2035

平成23年度日本建築学会
近畿支部研究発表会

# ARXモデルと伝達関数極限値を用いた曲げせん断型モデルの剛性・減衰同定法

正会員 ○桑原誠[*1] 同 吉富信太[*2] 同 中村尚弘[*3] 同 竹脇出[*2]

2.構造―2.振動
**システム同定, 構造ヘルスモニタリング, 物理パラメター同定, 曲げせん断モデル, ARX モデル**

## 1. 序

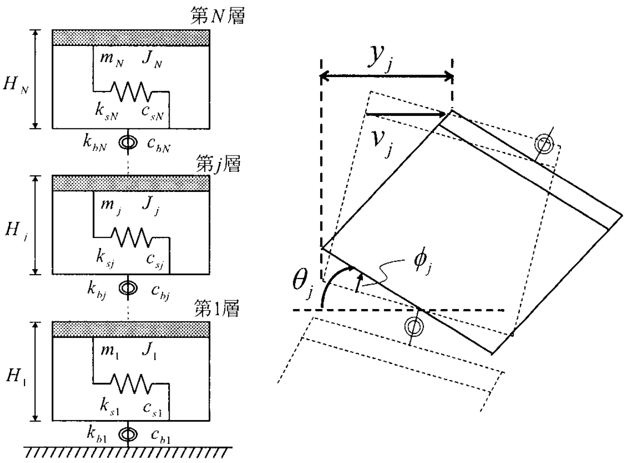
建築構造分野におけるシステム同定は、現実の構造物と設計モデルの対応を明らかにする技術として、またその需要が増しつつある構造ヘルスモニタリングの主要な技術として、その重要性は高まりつつある。既往の同定法の多くは、文献1)～3)で用いられているように、建物の同定モデルとしてせん断モデルを用いている。しかし、高層建物では、建物全体の曲げを考慮したモデル化が必要不可欠である。

本研究の目的は、建物全体の曲げを考慮した曲げせん断型モデルを用いた場合の、せん断剛性、回転剛性、減衰係数、回転減衰の４つの物理パラメターを直接同定する手法を提案することである。同定に際しては伝達関数の振動数ゼロの極限値を用いる。その極限値を決める際の低振動数域での伝達関数の乱れの課題に対し、ARXモデルを用いた伝達関数の平滑化を試みる。更に、物理パラメターとARXパラメターの関係を導き、極限操作を経ずにARXパラメターから直接同定を行う手法を提案する。

## 2. 同定理論

### 2.1 提案手法の概要

本論文では、既往の同定法で用いられているせん断型モデルとは異なり、図１のような線形弾性剛性、線形粘性減衰、回転剛性、回転減衰を有する$N$層曲げせん断型モデル用いた同定法を提案する。このモデルは建物全体の曲げを各層に付加された回転ばねにより評価し、せん断ばねと回転ばねを直列配置したモデルである。節点及び要素番号を建物最下層から順次付与することとし、図１のモデルにおける諸量をそれぞれ次のようなパラメターを用いて表すこととする。ただし、大文字は各成分のフーリエ変換を表し、$\ddot{u}_g$は地動加速度を表す。




(a) 全体図　　(b) 第$j$層変形図

図１　$N$層曲げせん断型モデル

$$\left(\begin{array}{l} m:\text{質量}\quad J:\text{回転慣性}\quad c_s:\text{減衰係数}\quad c_b:\text{回転減衰} \\ k_s:\text{せん断剛性}\quad k_b:\text{回転剛性}\quad H:\text{高さ}\quad y:\text{相対変位} \\ v:\text{せん断変形}\quad \theta:\text{床回転角}\quad \phi:\text{層間相対床回転角} \end{array}\right)$$

これらを用いると、図１のようなモデルの運動方程式は(1)式のように表され、伝達関数$\mathbf{G}(\omega)$は(2)式のように表すことができる。

$$\left[-\omega^2\mathbf{M}+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right]\mathbf{U}(\omega)=-\mathbf{Mr}\ddot{U}_g(\omega) \tag{1}$$

$$\mathbf{G}(\omega)=\mathbf{U}/\ddot{U}_g=-\left[-\omega^2\mathbf{M}+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right]^{-1}\mathbf{Mr} \tag{2}$$

ただし、各行列は以下のような成分をもつ。

$$\mathbf{M}=diag(m_1,\cdots,m_N \mid J_1,\cdots,J_N) \tag{3}$$

$$\mathbf{C}=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
c_{s1}+c_{s2} & -c_{s2} & & \mathbf{0} & -H_1c_{s1} & H_2c_{s2} & & \mathbf{0} \\
-c_{s2} & \ddots & \ddots & & 0 & -H_2c_{s2} & \ddots & \\
 & \ddots & c_{sN-1}+c_{sN} & -c_{sN} & & & \ddots & H_Nc_{sN} \\
\mathbf{0} & & -c_{sN} & c_{sN} & \mathbf{0} & & 0 & -H_Nc_{sN} \\
\hline
-H_1c_{s1} & 0 & & \mathbf{0} & H_1^2c_{s1}+c_{b1}+c_{b2} & -c_{b2} & & \mathbf{0} \\
H_2c_{s2} & -H_2c_{s2} & & & -c_{b2} & \ddots & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & 0 & & \ddots & H_{N-1}{}^2c_{sN-1}+c_{bN-1}+c_{bN} & -c_{bN} \\
\mathbf{0} & & H_Nc_{sN} & -H_Nc_{sN} & \mathbf{0} & & -c_{bN} & H_N{}^2c_{sN}+c_{bN}
\end{array}\right] \tag{4}$$

Stiffness-damping identification of bending-shear model using ARX model and limit value of transfer function
KUWABARA Makoto, YOSHITOMI Shinta, NAKAMURA Naohiro and TAKEWAKI Izuru

$$
\mathbf{K}=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
k_{s1}+k_{s2} & -k_{s2} & & \mathbf{0} & -H_1k_{s1} & H_2k_{s2} & & \mathbf{0} \\
-k_{s2} & \ddots & \ddots & & 0 & -H_2k_{s2} & \ddots & \\
 & \ddots & k_{sN-1}+k_{sN} & -k_{sN} & & & \ddots & H_Nk_{sN} \\
\mathbf{0} & & -k_{sN} & k_{sN} & \mathbf{0} & & 0 & -H_Nk_{sN} \\
\hline
-H_1k_{s1} & 0 & & \mathbf{0} & H_1^2k_{s1}+k_{b1}+k_{b2} & -k_{b2} & & \mathbf{0} \\
H_2k_{s2} & -H_2k_{s2} & & & -k_{b2} & \ddots & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & 0 & & \ddots & H_{N-1}{}^2k_{sN-1}+k_{bN-1}+k_{bN} & -k_{bN} \\
\mathbf{0} & & H_Nk_{sN} & -H_Nk_{sN} & \mathbf{0} & & -k_{bN} & H_N{}^2k_{sN}+k_{bN}
\end{array}\right] \tag{5}
$$

$$\mathbf{r}=\{1,\cdots,1 \mid 0,\cdots,0\}^T \tag{6}$$

$$\mathbf{U}(\omega)=\{Y_1,\cdots,Y_N \mid \Theta_1,\cdots,\Theta_N\}^T \tag{7}$$

## 2.2 1層曲げせん断型モデルにおける同定式

(1)式で$N=1$とした場合の1層モデルを考える。伝達関数の水平成分、回転成分をそれぞれ$\omega=0$周りでテイラー展開すると次式を得る。

$$\frac{V_1}{\ddot{U}_g}=-\frac{m_1}{k_{s1}}+\frac{m_1c_{s1}}{k_{s1}{}^2}i\omega+\left(\frac{m_1J_1}{k_{s1}k_{b1}}+\frac{m_1c_{s1}}{k_{s1}{}^2}\cdot\frac{c_{s1}k_{b1}+k_{s1}c_{b1}}{k_{s1}k_{b1}}\right)\omega^2+\cdots \tag{8}$$

$$\frac{\Phi_1}{\ddot{U}_g}=-\frac{m_1H_1}{k_{b1}}+\frac{m_1H_1c_{b1}}{k_{b1}{}^2}i\omega+\left(\frac{m_1H_1c_{s1}}{k_{b1}{}^2}\cdot\frac{c_{s1}k_{b1}+k_{s1}c_{b1}}{k_{s1}k_{b1}}\right)\omega^2+\cdots \tag{9}$$

(8)、(9)式の実部および虚部の導関数の振動数ゼロ極限をとることで、同定式(10)～(13)を得る。

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{V_1}{\ddot{U}_g}\left(=\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{\frac{V_1}{\ddot{U}_g}\right\}\right)=-\frac{m_1}{k_{s1}} \tag{10}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\Phi_1}{\ddot{U}_g}\left(=\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{\frac{\Phi_1}{\ddot{U}_g}\right\}\right)=-\frac{m_1H_1}{k_{b1}} \tag{11}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{V_1}{\ddot{U}_g}\right)\right\}=\frac{m_1c_{s1}}{k_{s1}{}^2} \tag{12}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{\Phi_1}{\ddot{U}_g}\right)\right\}=\frac{m_1H_1c_{b1}}{k_{b1}{}^2} \tag{13}$$

## 2.3 多層曲げせん断型モデルにおける推測同定式

前節の1層モデルの同定式導出と同様に、2層モデルの同定式を導出した結果から、$N$層モデルの同定式を次式のように推測する。この推測の妥当性については、3.1節において振動数領域のシミュレーションを行い、その振動数ゼロ極限の結果により検証する。

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{\frac{V_j}{\ddot{U}_g}\right\}=-\frac{\sum_{i=j}^{N}m_i}{k_{sj}} \tag{14}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{\frac{\Phi_j}{\ddot{U}_g}\right\}=-\frac{\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}{k_{bj}} \tag{15}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{V_j}{\ddot{U}_g}\right)\right\}=\frac{c_{sj}\sum_{i=j}^{N}m_i}{k_{sj}{}^2} \tag{16}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{\Phi_j}{\ddot{U}_g}\right)\right\}=\frac{c_{bj}\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}{k_{bj}{}^2} \tag{17}$$

## 2.4 ARXパラメターを用いた物理パラメターの表現

前節で提案した同定式は伝達関数の極限値を用いるため、実際の観測データから同定を行う際に低振動数域でのばらつきが問題となる。本節では、この困難点を克服する為にARXモデルを利用する。また、伝達関数をテイラー展開し、建物の物理パラメターをARXパラメターによって表現することを考える。

地動加速度$\ddot{u}_g(t)$と各層の$v_j(t),\phi_j(t)$が観測されれば、ARXパラメター$a_k,b_k(k=1,\cdots,n)$を用いて伝達関数は次式のように表現される。ただし、$T_0$はサンプリング周期である。

$$G(\omega)=\frac{b_1e^{-i\omega T_0}+\cdots+b_ne^{-ni\omega T_0}}{1+a_1e^{-i\omega T_0}+\cdots+a_ne^{-ni\omega T_0}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}b_ke^{-ki\omega T_0}}{1+\sum_{k=1}^{n}a_ke^{-ki\omega T_0}} \tag{18}$$

次に、(18)式で表現された伝達関数の$\omega=0$周りのテイラー展開を考える。

$$G(\omega)=A_0+A_1\omega+A_2\omega^2+\cdots \tag{19}$$

$$A_0=\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k}{1+\sum_{k=1}^{n}a_k} \tag{20}$$

$$A_1=\frac{-iT_0\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\left(n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)b_k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\right\}}{\left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2} \tag{21}$$

これらは水平・回転成分ごとにそれぞれ決まるので、水平・回転成分の伝達関数$G(\omega)^H$, $G(\omega)^R$として、別々に表現する。

(19)～(21)式により、ARXパラメターで表現された新たなパラメター$A_0,A_1,\cdots$を水平・回転成分ごとに用いることにより、(14)～(17)式へ代入して各物理パラメターは次式のように表される。

$$k_{sj}=-\frac{\sum_{i=j}^{N}m_i}{\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{G(\omega)^H\right\}}=-\frac{\sum_{i=j}^{N}m_i}{A_0{}^H} \tag{22}$$

$$k_{bj}=-\frac{\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}{\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left\{G(\omega)^R\right\}}=-\frac{\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}{A_0{}^R} \tag{23}$$

$$c_{sj}=\frac{\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left[\mathrm{Im}\left\{G(\omega)^H\right\}\right]k_{sj}{}^2}{\sum_{i=j}^{N}m_i}=\frac{\sum_{i=j}^{N}m_i}{\left(A_0{}^H\right)^2}A_1{}^H \tag{24}$$

$$c_{bj}=\frac{\lim_{\omega\to 0}\frac{d}{d\omega}\left[\mathrm{Im}\left\{G(\omega)^R\right\}\right]k_{bj}{}^2}{\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}=\frac{\sum_{l=j}^{N}\left(\sum_{i=l}^{N}m_i\right)H_l}{\left(A_0{}^R\right)^2}A_1{}^R \tag{25}$$

## 3. 数値シミュレーションによる検証

### 3.1 振動数領域のシミュレーションを用いた検証

2.3 節において推測した多層モデルに対する同定式 (14)～(17) の妥当性を検証する。ここでは表１に示すような諸量をもつ４層モデルを用いて振動数領域のシミュレーションを行う。せん断剛性は１次固有周期0.4秒で逆三角１次モードになるせん断モデルの剛性を用い、１次の減衰定数は 1.37% (剛性比例) に設定した。また、回転剛性は現実的なものとして設定した。

表１　４層モデル諸量

| 層 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $m[kg]$ $(\times 10^4)$ | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 |
| $J[kgm^2]$ $(\times 10^4)$ | 3.41 | 3.41 | 3.41 | 3.41 |
| $k_s[N/m]$ $(\times 10^7)$ | 3.16 | 2.84 | 2.21 | 1.26 |
| $k_b[Nm/rad]$ $(\times 10^9)$ | 2.38 | 2.14 | 1.67 | 0.95 |
| $c_s[Ns/m]$ $(\times 10^4)$ | 8.04 | 7.24 | 5.63 | 3.22 |
| $c_b[Nms/rad]$ $(\times 10^6)$ | 6.06 | 5.46 | 4.24 | 2.42 |
| $H[m]$ | 4.00 | 4.00 | 4.00 | 4.00 |

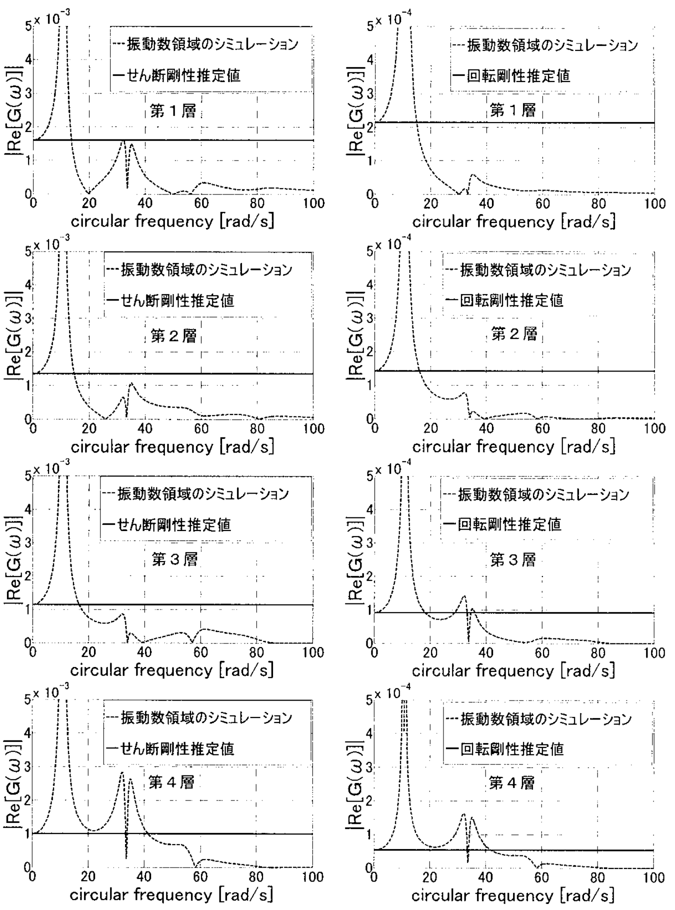



図２　伝達関数実部の絶対値と剛性推測値

図２では振動数ゼロ付近でシミュレーションのグラフと推測値が一致しており、図３では振動数ゼロ付近でシミュレーションのグラフの傾きと推測値の傾きが一致していることが分かる。つまり、推測値は妥当な値であると考えられる。

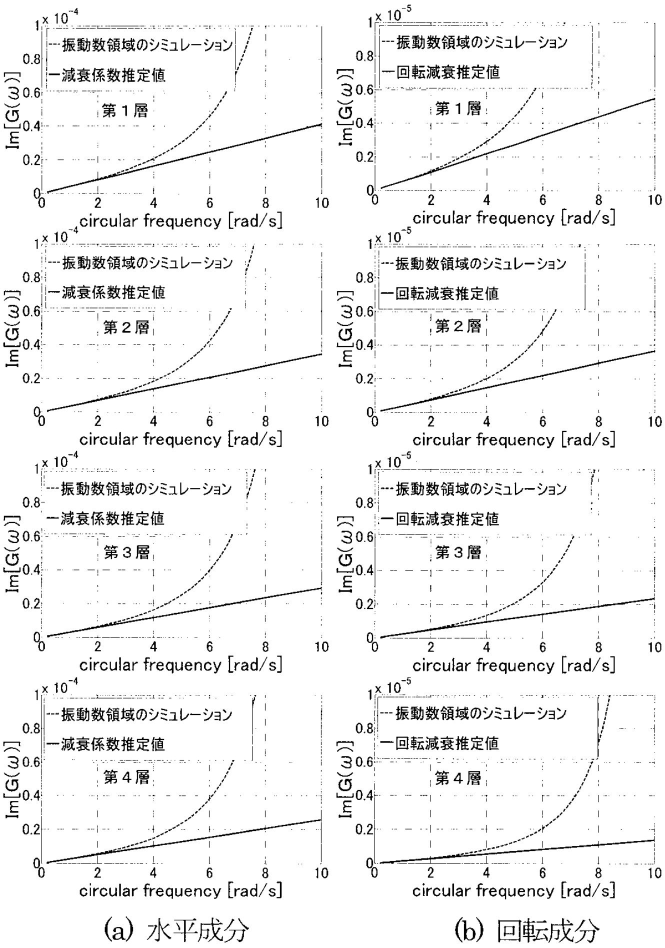



図３　伝達関数虚部と減衰推測値

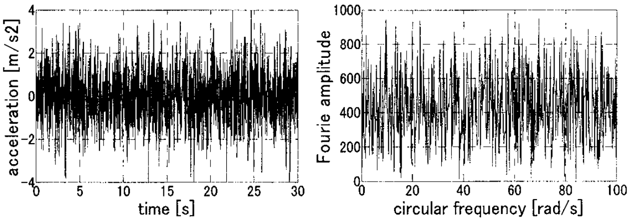
更に、モデル諸量を種々変化させて検証した結果、いずれの場合も今回と同様、妥当な結果を得た。

### 3.2 時刻歴応答データを用いた検証（剛性）

次に、前節と同様の４層モデルに対し、図４のようなランダム波を入力した際の時刻歴解析を行い、得られた時刻歴データを用いたシミュレーションを行う。

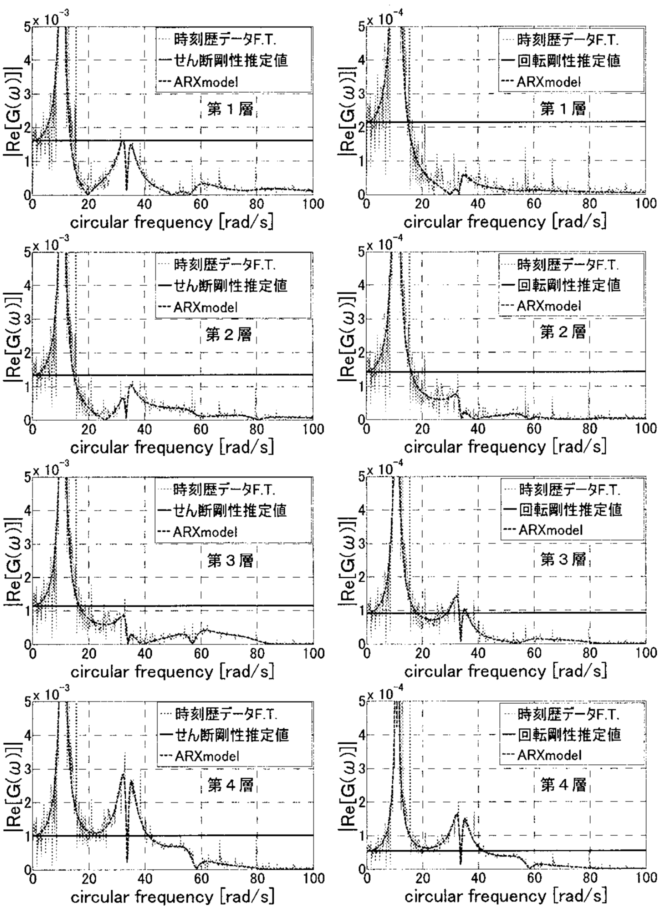
また、この時刻歴データに対し ARX モデルを用いることで伝達関数の平滑化を試みたシミュレーション結果も併せて示す。(ARX モデル次数は 200)

図５より、剛性については時刻歴データによる検証でも良好な精度を保っている。また、低振動数域の乱れの問題に対し、ARX モデルを用いることは有効な手段であると考えられる。一方、減衰については、１次固有振動数周辺における half-power 法により、１次減衰定数が約 1.4%（設定値 1.37%）となることを明らかにした。




(a) 時間領域波形　(b) 振動数領域波形

図４　入力波




(a) 水平成分　(b) 回転成分

図５　伝達関数実部の絶対値

## 4. 水平加速度を用いた同定

せん断型モデルに対して参考文献１）で導入された同定関数に、本論文で導出した式を用いることにより、曲げせん断型モデルに対して水平加速度応答を含む次のような式(26)を得る。

$$f_j(\omega)=\frac{-\omega^2\sum_{i=j}^{N}m_i}{\dfrac{\ddot{U}_g+\ddot{Y}_{j-1}}{\ddot{U}_g+\ddot{Y}_j}-1} \tag{26}$$

式(26)の振動数$\omega=0$の極限値を各層毎に求め、せん断剛性と回転剛性の比率を用いることにより、剛性を第１層から順次同定することが可能である。

## 5. 結論

(1) 構造物の曲げを各層に付加した回転ばねにより評価し、せん断ばねと回転ばねを直列させる曲げせん断型モデルの定式化を行った。

(2) １層曲げせん断型モデルにおいて、地動加速度に対する各層のせん断変形および層間相対床回転角の伝達関数の$\omega=0$周りにおけるテイラー展開から、ゼロ振動数における極限値と、各物理パラメターの関係式を導出した。

(3) １層曲げせん断型モデルの同定式から多層曲げせん断型モデルにおける同定式を推測した。

(4) 伝達関数の$\omega=0$周りにおけるテイラー展開の各係数とARXパラメターの間の関係と、各物理パラメターの同定式の関係から、剛性・減衰の物理パラメターが、ARXパラメターにより表現できることを明らかにした。

(5) 推測した多層曲げせん断型モデルの同定式の妥当性を、振動数領域のシミュレーションにより検証した。

(6) 振動数ゼロ付近でのばらつきが大きい時刻歴データの場合には、ARXモデルを適用して伝達関数を平滑化することが効果的であることを明らかにした。

(7) せん断型モデルと同様の同定関数に本論文の式を用いることにより、水平加速度応答を利用した同定が可能であることを示した。

## 参考文献

1) 中村充，竹脇出，安井譲，上谷宏二，限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定，構造系論文集，28，75-82，2000．2．

2) 前田朋宏，限定された観測データを用いたARXモデルによる建物の剛性・減衰同定法，京都大学修士論文，2011．2．

3) F.E.Udwadia,D.K.Sharma,P.C.Shah, Uniqueness of damping and stiffness distributions in the identification of soil and structural systems, *J. Appl. Mech.*, **45**, 181-187, 1978.3.

＊1 京都大学大学院　大学院生　Graduate Student, Kyoto Univ.
＊2 京都大学大学院　工学研究科建築学専攻　Graduate School of Eng., Kyoto Univ.
＊3 竹中工務店　技術研究所　R&D Institute, Takenaka Corp.