

Title	Theory of Discrete and Ultradiscrete Integrable Finite Lattices Associated with Orthogonal Polynomials and Its Applications( Abstract_要旨 )
Author(s)	Maeda, Kazuki
Citation	京都大学
Issue Date	2014-03-24
URL	<a href="https://doi.org/10.14989/doctor.k18400">https://doi.org/10.14989/doctor.k18400</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	ETD

( 続紙 1 )

京都大学	博士 (情報学)	氏名	前田一貴
論文題目	Theory of Discrete and Ultradiscrete Integrable Finite Lattices Associated with Orthogonal Polynomials and Its Applications		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文は、直交多項式および一般化された直交多項式のスペクトル変換の両立条件として得られる離散可積分系について、特に有限格子境界条件の場合の性質について詳細に調べ、その結果を用いて箱玉系の解析や行列の一般化固有値計算アルゴリズムへの応用を図ったものであり、全7章からなる。</p> <p>第1章は、本論文に登場する基本的なオブジェクトである離散可積分系、超離散可積分系、および直交多項式について、それらの研究の歴史と性質を概観したのち、本論文における問題意識と目標、および各章の構成を述べている。離散可積分系と数値計算アルゴリズムとの関わりや、超離散化によるソリトン・セルオートマトンの構成、直交多項式と離散可積分系との関係など、本論文で主要な役割を果たす概念の説明と研究の動機付けを与えている。</p> <p>第2章は直交多項式と非自励離散戸田格子の理論のレビューである。直交多項式のスペクトル変換の両立条件として非自励離散戸田格子を導出し、特に有限格子境界条件の場合の初期値問題の解を、直交多項式のGauss求積公式を用いることで与え、その結果を行列の固有値計算アルゴリズムであるシフト付きdqd法の漸近解析に応用できることを見ている。これらは本論文全体の基盤となる理論である。</p> <p>第3章では非自励超離散有限戸田格子が運搬車付き箱玉系の運動方程式を与えるという結果について議論している。これは永井らによる超離散有限戸田格子と箱玉系との関係を拡張したものとなっており、本論文では箱玉系の有限戸田表現と呼んでいる。解を与えるために、非自励離散戸田格子に2方向の時間発展を導入しており、その簡約化によって得られるある行列の固有値計算アルゴリズムと箱玉系との対応関係についても明らかにしている。</p> <p>第4章では前章での結果を箱容量というパラメータが導入された場合へと拡張している。まず箱容量パラメータが導入された場合の箱玉系のルールについて述べ、この場合の状態を箱容量が1の場合の状態として読み直す展開写像と呼ぶものを導入し、有限戸田表現を組合せ論的な手法で与えている。特に箱容量が全ての箱で一定の場合については、具体的な解を構成している。</p> <p>第5章では、直交多項式の一般化の一つである<math>R_{II}</math>多項式と呼ばれるものと、そのスペクトル変換の両立条件として得られる<math>R_{II}</math>格子の理論を展開している。直交多項式と離散有限戸田格子の理論の類似として、有限<math>R_{II}</math>格子の初期値問題の解の構成を<math>R_{II}</math>多項式を用いることで行い、応用として行列の一般化固有値計算アルゴリズムを提案している。現状では適用できる対象は三重対角行列束に限られているが、この場合についてはLAPACKの標準的な一般化固有値ソルバーであるDSYGVと比較しても非常に高速かつ高精度な結果が得られることを数値実験によって確認している。</p> <p>第6章では非自励離散戸田格子と非自励離散Lotka-Volterra格子の間のMiura変換を拡張し、<math>R_{II}</math>格子と非自励離散modified-KdV (mKdV) 格子の間のMiura変換を与えている。Miura変換はある可積分系と別の可積分系との直接的なつながりを与えるものであるが、この導出においても<math>R_{II}</math>多項式と対称<math>R_{II}</math>多項式のスペクトル変換が本質的な役割を果たしている。また、導出したMiura変換を用いて、非自励離散mKdV格子の解を構成できることを見ている。</p> <p>第7章では各章の結果の要約と今後の展望を述べ、本論文全体のまとめを与えている。</p>			

注) 論文内容の要旨と論文審査の結果の要旨は1頁を38字×36行で作成し、合わせて、3,000字を標準とすること。

論文内容の要旨を英語で記入する場合は、400～1,100 wordsで作成し  
審査結果の要旨は日本語500～2,000字程度で作成すること。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、従来から知られていた直交多項式のスペクトル変換と離散戸田格子の理論を整理、発展させ、拡張された箱玉系の有限戸田表現、および $R_{II}$ 格子に基づく行列の一般化固有値計算アルゴリズムを提案している。また、 $R_{II}$ 格子と非自励離散mKdV格子との間のMiura変換の導出も行っている。

離散可積分系、直交多項式、箱玉系、そして数値計算アルゴリズムは、それぞれが個々の歴史を有し、盛んに研究され発展してきた分野である。これらのうち、いずれか二者の間の関係を調べる研究はこれまでもあったが、本研究の特色はこれら四者全てを包括的に扱っていることにある。これにより、運搬車付き箱玉系とシフト付きLRアルゴリズムの間の直接的な関係が見出されるなど、従来の研究ではなし得なかった興味深い結果に到達している。

具体的な成果は以下の通りである。

1. 箱玉系の有限戸田表現を箱容量付きかつ運搬車容量付きの場合について与えている。箱玉系の運動方程式は離散KdV方程式の超離散化によって得られることが知られているが、永井らによって離散有限戸田格子の超離散化によっても運動方程式が得られることが知られていた。この二つの運動方程式の関係は、流体力学で言うところのEuler表現とLagrange表現の関係に相当するものであり、本論文では超離散有限戸田格子による箱玉系の運動方程式を有限戸田表現と呼んでいる。導出した運動方程式が箱玉系を記述していることの組合せ論的な証明が与えられており、さらに箱容量が一定の場合については解も与えられている。また、三重対角行列の固有値と箱玉系のソリトンの長さなどの間についても議論されている。
2.  $R_{II}$ 格子を用いた三重対角行列束の一般化固有値計算アルゴリズムが提案されている。提案法は三重対角行列の固有値計算アルゴリズムであるシフト付きdq法に類似となっており、シフト付きdq法と同等の高速・高精度性を示すことが数値実験により検証されている。収束証明やシフトパラメータによる加速の効果を示すために、 $R_{II}$ 多項式により構成された $R_{II}$ 格子の初期値問題の解が効果的に用いられている。現状では入力が入力三重対角行列束に限られているものの、前処理の研究を進めることによって一般の行列束についても適用可能と見られるなど、今後の発展が大いに期待される。
3. 可積分系の理論において有名な戸田-Volterra対応の一般化として、 $R_{II}$ -mKdV対応が導出されている。離散戸田格子と同様に離散Lotka-Volterra格子も特異値計算アルゴリズムとして有用であり、このアルゴリズムでは戸田-Volterra対応が有効に用いられている。 $R_{II}$ -mKdV対応はこうした工学的にも重要と考えられる二つの力学系間の直接的な対応を与えるものであり、例えば一般化特異値計算アルゴリズムといったさらなる応用への道を拓く可能性のあるもので、重要な結果であると言える。

以上のように、本論文は直交多項式と離散可積分系、さらには箱玉系や数値計算アルゴリズムとの対応理論を深め、工学的な応用として高速・高精度な行列の一般化固有値計算アルゴリズムを与えており、直交多項式、離散可積分系、超離散可積分系、数値解析といった分野の個々の、さらには分野融合的な発展に大きく寄与するものである。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。また、平成26年2月5日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。

注) 論文審査の結果の要旨の結句には、学位論文の審査についての認定を明記すること。  
更に、試問の結果の要旨(例えば「平成 年 月 日論文内容とそれに関連した

口頭試問を行った結果合格と認めた。」) を付け加えること。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公開可能とする日付を記入すること。

要旨公開可能日：          年      月      日以降