象化のレベルへと持ち込んだ、という。すなわち、『資格論文』の目的は新しい数のクラスの集合を、特定の演算に関する閉包によって得ることであり、それよりデデキントは体、イデアルその他の代数的数論の構造の創造へと導かれた、と言う。この一文は単純化しすぎのきらいがあり、実際に『資格論文』から代数的構造へとすぐにつながったのか、等は筆者は検証していない。しかし大筋は正しいと思われる。

デデキントは[7]で本文に先立って、実数の構成を手掛けたきっかけを述べている。それは微分の初歩を教えるときに、算術の真に科学的な基礎が欠けていると実感したからだった。コーシー等他の実数の構成者も同じきっかけをもったようで、ちょうど解析学が発展し、実数の連続性の基礎が必要になった時期であった。またこの著作の3節、第三パラグラフでは数学発展における同質性を仄めかす一文がある:「私は算術はそれ自体から発展すべきことを要請する」。次の第四パラグラフで具体的に、「… 異質な概念を算術に持ち込む理由はない。… 有理数だけを使って無理数の完全な定義を与える努力をしなければならない」と言う。前述のとおり、実際に無理数の構成に関してはこの原理にしたがっている。

『資格論文』ではデデキントは明言していないが、負数、有理数、

無理数は、演算に関して方程式を解くことや演算の自由な実行（有理数上のべき乗の例）などが内的必要性であった。ここでは数の集合としての連続性あるいは完備性が内的必要性になっている。数学は多面的であり、進歩するものだから当然起こり得ることだが、デデキントの思考が進んだ結果でもあるだろう。『資格論文』に関して3.2.5節で提案した一般的原理としての内的必要性および保存性はこのような場面にも対応しており、3.3節で様々な場面の例をいくつか挙げた。

このような内的必要性と保存性に関して、[3]（Cassirer 1910）が類似した議論をしている。[3]は膨大な著書であり、ここで取り上げることはできないが、たとえば第三章「空間概念と幾何学」のII（翻訳 pp.93-94）のなかでJean-Victor Ponceletの＜連続性の原理＞（Kontinuitätsprinzip）、後に＜数学的関係不易の原理＞（Prinzip der Permanenz der mathematischen Relationen）、と定式化された見解を参照して「われわれが出発点においた唯一の要請は、一度定義されたある関係の妥当性を、個々の関係項の内容が変化しても保存可能ということで、概念的に表現されうる」と述べている。また、第四章「自然科学的概念形成」のIXにおいて（翻訳 pp.255-256）「精密自然科学の概念は、すでに純粋＜数学的＞認識の内部において作用していた思考過程を継承したにすぎない。」さらに「すべての真正の自然科学的概念がその実り豊かさを示すのは、それが「事実」のこれまで知られていなかった新しい領域への道を示すという、まさにそのことにおいてである。… 直観の多様のなかの新しい特殊性をわれわれに教示するであろう方向をつねに指し示しているのである。」これらの文章の真の意味の理解は今後の研究に懸るが、保存性と内的必要性に関わることは確かである。

[8]の第一版序文には、デデキントの数学観が明白に表現されてい

る。「科学において、証明可能なものについては証明なしで信じるな」;「私が算術（代数、解析）を単に論理の一部分というのは、数の概念を空間と時間の概念あるいは直観から独立に考察する、という意味である」;「私はそれをどちらかというと純粋な思考の法則の直接的産物と考える」。

これらの主張から、デデキントのいう「数学は論理」とは直観を排して論理的に証明するべき、という意味であることは明らかだ。しかし数学すべてが論理そのものから構成されるという意味合いでは全くない。そして数学は思考の法則の産物であるということは、数学の対象を実際に構成するのではなく、概念の規定であることを意味する。デデキントの”論理的”は、「物を物に関係付ける、対応させる、表現する」など、集合上の広い意味の写像の概念である。それらすべてが心（知性の意味の）の働きと考えているのである。

[9] にはデデキントから Heinrich Weber への１８８８年の手紙の訳も収録されている。無理数の概念について、Weber はカットそのものを無理数だと言うが、自分は「(カットとは異なる）カットに対応し、そしてカットを創造する、何か新しいものを創造したい。」そして「我々はそのような創造的能力を我々に帰する権利をもっている。」

デデキントは無理数をカットによって構成したと言われ、また実際にそうしたのであるが、それは無理数の表現であって、無理数自体とは認識しない、というのである。5.1.2 節でヒルベルトのこの件に関する見解を紹介する。

5.1.2 ヒルベルトの数学観

前述のようにヒルベルトはデデキントの数学論を発生論的 (genetisch) と呼んでいる。本節ではヒルベルトの[15]（Hilbert 1900）と[16]（Hilbert 1917）における概念発展についての主張を、[19]の中の「数の概念に就いて」と「公理的思惟」で見ていくことにする。以下は正確な引用ではなく、内容の説明である。

「数の概念を導入する方法は、数1から数える操作で有限整数$2, 3, 4, \cdots$を作り、その演算方法を展開する。二つのものの組として分数を定義し、切断若しくは基本列として実数を定義する。これより中間値定理が導かれる。… 我々は数概念のこの導入方法を発生論的方法と名付けることができる。簡単な数の概念を順次に拡張して実数の一般概念が"生成"されるからである。」([19] pp.207-208: pp.185-186)

生成されるものは概念であることが明確にされている。『資格論文』における概念拡張そのものである。

「幾何学の建設はこれとは全く異なる方法に依る。最初から幾何学構成要素、すなわち点、直線、平面の存在を仮定し、ユークリッドに習っていくつかの公理によってこれらの構成要素を相互に関連付ける。必然の問題としてこれら諸公理の"無矛盾性"および"完全性"の証明という問題が生じる。この研究方法を公理的方法と名付ける。」([19] p.208: p.186)

算術に関するここでの発生論的見解はそれまでの歴史的事実を述べたものと理解するべきである。なぜならば、この後に幾何学を模範として算術の公理化を図っているのだ。実際に算術も公理的に扱えると気付いた過程が手書きのノートに見られる。この件に関しては

筆者も著者の一人である[12]（Hayashi et al. Manuscript）で扱っている。ブルバキも『建築術』で指摘しているように、ヒルベルトの公理系は構造の公理とは意味が異なることに注意しなければならないが、他方公理群に関する無矛盾性と完全性への言及は二重の意味で重要である。それが公理的方法から”必然的に”生じる問題である、つまり内的必要性から生じる、としていること、およびこのようなメタ数学の課題が１９００年に明確になっていることである（[15]）。基礎論論争のはるか以前のことだ。

「発生論的方法と公理的方法が実際にその役割を果たすか、またこれらが唯一の方法か?力学や物理学理論への応用でいずれが優れているか?」([19] pp.208-209: p.186)

数学における概念発展に関する方法論について問うときに、目的が物理学への応用であることに注目しておこう。後でこの件に戻る。

「発生論的方法は教育的および発見的な価値がある。しかし我々の知識の内容を決定的に記述しかつ論理的に保証するには公理的方法が優れている。」([19] p.209: pp.186-187)

ここにヒルベルトのスタンスが明確に表れている。デデキント的方法である発生論的方法の価値は認めながら、公理的方法の有効性を見抜いている。そしてここで最も重要なことは、「論理的な保証」を明言していることだ。ヒルベルトにとって論理が数学の基礎なのである。ただし、これはいわゆる論理主義とは異なることに注意しよう。

この後に算術の公理を設定し、諸公理のメタ数学的性質について検討し、いくつか証明を与えている。

「ここで設定した公理の無矛盾性の証明が実数全体の集まりの存在証明となる…」([19] p.214: p.191)

”無矛盾性イコール存在”というヒルベルトの数学哲学がここで確固として宣言されている。実はこの考え方はすでに１８９３年の手書きノートに見られるのである（[12]および[13] のpp.165-167で検証済み)。「幾何学基礎論」(Grundlagen der Geometrie) よりもかなり早い。幾何学研究に影響されているが、対象は代数であったようだ。

「無限集合一般の存在は、物の一つの集まりの元素間の相互関係が有限個の公理群で与えられ、元素に関する命題がその公理群より有限個の論理的演繹によって導出されるときにそれが成り立つ、とすればよいのである。」([19] p.215: p.191)

すなわち証明可能性を真であると考えている。証明可能性は論理の問題となり、ここでも論理が基礎になっていることが分かる。

次に[16]を[19]の中の「公理論的思惟」を参照しつつ見てゆこう。

公理的方法が科学の発展過程で生じてきたものであることに続いて各学問部門における”理論”の構築を説明する。

「知識の部門の組織立てのためには、”概念の骨組み”を組立て、その部門の各事実がこれら諸概念の間の論理的関係に対応するようにすればよい。この知識部門における”理論”こそ、概念の骨組みである。」([19] p.217: pp.193-194)

一つの学問あるいは科学を組織的なものと認められるようにするプロセスを述べているが、ここでも基盤は論理である。そしてその結果の理論は個々の事柄ではなく、多くの事実を一まとめにする働きをすることを、一つの幾何学、一つの数論に、さらには物理学の各部

門および確率論、集合論、素数論などの純粋数学、貨幣論まで同じ仕組みで理論が構築されるという。デデキントの『資格論文』の中の例として法学と鉱物学があることを想起させ、その後４０年以上を経ていることを考えると、興味深い。

「概念の骨組みの構成には、その知識部門のいくつかの特別な命題が基礎になり、それらのみから論理的に十分組み立てることができる。」([19]p.218: p.194)

これら特別な命題がデデキントにおける法則に対応する。しかしヒルベルトが繰り返し論理を強調するのに反し、デデキントはこの導出の部分は明確にしていない。論理という用語は使うが、それが学問の組み立ての役目をする、とまでは考えていなかった。

上記の主張の現実性を示すために、ヒルベルトは各部門における基本定理をいくつか挙げている。ユークリッド空間幾何学全体を解析学の手段のみに依って完全に構成出来る、というのはヒルベルトの良く知られた成果だが、それは平面の方程式と座標変換の性質から導かれる。それ以外に力学における微分方程式や素数論におけるリーマンのゼータ関数のゼロ点に関する性質などが基本公理とされる。

「これらの基本定理は各知識部門の公理とみなせる。そして各部門の進歩とは、この概念の骨組みを論理的に完成することにのみ係わる。」([19] p.219: p.195)

この後に、ある理論を表現する概念の骨組みが妥当であるための条件として従属性・独立性および無矛盾性の保証が挙げられ、それらについて例を示しながら詳しく検討している。とくに無矛盾性の問題が最も重要である、として物理学の例から始める。既出のとおり、ヒルベルトの公理化への関心の起源は物理学あったことについては、

Corryの[5]（Corry 2006）が参考になる。幾何学基礎論が物理学の公理化への習作であったことは、[12]の研究においてヒルベルトのノートの中にその証拠を見つけた。[16]における諸例はそれを納得させる内容である。

「一つの知識部門の内部に於ける無矛盾を認識することは、すでに久しく承認され、結果を多く出している諸理論においてさえ、容易ではないのである。」([19] p.225: p.200)

物理学においても内的無矛盾の証明には数学の発展が必要なのだが、内的無矛盾が自明であると思われることもしばしば起こる、という。熱伝導の例などが挙げてある。そしてもし矛盾が起これば、公理を変えなければならない、と言う。言い換えれば公理を変えることができるわけだ。純粋に理論的な知識部門では状況は異なる、として公理的方法の効能を訴え、例として集合論でカントールの逆理に対処するには公理的研究方法が有効だった、と指摘する。

デデキントは概念拡張の際に保存性を課すことによって恣意性を除去しようと試みた。ヒルベルトは拡張に限らず恣意性あるいは自由性の制限に公理の有効性を認めた。法則の遵守という形式保存性は公理に近い性質を持っているし、公理系によって理論の働きを多少抑制しても効果はほとんど変わらない、という点は実質保存といえるだろう。他方、内的必要性が、デデキントの場合には数学の内容をさらに豊かにするという要請から生じたが、ヒルベルトの無矛盾性問題は理論内の不都合の除去という要請から生じたものである。

この後で、幾何学基礎論において幾何学の公理系の無矛盾性は実数の算術のそれに還元されることを示した、と回想している。たとえばガロアの群論において、根の存在の定理を公理とみなせば、その

公理系の無矛盾性証明は根の存在定理の解析学的な証明になる。実数の無矛盾性問題は集合論の無矛盾性に還元できる。しかし、何かに還元できない理論が二つある、という。

「整数そのものの公理と集合論の基礎は他へ還元できない。論理学以外には採用し得る原理がないからである。」([19] p.230: p.204)

整数については、デデキントが実数は有理数のカットで構成されることを示したが、自然数だけは[8]において直接構成したことに相当する。

「そのために論理学の公理化をし、数論および集合論が共に論理学の一部分であることを証明する必要がある。フレーゲやラッセルの成果がそれに寄与する。」([19] p.230: p.204)

ヒルベルトは必ずしもラッセルたちのような論理主義ではないが、この一文は一番基礎になる数論と集合論が論理学の一部分である、という観点に立っている。これは論理主義の主張に他ならない。そしてその完成にはまだ多方面の研究が必要だと言う。ヒルベルトはPrincipia Mathematica（Alfred N. Whitehead & Bertrand Russell 1910, 1912, 1913）によって自分の問題が解決されたと思ったらしい。しかしそうでなかったことは数学的な事実である。この経緯は[13]のpp.210-211や[24]（Sieg 2013）のp.89においても説明されている。

「整数および集合における無矛盾性の問題は、孤立した問題ではなく、数学独特の色彩を帯びた最も困難な認識論の問題の大領域に属することである:… 数学の問題の解法可能性の原理の問題、数学研究の既成成果の補正可能性の問題、数学的証明の簡単さの判定条件を求める問題、数学および論理学における内容と形式との関係の問題、有

限個の操作に依る数学問題の決定可能に関する問題を列挙しよう。」(p.231: p.205)

これらの問題はそれぞれ数学の哲学においてもその後の証明論の発展においても重要な役割を果たすものであるが、とくに数学および論理学における内容と形式の関係の問題は、本論で提案した保存性における形式と実質の問題とも関連して将来さらに研究すべきことと考える。

この後にこれらの問題に相当する数学の具体例が列挙される。それらは興味深く詳しい分析に値いするものだが、ここでは省略する。

[24]はp.80でヒルベルトの１９２２年の文献"Neubegründung der Mathematik"([9]に英訳を収録: pp.1117-1134)から実数の構成と概念に関する部分を引用している。「実数の連続体は、なんらかの関係、いわゆる公理、によって相互に結合されている諸物(things)のシステムである。とくにデデキントカットによる実数の定義は二つの連続性公理、すなわちアルキメデスの公理と完備性公理、によって置き換え可能である。デデキントカットは個々の実数を決定できる。しかし実数の概念を定義する役には立たない。これに反して概念的には実数はまさに我々の体系の物(thing)である。… 上述の観点は全体として論理的に申し分ない。残る問題はそのような体系が考え得るものか、つまり公理が矛盾を導かないか、である。」

[24]におけるSiegの意見は、カットによる実数の定義についてのヒルベルトの批判的意見は妥当ではない、というものだ。無矛盾性問題はデデキントのlogicist programの明示的な部分であって、上述のヒルベルトの観点はデデキントの精神でもある、という。

筆者はこの点については知識が足りず、意見を持たない。しかしヒ

ルベルトの意見は行き過ぎ、というより明確でないと考える。確かに実数の集合論的構成は実数の概念は与えないが、数学的にはそれ自体は有用なものであり、使用を繰り返すことによってカットと実数を同一視するようになるものだ。また、既出のようにデデキントもカットを実数だとは見なしていない。この点をこの箇所のヒルベルトは見逃しているように見受けられる。他方ヒルベルトのいう公理系とその無矛盾性こそ実数の概念を与えるものだというほどにはデデキントの考えは煮詰まっていたとは思えない。

ここで重要な点は、デデキントが数学は概念である、つまり概念の産物である、という見解をとっていることがヒルベルトへのつながりを予想させるものであったことだ。

[24] の p.81 で Sieg はヒルベルトの無矛盾性問題と論理的方法について、次のような見解を示している。「デデキントとは対照的に、ヒルベルトは "Über den Zahlbegriff" と "Grundlagen der Geometrie" の中で、準統語論的な無矛盾性概念（quasi-syntactic notion of consistency）を定式化した。それは公理から有限回の論理的ステップでは矛盾に至らないことである。"準" がつくのは演繹原理が明示的に提供されていないからである。ヒルベルトは統語論的方法で無矛盾性を証明しようとしなかった。Grundlagen der Geometrie の総体的無矛盾性は意味論的なのである。」

ここで参照しているヒルベルトの文献は限定されたものである。しかしヒルベルトの全体像を観れば、ヒルベルトは徹頭徹尾論理を中心にしているのである。ヒルベルトの数学の基礎に関する観点の変遷については、未発表の手稿を丹念に調べる必要がある。我々は [12] においてその準備をしている。

5.2　ヒルベルトからブルバキ

本節では構造理論的数学観の変遷についてCorry [4]の視点を借りながら、考察する。[4]の内容部分は括弧で括るが、直接の引用ではなく、筆者の言葉での説明である。多くの史実は既知であり、とくに引用とはしない。[4]はHilbert-van der Waerden-Bourbakiの系譜で構造主義の萌芽から部分的構造主義、そして完成への変遷を俯瞰している。ただしこの系譜は代数学を通る道筋である。[4]の特徴は「”数学の本体”（the “body of mathematics”）の概念と”数学のイメージ”（an “image of mathematics”）の概念」の明確な区別をベースに置きながら見解を展開していることにある。前者は普通の数学の知識の集合であり、後者は数学観あるいは数学をメタな観点で理解することである。「この相違を数学の内容（content）と形式（form）の相違と混同しないように」と念をおしている。”内容”とは実質のことと解釈してよいだろう。

5.2.1　前書き

「２０世紀数学において、とくに１９５０年代から１９７０年代にかけては、数学とは構造の研究であるという考えが普及していた。そこで鍵となるのがヒルベルトとブルバキである」ことは一般に知られている。代数学が構造というイメージで書かれた最初が１９３０年のvan der Waerdenの著書”Moderne Algebra”である。その基は限定された形でヒルベルトの仕事に多く見られる。それを継承し、”構造”の真の意義を体現したArtinとEmmy Noetherの講義からModerne Algebraが著されたと言われている。数学的にはArtinとNoetherによって実現

され、van der Waerden が整理された形でテキストとして著した、というのが歴史的流れである。そして「van der Waerden が代数学でしたことを後にブルバキが全数学について試みることになったのである。」

数学における構造主義といえばブルバキ、という通念があるが、その萌芽をどこまで遡れるか、は意見が分かれるところだ。[23] のようにデデキントまで遡る見解もある。ブルバキによれば、4.1.7節で引用したように、デデキントやヒルベルトが構造理論あるいは公理論の立場をとっているときにも、それは一価性をもつものであって、真の構造主義ではなかった。しかし数学の理論を個別の言葉で語るのでなくある程度の抽象化を導入していたことから、構造主義の萌芽があった、と見ることもできる。

5.2.2 代数の構造的”イメージ”

最初に明確に構造概念が導入されたのは代数学においてだった。それは「知識としての数学の新しいイメージだった。」代数学史については踏み込まないが、１８６０年代から１９３０年代の間に代数学の現代的なアプローチが徐々に推進されたのである。「１９００年代から１９２０年代は新しい着想の時代であり、群や体のように抽象的に定義された数学的実体」が数学研究の対象になって行った。デデキントのように実数体の中で群や体を考えるのではなく、”群というもの”や”体というもの”が研究対象になった。群論など今日では普通に数学の一分野になっているが、当時としてはそれは飛躍であった。多くの個別理論に共通な性質を観察すれば、それを抽象化し、さらに抽象化の結果を個別理論に適用する、というのは数学活動の内的必要性から生じた現象である。この場合の内的必要性はデデキントに

おける個別の内部から出たものではなく、理論の集合からの要請といえる。

「この状況のなかでvan der WaerdenのModerne Algebraが著された。それは代数の本体を十分扱っているが、さらにこの分野の全く新しい見方、一つの統一された視点を持っている。それを代数の構造的イメージと呼ぼう。」

この視点によって１９３０年と１９３１年に２巻に渡って著されたModerne Algebraのエッセンスは「代数構造という一般的観念であり、群、体、などのある種の諸概念はその個別の実現である。」そして代数学の目的は代数構造の解明にシフトした。それは個別の理論からは一階層上の概念である。それが数学研究の対象になったことは革新的であったはずだ。

Moderne Algebraの目的と内容を一言で表すならば、「多様な代数領域を定義し、それらの構造を詳しく調べたこと」といえる。そこで[4]は二つの問いを呈する。すなわち「(1)代数領域はどのように定義されるか?と(2)代数領域の構造の完全な解明から何が得られるか?」である。(1)については一つは「空でない集合とその上のいくつかの抽象的に定義された演算子」によるものであり、もう一つは「既存の代数領域を採用し、その上に新しい領域を構成する」。前者は集合の上での自由生成であり、後者は概念拡張に相当する。(2)に関しては、Moderne Algebra全体によって答えられる、と言えよう。

Moderne Algebraでは代数学の基本概念である「同型、準同型、剰余類、合成列、直積等が群、環、体ににおいて個別に定義されており、それらから導かれる諸性質も個別に証明されている。」”準同型”という概念、”剰余類”という概念、というレベルにまでは行っていない、とい

うことだ。つまり諸理論の群、体等への昇格は行われたが、それらの間の関係である準同型などは代数系に共通の概念にまでは昇格していなかった。このような階層的変化は段階的に発生するものだろう。

「Moderne Algebra では自然数とその対による整数の定義の後に整数環の商体としての有理数、代数的構造の一環としての実数体、というように代数的に数を定義した。」数が代数に先行する基本概念とされていた19世紀的前提の変革が起こった、ということだ。

「Moderne Algebra では実数の非代数的性質（連続性等）は全く考えられていない。」代数学の基本定理はそこでは扱われない。代数構造に着目している限りはそれが主題にはならない。代数学に"異質な概念"を持ち込まないことによって代数構造が浮き彫りにされる効果がある。van der Waerden がそこまで考えたかどうか分からないが、結果としてはそうなったのである。

「もう一つ、体系の拡張に際して元の領域で成り立つ性質のうち、どれが保存されるか;たとえば整域の拡張が再び整域になるか、などの問題がある。」整域の拡張が整域になるとは限らないが、その拡張が必要な場合もある。この場合にはたとえば環の法則保存に焦点を当てると考えることができる。

「Moderne Algebra ではこれらすべての問題も概念も"現代的公理的方法"（“modern axiomatic method”）によって定式化された。」

「van der Waerden による新しい代数のイメージは、当時の代数の知識の本体の発展の状況によって可能であった。」このような事態は数学の発展においては常に起こるものであって、当然だ。十分なデータを得れば、その特性が導かれるものである。

5.2.3 ヒルベルトにとっての構造

5.1.2節ではデデキントの数学観との関わりにおいてヒルベルトの数学観を見た。ここでは構造という側面とヒルベルトとの関わりを見てゆこう。

「数学の構造的イメージの生起と展開へのヒルベルトの貢献において、ヒルベルトの不変式論、代数的数論および公理論における仕事がとくに関わってくる。」

ヒルベルトの[14]（Hilbert 1890）における一般有限基底定理の証明において現在でいう背理法が使われていることは確かだ。しかしヒルベルトはそれを論証の原理として打ち立ててはいない。「後にEmmy Noetherが明示的に定式化した。」この証明は有限基底の存在証明であって、具体的に基底を構成してはいない。具体性を伴わない存在の主張は当時としては斬新であった。斬新すぎた。当時の代数学は式の計算による具体的な構成から成っていたのである。

「ヒルベルトは環を所与の体の中の代数的整数の体系として定義したが、環を群の拡張としては定義しなかった。また、イデアルを抽象的道具として使うことはなかった。それは、そうする動機がなかったからだ。」ヒルベルトの関心事は個別の理論であって、その中に群や環の構造を見たのである。それゆえに、「ヒルベルトは諸理論の公理的分析をそれらの展開の最後のステージにおいて必要だと考え、それが出発点として必要だとは考えなかった。」その構造自体を研究する内的必要性がなかった、ということだ。

前述のように、ヒルベルトの公理的方法の線上で、それを代数学において高め完成させたのが、ArtinやNoether等であり、その成果を統一的に著したのがvan der Waerdenであった。もちろんこれは単純化

した見方であるが、代数学の構造主義の系譜は大体こういうことである。

5.2.4 ブルバキへ

現代数学における構造概念といえばNicholas Bourbakiだ。「１９３９年からEléments de mathematique（数学原論）を出版し始め、純粋数学の主な分野をカバーしていった。」

「このグループの仕事の主な着想源はModerne Algebraであった。Moderne Algebraで進められた学問的イメージの全数学への拡張がブルバキ・プロジェクトと言えるだろう。」ここで”学問的イメージとしての構造”と個々の構造とは次元が異なる概念である。「ブルバキは”構造”についての考察も行ったが、その結果から実際の数学が導かれたわけではない。」それは数学の現場に居れば当然のことに思われる。数学理論を”構造”という理解様式で観察するとき、従来の分類とは別の様相が現れる。それが各種構造なのである。そのような理解様式に至るのは多くのデータが与えられるときである。それが２０世紀前半に起こったことだと考えられる。

ブルバキの構造主義的数学観については、4.1節で『建築術』によって紹介したので、繰り返すことはしない。ただ[4]によれば、「ブルバキは数学が何であるか、何であるべきか、についての主張をもつ一流の数学者たちの集団であるがゆえに、構造主義的数学観も一通りではない。『建築術』はJean Dieudonnéの著作である」ということだ。しかしその内容はブルバキ流の数学の流れに沿うものであり、１９５０年には構成員の意見も相互に浸透していたであろうから、大筋”ブルバキの見解”と称することは妥当であろう。[4]も「主としてDieudonné

の意見を採用する」としている。「Dieudonnéによれば、数学は単に構造の学問というのでなく、”ブルバキの構造の学問”になった。ブルバキの仕事は結果として２０世紀数学に多くの重要な貢献をした。そしてブルバキの”構造”のイメージはその後の数学活動を形作ることになった。」数学の実行に構造のイメージは入り込まないが、数学の理解様式を導くことにはなった、ということだ。

5.3　最後のリマーク

5.3.1　概念拡張の同質性について

[40]では概念拡張の同質性の条件として内的必要性、（法則の）保存性、および（内容が不変と言う意味の）健全性の３項目を設定した。しかしこの意味の保存性と健全性は共に初期理論の保存性を意味していて、ただその質が異なるのである。それゆえ本論では3.2節において両者を”保存性”という一つの原理に統一し、そのうち法則遵守のほうを”法則保存性”あるいは”形式保存性”と名付け、健全性を”実質保存性”と名付けた。これは一つの現象の表裏を”形式”と”実質”と見立てることであり、デデキントが様々な表現で述べている条件が数学理論の本質の不変性のこの二面に相当するのである。形式保存性とは理論の概念規定として式または文章で表現されている法則が成り立つことであり、理解しやすい。公理系と呼んでもよい。”実質”とは何か、は大きな問題である。ここでは5.1.1節で引用したCassirerによる著書[3]の題名が”Substanzbegriff und Funktionsbegriff”であることを記すに留める。Funktionはこの場合には機能性という意味であり、むしろ関係性のことだと考えてよい。

形式と実質は”表裏”と書いたが、実際には完全に分離しているとは限らない。二つの傾向と見るべきかもしれない。概念拡張のときに理論の何を重点的に見るかによって、保存するべきものが形式かその理論の持っている何か、が変わるからだ。

たとえば、整域の環としての拡張の結果が整域とは限らない。構造理論において、この場合には環の公理の形式保存性のみが成立する。拡張後の理論を初期領域に限定すれば、環としての初期理論の内容は不変であり、それは事実上整域である。その意味で実質は保存されていることになる。

『資格論文』においては実質保存は比較的明確に記述されている。3.1.3 節と 3.2.2 節でも見たように、正整数上の加法の逆演算としての減法の導入の際に対象領域の拡張が生じる。したがって加法の定義の拡張も必要になる。拡張後の加法を元の領域に限定すると元の加法と同じ働きをする。あるいは同じ意味をもつ。これが加法の実質保存である。乗法についても同様である。それゆえ拡張された領域である整数領域はそれらの演算に関して元の領域と首尾一貫した役目を果たしていると言える。『建築術』は概念拡張について考察しているわけではないが、構造理論においては、4.3.2 節で検討したように、拡張された領域に元の領域が埋め込まれることが実質保存を保証する。

しかしながら実質保存性は『資格論文』によって完全に規定されているわけではない。本論では『資格論文』の記述にしたがって、加法と乗法の例のような「元の領域での役目の一致」を規定として話を進めてきた。実質保存と形式あるいは法則保存に関しては、5.3.1 節の Cassirer の引用でも「数学的関係不易の原理」によって法則保存性を強調している。古くは George Peacock および Hermann Hankel によって「形式

不易の原理」が提唱され、現在の文部科学省の学習指導要領にも明記されていることは一考に値する。

最後に「内的必要性」について一言触れる。デデキントが何故「内的」にこだわったのか、については本論の文献の範囲では明らかでない。実数およびその上の初等演算が有理数とその上の演算のみから定義可能であることを明言しているが、それは有理数から実数への拡張が内的必要性から生じているゆえに可能だと言える。しかし自然数の構成は集合論の枠組みで行われている。それをデデキントがどのように捉えていたかについては、本論の目的を越えるのでここでは考察しない。構造理論の場合には、内的必要性も保存性も意識的に意図していない。分析するとそれらの性質を付与可能だ、ということである。数学における概念拡張は何等かの必要性が契機になるが、現実にはそれが対象理論以外の数学から、あるいは数学外からの要請でもあり得る。しかし目的が数学における概念拡張である限りはその必要性は数学の問題として提示される訳であるから、多くの場合内的必要性となるのではないか。また、デデキントが発生論的な数学観を持ったのはその時代の数体系への関心事によるものであると推測してよいだろう。

4.1.2 節で見たように、『建築術』の第 2 節で、「異なる諸数学理論間に存在する諸関係の系統的研究という内的進化（internal evolution、l'evolution interne）が我々を公理的方法に導いた」とあり、筆者はこの内的進化を内的必要性と解釈した。ここでは内的必要性が生じる過程と言うほうが適切であろう。この場合の内的必要性の帰結は明らかにある理論の関係や領域の拡張ではない。しかし数学の新しい見方が数学の内からの要請で生じたことに間違いない。”内的”の意味や質

に関してはこれ以上立ち入らない。

5.3.2 二つの理解様式について

デデキントとブルバキの数学の概念拡張に関する理解様式は、どちらも生きた数学に基づいている。それは3章と4章の内容から明らかであろう。

両者は形の上では相違するが、全く異なる様式ではない。そしてデデキントの数学観とブルバキの数学観は無関係ではない。実際具体例ではどちらの観点にも当てはまるものが多くある。しかし数学の発展をどう捉えるか、という哲学的観点から見れば、基本的な相違がある。それは各々の数学観において述べたとおりである。

どちらにも数学理論の同質的発展という観点を付与可能なことは既に議論してきた通りである。ブルバキの構造理論に集結された数学観は数学の多大な発展と分岐の流れのなかで、それらの再整備が求められ、個別の多様な理論に共通な本質を見出すことが、数学自体からの要請だったのである。デデキントに見られる個別理論の、より広い領域への発展という要請とは対照的であるが、それは数学における時代的相違に起因するものだろう。もちろんデデキント的数学論がその後無効になったわけではない。観点（viewpoint）が変わったのであって、同じ場面に遭遇すれば、よみがえるものである。

ブルバキの概念拡張における法則は構造の公理系であり、実質はそれら公理が指し示す構造である。その手法では、デデキントのように今あるものに加えるのでなく、構造を選んでそれに所属する新理論を求める。その中に初期領域が埋め込まれている。そして初期理論の公理は構造の公理がそのまま継承されるので、新理論の公理と

もなって、形式保存は自然に成り立つ。実質保存は埋め込みの条件によって自ずと成り立つ。

本論で採用された二つの数学観のさらなる比較は有意義であろう。本論では概念拡張において旧理論と新理論が自然な接点をもつ、すなわち拡張が何等かの意味で自然なものであることが説明可能である、という視点からのみその類似性と相違性を考察している。それらはすでに処々で述べられているが、ここで再考しておこう。

『資格論文』で示されている、概念拡張という意味の数学観は発生論的であり、『建築術』で示されている数学観は構造理論的、あるいは構造主義的である。その相違は同じ状況の異なる見方ではない。『資格論文』における考察は数および数に密着した数学という原初的な対象に向けられている。そこには多数の類似の数学理論が散在しているわけではなく、必要最小限の対象の構成が問題になっている。『建築術』に代表されるブルバキの数学論は、多くの類似の理論の個別的詳細を捨象し、それらの共通項を一つの構造として抽出するものだ。『資格論文』で問題にされた数体系やその上の数学は、基本的対象として常に利用されるべきものになっている。その意味ではデデキントの数学観が基礎になっている。ブルバキの構造主義は概念拡張自体を主題にしているわけではない。構造を考察の対象とすることによって、概念拡張が下部構造として実現されるような仕組みになっているだけだ。概念拡張という視点から見るときに、この点が『資格論文』との大きな相違である。他方、概念拡張における同質性という条件については、双方において同じ表現が可能である。一様位相における連続関数の理論のように、両者で同質性の解釈が可能な例は他にもあるものと考えられる。

なお、ブルバキ自身は自分たちの数学の様式を構造「主義」とは述べていない。主義にしたがって数学を展開するのではなく、実際の数学の一定の扱い方が「構造」によるものになっているだけだ。したがって筆者は「構造主義」という表現は適切ではないと考え、構造理論と記すこともある。しかしブルバキ数学が構造主義であるという見地から論じられることもあるので、多くの場合に構造主義という表現を使っている。

数学における概念拡張の様式は本論で扱った二種類とは限らない。ここでは筆者の目的である、不連続関数の計算可能性理論のいくつかの妥当性の説明が依拠できる二様式を採用したのである。他の様式の可能性や、同質性に依らない概念発展などについての考察はまた別の課題である。

結語

本論では数学における概念拡張の認識の二つの様式、すなわちデデキントの発生論的数学観とブルバキの構造主義的数学観、を検討し、妥当な概念拡張の原理を求めた。その原理として、拡張の”同質性”を提案した。同質性とは、概念拡張が内的必要性によって生じることと、法則保存性と実質保存性という二つの保存性を満たすこと、である。それぞれの様式において同質性の条件が語られた。概念拡張の妥当性とは、拡張前と拡張後の理論が自然な接点をもつことと考えられ、同質性はその保証をするのである。このような研究の起源は、筆者等の計算可能解析学の研究に由来する。実数上の連続関数の計算可能性には自然な定義があり、広く合意されてきた。計算可能性概念を不連続関数にも拡張する研究方法はいくつかある。それらがアドホックでなく自然な拡張であることが、同質性原理によって説明されたのである。

以上で一応目的は果たしたが、研究過程で生じた課題は多い。そのいくつかを記して本論を終えよう。

1. 本論では内容を発散させないために、『資格論文』の主張に沿った考察のみを行った。そこでの例は基本的に数に関するものである。しかし群やイデアルなどの構造主義の萌芽とも言える概念も『資格論文』の主張と無関係とは考えられない。したがって数学発展についての『資格論文』の観点がデデキントの代数学においてどのように実

現されているか、を見ることには意義がある。とくにデデキントの構造主義を論じている[23]の論点が”同質性”と整合的であるかどうかを検証することはその第一歩である。（主に3.1節、3.2節、5.1節に関わる。）

2. 本論の数学発展における”形式保存性”と”実質保存性”は古来議論されてきた”形相”と”質料”あるいは”Substanzbegriff und Funktionenbegriff”（Cassirer）と重なるものであるが、本論のような場面での特殊性もあると考えられる。『資格論文』の精査から妥当な数学拡張の要件として”同質性”を導いたが、これらの根本問題に照合して再考することは必要である。とくにCassirerの数学論との関係は興味深い。（同質性について検討を深める、という意味で本論全体に関わる。）5.1.1節でCssirer [3]の第三章と四章から実質と形式の関係の重要な主張を引用したが、同文献の第二章「数の概念」はデデキントの数概念も扱っており、本論のさらなる充実のために今後深く検討する必要がある。

3. （Benacerraf 1981）がフレーゲを「最後の論理主義者」と位置づけ、その解釈を基に数論に関わるデデキントの数学を「論理主義」とみなした[20]は、”論理主義”に歴史的段階があり、丁寧に検証すべきことを示唆している。本論でも5.1節でヒルベルトとの関連でデデキントの論理主義について言及はしている。当時の歴史的な流れの中でのデデキントの論理的観点とヒルベルトのそれとの比較をもう少し詳しく調べたい。(5.1節の続きといえる。)

4. デデキントがRiemannに多大な影響を受け、とくにそれが点集合の概念を受け入れる基礎になっていることは[10]にも見られるようによく知られた事実である。そしてRiemannはHerbartを哲学の師と呼んでいた。では、Herbartの間接的な影響がデデキントの上にあったのか、

という問いを持つのは自然だろう。もしあったとすれば、それがたとえば『資格論文』に何らかの影響を与えているかどうか、は興味深い課題である。(5.1節に関連するが、新しい研究の糸口にもなる。)

5. 筆者が計算可能性研究の基礎を『資格論文』に求めたのは、[22]や[17]の影響である。この点については本論では全く検討されていない。筆者の目的の完結のためには、この間の経緯を明らかにすることが必要である。(本論全体の基礎作りといえる。)

6. デデキントとブルバキの数学観の相違と類似性は、5.3.2節でも触れているように、3章と4章の内容から汲み取れるわけであるが、両者の比較は明示的には行われていない。どのような点に視点を合わせるかによって比較結果は異なる様相を呈するであろう。本論では最終目的である計算可能性問題への応用を主眼としたために、概念拡張における同質性が両者に付与可能であることのみを主張した。構造理論の視点から見れば、デデキントの限定的な構造的観点からブルバキの構造主義というべき観点への変遷を5.2節で述べている。しかし本論では論じられていない本格的な比較検討は、本論の目的とは別に重要な事項である。

7. 内的必要性は概念拡張において重要であるが、明確な規定を持つ概念ではなく、またその発生の仕組み等についての考察も必要であろう。先行する研究の調査も含めて、将来の課題とする。

参考文献

[1] Lenore Blum, Michael Shub and Stephen Smale, *On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: NP-completeness, Recursive Functions and Universal Machines* Bulletin of the American Mathematical Society 21, No.1 (1989), 1-46.

[2] Nicholas Bourbaki, *The Architecture of Mathematics*, The American Mathematical Monthly 57, no.4 (1950), American Association of America, 221-232.

[3] Ernst Cassirer, "Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik", Berlin, Bruno Cassirer (1910).

山本義隆訳, "実体概念と関数概念–認識批判の基本的諸問題の研究", みすず書房, 第 4 刷, 1986.

[4] Leo Corry, *Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki: The Evolution of an Image of Mathematics*, in A. Dahan and U. Botlazzin (ed.s), "Changing Images of Mathematics in History, From the French Revolution to the new Millenium", London, Harwood Academic Publishers(2001), 167-186.

[5] Leo Corry, *On the origins of Hilbert's sixth problem: physics and the empiricist approach to axiomatization*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid (2006), 1697-1718.

[6] Julius Wilhelm Richard Dedekind, *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik*, delivered as a Habilitationsvorlesung in Göttingen on 30 June 1854; first published in *Dedekind Gesammelte mathematische Werke* 1932, vol. III, 428-438.

[7] Julius Wilhelm Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), in *Dedekind Gesammelte mathematische Werke* 1932, vol. III, 315-334.

[8] Julius Wilhelm Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), in *Dedekind Gesammelte mathematische Werke* 1932, vol. III, 335-391.

[9] William B. Ewald (Editor and Translator), “From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics”, vol. II(1996), Clarendon Press, Oxford.

[10] José Ferreirós, “Labyrinth of Thought-A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics”, Birkhäuser, 1999 (Second Edition: 2007).

[11] E.Mark Gold, *Limiting recursion*, JSL, 30-1(1965), 28-48.

[12] Susumu Hayashi, Yuta Hashimoto, Mariko Yasugi and Koji Nakatogawa, *Hilbert's early philosophical thoughts and their influences on his studies of the foundations of mathematics*, manuscript.

[13] 林晋・八杉満利子訳・解説, ”ゲーデル　不完全性定理”, 岩波文庫, 青 944-1 (2006).

[14] David Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen 36, 4(1890), 473-534.

[15] David Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vol.8(1900), 180-189.

[16] David Hilbert, *Axiomatisches Denken*, Mathematische Annalen 78, 8 (1917), 405-415.

[17] Philip Kitcher, *Mathematical Naturalism*, History and Philosophy of Modern Mathematics, Vol.XI, University of Minnesota Press (1988), 293-328.

[18] Masahiro Nakata and Susumu Hayashi, *A limiting first order realizability interpretation*, SCMJ Online 5(10)(2001), 421-434.

[19] 中村幸四郎訳, ”ヒルベルト　幾何学基礎論”, 清水弘文堂, 昭和４４年発行, 昭和４５年再販（原文は昭和１８年, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8(1900) から終わりの一文章を削除して転載）: D. ヒルベルト中村幸四郎=訳、”幾何学基礎論”, ちくま学芸文庫, 第四刷（新字・新かな表記, 2012）.

[20] 野本和幸, ”R. デデキントの数論：（１）「無理数論」–論理主義の一出発点–”, 創価大学人文論集 22 号 (2010), 1-35.

[21] Marian B. Pour-El and Jonathan I. Richards, “Computability in Analysis and Physics”, Springer-Verlag, 1989: available at

http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=

1.0&verb=Display&page=toc&handle=euclid.pl/1235422916

[22] Willard van Orman Quine, Epistemology Naturalized, Ontological Relativity and Other Essays (1969), Columbia University Press, 69-90.

[23] Erick H. Reck, *Dedekind's structuralism: an interpretation and partial defense*, Synthese 137(2003), 369-419.

[24] Wilfried Sieg, "Hilbert's Programs and Beyond", Oxford University Press, 2013.

[25] Wilfried Sieg and Dirk Schlimm, *Dedekind's analysis of number: Sytems and Axioms*, Synthese 147(2005), 121-170.

[26] William W. Tait, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Numbers*, Frege, Russell, Wittgenstein; Essays in Early Analytic Philosophy (in honor of Leonard Linski), Court Press(1996), 213-248. Reprinted in Frege: Importance and Legacy, Walter de Grurter (1996), 70-113.

[27] Gaisi Takeuti, "Proof Theory", Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol.81, Northholland (Second Edition), 1987.

[28] Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi and Takakazu Mori, *Some properties of the effectively uniform topological space*, Computability and Complexity in Analysis, LNCS 2004 (2001), Springer, 336-356.

[29] Masako Washihara and Mariko Yasugi , *Computability and metrics in a Fréchet space*, Math. Japonica 43(1996), Japanese Assoc. of Math. Sci., 1-13.

[30] Klaus Weihrauch, "Computable Analysis", Springer-Verlag,2000.

[31] Mariko Yasugi and Masako Washihara, *Computability structures in analysis*, Sugaku Expositions (AMS), vol.13(2000), 215-235.

[32] Mariko Yasugi, Vasco Brattka and Masako Washihara, *Computability aspects of some discontinuous functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online 5(10) (2001), 405-419

[33] 八杉満利子, ”不連続関数の極限計算可能性一意義と問題点”,科学基礎論研究　第100号 vol.30, No.2(2003), 13-18.

[34] Mariko Yasugi and Yoshiki Tsujii, *Computability of a function with jumps-Effective uniformity and limiting recursion-*, Topology and its Applications (Elsevier Science), 146-147(2005), 563-582.

[35] Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii and Takakazu Mori, *Sequential Computability of a Function - Effective Fine Space and Limiting Recursion* -, Journal of Universal Computer Science 11-12(2005), 2179-2191.

[36] Mariko Yasugi, Takakazu Mori and Yoshiki Tsujii, *The effective sequence of uniformities and its limit: as a methodology in computable analysis*, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, vol.15, no.2(2007), 99-121(47-69).

[37] 八杉満利子, ”連続体上の計算概念について - 再帰関数を超えるもの - ”, 哲学論叢XXXV(2008), 京都大学哲学論叢刊行会編, 199-209.

[38] Mariko Yasugi and Masako Washihara, *Sequential computability of a function -limiting recursion versus effective uniformity*, Scientiae Mathematicae Japonicae 71,No.3(2010), 331-341;

Online, e-2010-16, No. 23(April 2010), 153-163: available at

http://www.jams.or.jp/scm/contents/e-2010-2/2010-16.pdf

[39] 八杉滿利子, ”数学における概念拡張の仕組み - デデキントの研究計画に沿って - ”, 哲学論叢 XXXIX 別冊 (2012), 京都大学哲学論叢刊行会編, サーベイ論文集, 24-35.

[40] 八杉滿利子, ”デデキントの数学観－大学教授資格講演における概念拡張の仕組み－”, 哲学研究 596(2013), 24-45.

付録A　数学的記述：連続体上の計算可能性

A.1　連続体上の計算可能性の定義

実数の概念は、有理数のコーシー列あるいは有理数のデデキント・カットなどで表現される。計算可能性の定義ではどの表現についても同値になることが知られている([21] 等参照)が、有理数のコーシー列が扱いやすい（[37] 参照）。すなわち実数xについて、

(A)　(i) ある有理数のコーシー列$\{r_n\}$があって、

(ii) xはそれによって近似される。

(ii) を詳しく書くと、「任意のpに対してNが存在して、$n \geq N$ならば$|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$が成り立つ」となる。$p, N, n$は自然数を表す変数である。(A) を「計算」の立場から表現しなおすと、次の (B) になる。

(B)　(i) nに対してr_nを計算する方法が存在する。

(ii) $\{r_n\}$のxへの近似の精度（近似率あるいは収束率）の計算方法が存在する。

(B) の数学的な記述は次の (C) になる。

(C)　(i) $\{r_n\}$は（自然数から有理数への）再帰関数である。

(ii) ある再帰関数αが存在して、任意のpと任意の$n \geq \alpha(p)$について、$|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$が成り立つ。

(ii) は、いわゆる$\varepsilon - \delta$方式の条件においてεに対してδ（この場合に

はpに対してN）を与える計算方法の存在を要求するものである。古典的な実数の性質(A)から実効的な条件(B)または(C)への移行を「実効化」と呼ぶ。また、(ii)の条件を満たす近似を「実効的近似」という。

他の計算可能性定義においても実効性および実効化の構造は同様である。

実数の計算可能性の定義は実数列$\{x_m\}$に対して自然に拡張される。

実数関数fが（実数全体で）連続である、とは、

(D) (i) 任意の実数xに対して関数値$f(x)$が定まり、

(ii) 連続の性質が成り立つ。

(ii)はいわゆる$\varepsilon-\delta$方式で表現されるものであるが、後のために次のような同値な表現を採用する:

任意のp, kに対してNが存在して、$x, y \in [-k, k]$で$|x-y| < \frac{1}{2^N}$ならば$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^p}$が成り立つ。

(D)の実効化は次のように述べられる。

(E) (i) ある計算方法があって、任意の計算可能な実数xに対して、その方法によって計算可能実数$f(x)$を得ることができる。

(ii) 連続率Nの計算方法が存在する。

(E)をもって連続関数fの計算可能性と考え、数学的には次の(F)で表現する。

(F) (i) （列計算可能性）fは計算可能実数列$\{x_n\}$を計算可能実数列$\{f(x_n)\}$に写す。

(ii) （実効的連続性）fに対して再帰的な連続率βが存在する:

すべてのp, kに対して$x, y \in [-k, k]$で$|x-y| < \frac{1}{2^{\beta(p,k)}}$ならば$|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^p}$が成り立つ。

前述のように、数学でよく使われる実数は計算可能であり、教科書で見るような数列は計算可能である。加減乗除、三角関数、指数関数、対数などよく知られている関数は、その定義域上で計算可能である。

A.2 バナッハ空間における計算可能性構造

関数空間の手法について[21]を参考に説明しよう。実係数体（複素でもかまわない；簡単のため実数にする）上のノルム$\| \|$をもつバナッハ空間$< X, \| \| >$で、計算可能性構造”(computability structure) の公理を持つ構造から始める。ノルム$\| \|$から距離が定義される。

計算可能性構造を持つバナッハ空間$< X, \| \|, \mathcal{S} >$の公理群は次のものである。ここで$\mathcal{S}$は$X$からの点列の部分集合であり、公理は$\mathcal{S}$に関するものである。

公理 1 (線形性 : Linear forms). $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は$\mathcal{S}$に属する点列、$\{\alpha_{nk}\}$ と $\{\beta_{nk}\}$ は計算可能な実数列、d は再帰関数とする。このとき次のように定義される列$\{s_n\}$

$$s_n = \Sigma_{k=0}^{d(n)}(\alpha_{nk}x_k + \beta_{nk}y_k)$$

は$\mathcal{S}$の要素である。

公理 2 (極限 : Limits). $\{x_{nk}\}$ は$\mathcal{S}$の要素で、Xからの列$\{x_n\}$ にkに関して、k, nについて実効的にノルムに関して収束するとする。このとき、列$\{x_n\}$は$\mathcal{S}$の要素である。

公理 3 (ノルム : Norms). $\{x_n\}$ が$\mathcal{S}$の要素ならば, ノルムの列$\{\| x_n \|\}$ は実数の計算可能列である。

これら 3 公理が成り立つならば、$\mathcal{S}$を空間$< X, \| \| >$における計算可能性構造と呼び、$\mathcal{S}$の要素である点列は計算可能であるという。つま

り３公理は未規定の述語「計算可能である」によって記述されているのである。Pour-El & Richardsの主張に沿っていることが分かるだろう。

公理1-3は、バナッハ空間の部分構造$\mathcal{S}$を規定する公理群であり、未規定の集合$\mathcal{S}$について$\{x_n\} \in \mathcal{S}$という条件によって表現されている。空間の要素も演算もそもそも未規定である。３個の公理は未規定な構造のなかの未規定な部分構造に関する叙述であって、典型的にブルバキ的である。ただし、実数および実数列の計算可能性はすでに規定され合意されたものを使用する。このことは[2]でも触れている事実であり、数学の諸理論を構造的に見るという数学観ではそれはとくに問題にはならない。基礎づけでも構成主義でもないのである。

個別の、そして自然な例として再び$L^2[0,1]$空間を取り上げよう。ノルムは上述のように絶対値の２乗積分の平方根である。この空間の計算可能性構造$\mathcal{S}$を、計算可能なユークリッド連続関数の２重列によってL^2-ノルムで実効的に近似可能（近似率が再帰関数で得られる）な関数列の族、と定義する（[21]: PartII, Section3）と、$\mathcal{S}$は上記の３公理を満たす。ユークリッド連続な計算可能列、連続に近く計算性をもつと想定される関数列はすべてこの意味で計算可能になり、前出の単項多項式列$\{x_n\}$は極限ιに実効的に収束し、したがって$L^2[0,1]$では関数ιは計算可能である。

以上より、構造という観点から見れば、我々が計算可能という感覚をもつ関数はユークリッド位相での連続関数も不連続関数も、当該空間において計算可能という意味で共機能性をもつと見なすことができる。

A.3 実効的一様位相における計算可能性

$\mathbf{N}$は自然数の集合とする。集合Xについて、各$n \in \mathbf{N}$に対してXからそのべき集合$\mathcal{P}(X)$への写像

$$V_n : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

が与えられているとする。各$x \in X$について$V_n(x)$はxのレベルnの基本近傍と呼ばれ、$\{V_n\}$はXの基本近傍系と呼ばれる。

この基本近傍系が次の公理$A_i, i = 1-5$を満たすとき、X上の一様位相と呼ばれ、構造$\langle X, \{V_n\}\rangle$は一様位相空間と呼ばれる。

A_1: $\forall x \in X \forall n \in \mathbf{N}. x \in V_n(x)$

A_2: $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} V_n(x) = \{x\}$

A_3: $\forall n, m \in \mathbf{N} \exists l \forall x. V_l(x) \subset V_n(x) \cap V_m(x)$

A_4: $\forall n \in \mathbf{N} \exists m \in \mathbf{N} \forall x, y \in X. x \in V_m(y) \Rightarrow y \in V_n(x)$

A_5: $\forall n \in \mathbf{N} \exists m \in \mathbf{N} \forall x, y, z \in X. x \in V_m(y) \wedge y \in V_m(z) \Rightarrow x \in V_n(z)$

$\{V_n\}$に対して次の性質を満たす再帰関数$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$があるとき、$\{V_n\}$を実効的一様位相と呼ぶ。

$$\forall n, m \in \mathbf{N} \forall x. V_{\alpha_1(n,m)}(x) \subset V_n(x) \cap V_m(x)$$

$$\forall n \in \mathbf{N} \forall x, y \in X. x \in V_{\alpha_2(n)}(y) \Rightarrow y \in V_n(x)$$

$$\forall n \in \mathbf{N} \forall x, y, z \in X. x \in V_{\alpha_3(n)}(y) \wedge y \in V_{\alpha_3(n)}(z) \Rightarrow x \in V_n(z)$$

$X = \mathbf{R}$（実数全体）であるとき、実数列$\{x_n\}$が実効的基本近傍系$\{V_n\}$に関して計算可能とは、$\{x_n\}$が再帰的有理数列によって$\{V_n\}$に関して実効的に近似されることである。実関数が計算可能とは、その意味の列計算可能性と$\{V_n\}$に関して実効的連続性が成り立つことである。

A.4 極限再帰とその有界性原理への還元

再帰関数の定義:

(Recursion) 関数gについて”停止性条件”

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \exists y. g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

が成り立つとき、

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min_y . g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

とおくとfは関数であり、このような関数の定義を（一般）再帰と呼ぶ。原始再帰関数と再帰的定義の反復によって得られる関数は再帰関数と呼ばれる。この場合の停止性を”実効的停止性”と呼ぼう。

極限再帰関数の定義:

(Limiting recursion) 関数ψについて”極限同定可能性”

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \exists y \forall x \geq y. \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

が成り立つとき、

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min\{y : \forall x \geq y. \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\}$$

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \chi(x_1, x_2, \cdots, x_n, h(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

とおく。（第一式の右辺を$\lim_x \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x)$と表す。）このような関数$h$の定義を極限同定（極限再帰）といい、$\psi$が再帰関数のときに関数$h$を極限再帰関数と呼ぶ。さらに$\chi$も再帰関数のときに$\phi$も極限再帰関数と呼ぶ。

ガウス関数の列計算可能性は次のように表現される:任意の計算可能実数列$\{x_m\}$に対して関数値の列$\{[x_m]\}$は再帰的（２重）有理数列で近似され、その収束率は極限再帰関数で得られる。

再帰的自然数の集合列の構成:

$P(n)$は再帰的な条件とする。

これより、再帰的自然数の集合列$\{C_n\}$を定義する。$n^* = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$とおく。

$$C_0 = \mathbf{N} \quad \text{if} \quad P(0); = \mathbf{N} \setminus \{0\} \quad \text{if} \quad \neg P(0)$$

$n > 0$に対して;

$$C_n = C_{n-1} \quad \text{if} \quad P(n); \ \ C_n = C_{n-1} \setminus n^* \quad \text{if} \quad \neg P(n)$$

gが再帰関数のとき、停止性条件$\forall m \exists n. g(m, n) = 0$を$HaltR(g)$とおく。(簡単のため$m$を省略)

$P(n)$を $\exists l \leq n. g(l) = 0$ とする。

$C_0 = \mathbf{N}$ if $g(0) = 0; = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ if $g(0) \neq 0$

$C_{n+1} = C_n$ if $\exists l \leq (n+1). g(l) = 0;$

$= C_n \setminus (n+1)^*$ if $\forall l \leq (n+1) g(l) \neq 0$

このとき

$HaltR(g)$と、

$$\cap_n C_n = \cap_{n \leq n_0} C_n$$

となるn_0を求める実効的方法がある、ことは同値である。この式より

$$\exists l. \cap_n C_n = \cap_{n \leq l} C_n$$

が成り立つ。

次にhは再帰関数とする。hに関する極限同定可能性条件を$HaltL(h)$とおく。(簡単のためmを省略) ここではこの条件を”一般停止性”と呼ぶことにする。

$P(n)$ を　$h(n) = h(n-1)$ とする。（$P(0)$ は真とする）

$$C_0 = \mathbf{N}$$

$$C_{n+1} = C_n \quad \text{if} \quad h(n) = h(n+1)$$

$$= C_n \setminus (n+1)^* \quad \text{if} \quad h(n) \neq h(n+1)$$

このとき

$HaltL(h)$ と

$$\exists l. \cap_n C_n = \cap_{n \leq l} C_n$$

は同値である。

両者とも形式的には同じ必要条件の形で書ける。(これをコンパクト性と呼ぶ。無限列の中に同じ条件を満たす有限列が存在するからである。有界性とも呼んでいる。) とくに再帰関数の場合の条件を実効的コンパクト性と呼ぶ。その存在記号の意味（解釈）が異なるだけである。また、集合列はどちらも再帰的であり、条件が整った段階で不変になる。実効的コンパクト性は単なるコンパクト性の特例であるから、後者を満たす集合列は実効的コンパクトな集合列より広い。したがって拡張になっており、コンパクト性という法則を満たすので、保存的拡張になっている。

このことを関数の停止性に戻すと、極限再帰関数の定義における一般停止性という性質は実効的停止性という性質の保存的拡張になっている。

A.5　二つの方法の同値性

[38] より引用する。

仮定 $[\mathcal{A}]$： 実数の集合$\mathbf{R}$上の実効的一様位相空間$\mathcal{U} = \langle \mathbf{R}, \{U_n\} \rangle$を話の場とする。

$\mathcal{A}$-1 再帰的有理数列は$\mathcal{U}$-計算可能である。

$\mathcal{A}$-2 ユークリッド計算可能数と$\mathcal{U}$-計算可能数は一致する。

$\mathcal{A}$-3 $\mathcal{U}$-計算可能列はユークリッド計算可能である。

条件 $[\mathcal{C}]$ on $\mathcal{U}$： ユークリッド計算可能な列$\{x_m\}$が与えられたとき、次のことが成り立つような$\mathcal{U}$-計算可能列$\{z_{mp}\}$と極限再帰関数νが存在する：$\{x_m\}$は$\{z_{mp}\}$とνに関して弱$\mathcal{U}$-計算可能である。すなわち

$$\forall m, n \forall p \geq \nu(m, n).z_{mp} \in U_n(x_m)$$

実数上の実効的一様位相$\mathcal{U}$と実関数fについての条件$[\mathcal{D}]$：ユークリッド計算可能な点列が$\mathcal{U}$-計算可能な点列によって極限再帰的に近似され、fは$\mathcal{U}$に関して実効的に連続である。

定理： 仮定$[\mathcal{A}]$、条件$[\mathcal{C}]$および条件$[\mathcal{D}]$のもとではfの$\mathcal{U}$-列計算可能性と極限再帰的列計算可能性は同値である。