2013

平成23年度日本建築学会
近畿支部研究発表会

曲げせん断型建物モデルの H^{∞} ノルムを最小化するパッシブダンパーの最適配置

正会員 ○山本薫[*1] 同 藤田皓平[*2] 同 竹脇出[*3]

2.構造—2.振動
H^{∞} ノルム, 伝達関数, 最適ダンパー配置, 振動制御, 逐次２次計画法

1. 序

パッシブ制振構造を採用する建物においては，ダンパー配置によりその応答が異なるため，ダンパーを適正に配置することはダンパーの有効活用及び経済性の観点から極めて重要である．従来の最適ダンパー配置法に関する研究の多くはある特定の入力に対する建物の応答を評価基準として用いている[1]．しかし，個別の入力により最適なダンパー配置が異なるため，あらゆる入力に対する最適性は保証されない．また，建物は多くの不確定要素を含んだ地震動を受けるため[2]，これらの不確定要素を考慮に入れた設計を行う必要がある．

本研究では，建物への入力から出力に至る伝達関数行列の H^{∞} ノルムを評価関数とする。H^{∞} ノルムは全周波数域における伝達関数行列の最大特異値の上限値を示す．最大特異値はすべての入力に対する出力の最大の増幅率を表すので，H^{∞} ノルムを低減することは，構造物にとって最悪な入力に対する振動を抑制することを意味し，上記の不確定要素を有する入力に対しても有効である．最適化手法には逐次２次計画法を用いる．

著者らはこれまでに，せん断型建物モデルにおいて H^{∞} ノルムを最小化する最適ダンパー配置法を提案している[3]．しかし，アスペクト比が大きな建物などでは，水平外力を受けた時の変形は曲げ変形が支配的となる．このような場合を考慮するため，本研究では曲げせん断型モデルにおける H^{∞} ノルム最小化ダンパー配置法を提案する．

2. 運動方程式と H^{∞} ノルム

付加ダンパーを有する N 層曲げせん断型建物モデルを考える（図 1）．このモデルに地動加速度 $\ddot{u}_g$ が作用したときの運動方程式は次式で表される[4]．

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) & \text{(1a)} \\ \mathbf{d}(t) = \mathbf{H}_0\mathbf{u}(t) & \text{(1b)} \end{cases}$$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 及び $\mathbf{r}$ は，それぞれ質量行列，減衰行列，剛性行列及び影響係数ベクトルであり，次のように表される．

$$\mathbf{M} = diag(m_1 \cdots m_N \quad J_1 \cdots J_N) \tag{2a}$$

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_1+k_2 & -k_2 & & \mathbf{0} & k_2h_2 & & & \mathbf{0} \\ -k_2 & \ddots & \ddots & & -k_1h_1 & \ddots & & \\ & \ddots & k_{N-1}+k_N & -k_N & & \ddots & k_Nh_N & \\ \mathbf{0} & & -k_N & k_N & \mathbf{0} & & -k_Nh_N & 0 \\ \hline k_2h_2 & -k_2h_N & & \mathbf{0} & s_1+s_2+k_2h_2^2 & -s_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & -s_2 & \ddots & \ddots & \\ & & k_Nh_N & -k_Nh_N & & \ddots & s_{N-1}+s_N+k_Nh_N^2 & -s_N \\ \mathbf{0} & & & 0 & \mathbf{0} & & -s_N & s_N \end{array}\right] \tag{2b}$$

$$\mathbf{r} = \{1 \quad \cdots \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\}^T \tag{2c}$$

ここで，m_i，J_i，k_i，s_i 及び h_i $(i=1,\cdots,N)$ は，それぞれ第 i 層における質量，回転慣性，せん断剛性，回転剛性及び階高である．

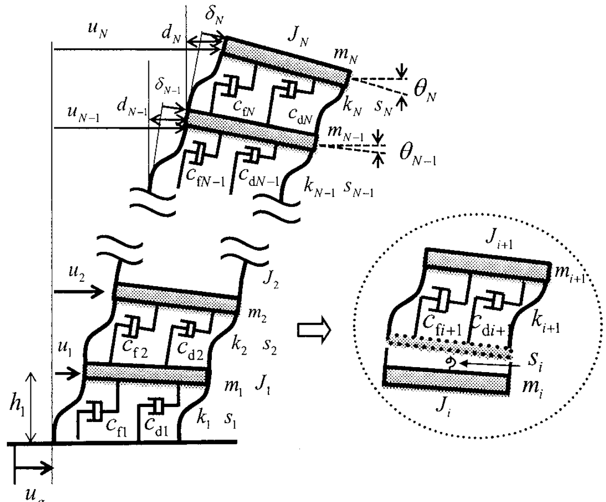


図 1. N 層せん断型構造物モデル

H^{∞} Optimization in Damper Placement for Interstory Control of Bending-shear Building Model
YAMAMOTO Kaoru, FUJITA Kohei, and TAKEWAKI Izuru

減衰行列$\mathbf{C}$は，構造減衰行列$\mathbf{C}_{\mathrm{f}}$とダンパーによる付加減衰行列$\mathbf{C}_{\mathrm{d}}$の和であり，次式で表される．

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_{\mathrm{f}}+\mathbf{C}_{\mathrm{d}}, \tag{3a}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{f}}=\frac{2\zeta}{\omega_1}\mathbf{K}, \tag{3b}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{d}}=$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{\mathrm{d}1}+c_{\mathrm{d}2} & -c_{\mathrm{d}2} & & \mathbf{0} & c_{\mathrm{d}2}h_2 & & & \mathbf{0} \\ -c_{\mathrm{d}2} & \ddots & \ddots & & -c_{\mathrm{d}1}h_1 & \ddots & & \\ & \ddots & c_{\mathrm{d}9}+c_{\mathrm{d}10} & -c_{\mathrm{d}10} & & \ddots & c_{\mathrm{d}10}h_{10} & \\ \mathbf{0} & & -c_{\mathrm{d}10} & c_{\mathrm{d}10} & \mathbf{0} & & -c_{\mathrm{d}10}h_{10} & 0 \\ \hline c_{\mathrm{d}2}h_2 & -c_{\mathrm{d}2}h_{10} & & \mathbf{0} & c_{\mathrm{d}2}h_2^2 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & c_{\mathrm{d}10}h_{10} & -c_{\mathrm{d}10}h_{10} & & & c_{\mathrm{d}10}h_{10}^2 & \\ \mathbf{0} & & & 0 & \mathbf{0} & & & 0 \end{array}\right] \tag{3c}$$

ここで，ζ及びω_1は骨組の構造減衰としての1次減衰定数及び1次固有円振動数であり，$c_{\mathrm{d}i}$は第i層におけるダンパーによる付加減衰係数である．

変位ベクトル$\mathbf{u}(t)=\{u_1 \ \cdots \ u_N \ \ \theta_1 \ \cdots \ \theta_N\}^T$は，地動変位に対する各層の相対水平変位$u_i$及び各層の床回転角$\theta_i$を成分とするベクトルである．$\mathbf{d}(t)=\{d_1 \cdots d_N\}^T$は層間変位ベクトルである．ここで層間変位とは，図1におけるd_iを意味し，床面の回転による水平変位成分δ_iを含む層間相対変位を表す．$\mathbf{H}_0$は変位ベクトル$\mathbf{u}$を層間変位ベクトル$\mathbf{d}$に変換する行列であり，次のように表される．

$$\mathbf{H}_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

状態ベクトル$\mathbf{x}(t)$を，$\mathbf{x}(t)=\{\mathbf{u}(t)^T \ \ \dot{\mathbf{u}}(t)^T\}^T$と置き，(1a,b)式を状態方程式に変換すると次式を得る．

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}w(t) \tag{5a}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{H}\mathbf{x}(t) \tag{5b}$$

ここで，

$$\mathbf{y}=\mathbf{d},\ w=\ddot{u}_g$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} \end{bmatrix},\ \mathbf{H}=\begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

また，このシステムの伝達関数行列$\mathbf{T}(s)$は次式で表される．

$$\mathbf{T}(s)=\mathbf{H}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \tag{7}$$

$s=\mathrm{i}\omega$はラプラスパラメターを表す．このとき，伝達関数行列$\mathbf{T}(s)$のH^∞ノルムは次式で定義される[5]．

$$\|\mathbf{T}\|_\infty=\sup_\omega \sigma_{\max}(\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega)) \tag{8}$$

ここで，$\sigma_{\max}(\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega))$は伝達関数行列（周波数応答関数行列）$\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega)$の最大特異値であり，最大固有値$\lambda_{\max}(\bullet)$を用いて次のように表される．

$$\sigma_{\max}(\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega))=\left\{\lambda_{\max}\left(\mathbf{T}^*(\mathrm{i}\omega)\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega)\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$(\bullet)^*$は複素係数行列の共役転置を表す．

3. 最適ダンパー配置

本研究では，付加ダンパーとして粘性ダンパーを扱う．付加ダンパーの総量がある上限値を超えないという条件の下で，以下の最適ダンパー配置問題を考える．

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{c}_\mathbf{d}} \ f(\mathbf{c}_\mathbf{d})=\|\mathbf{T}\|_\infty \\ &s.t. \ \ S(\mathbf{c}_\mathbf{d})\le \bar{c}_{\mathrm{total}} \\ &\qquad 0\le c_{\mathrm{d}i}\le \bar{c}_{\mathrm{d}i} \qquad (i=1,\cdots,N) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{c}_\mathbf{d}$，$S(\mathbf{c}_\mathbf{d})$，$\bar{c}_{\mathrm{total}}$及び$\bar{c}_{\mathrm{d}i}$はそれぞれ，付加ダンパー減衰係数ベクトル$\{c_{\mathrm{d}i}\}$，付加ダンパー総量（付加ダンパー減衰係数和），付加ダンパー総量の上限値，及び付加ダンパー減衰係数の上限値である．付加ダンパー総量$S(\mathbf{c}_\mathbf{d})$は次式で与えられる．

$$S(\mathbf{c}_\mathbf{d})=\sum_{i=1}^{N}c_{\mathrm{d}i} \tag{11}$$

本研究では，(10)式の制約付き非線形最適化問題を逐次２次計画法により解く[6]．

4. 数値例題

粘性ダンパーを有する10層曲げせん断型構造物モデルを考える（図1において$N=10$としたもの）．建物モデルの諸元を表1及び表2に示す．本手法の汎用性及び有効性を示すため，第1層から第5層まではRC造，第6層から第10層までは鉄骨造の建物を想定した．この建物モデルにおいて，付加

ダンパー総量の制約の下で，層間変位伝達関数のH^∞ノルムを最小化するダンパー配置を決定する．

付加ダンパー総量の上限値を$\bar{c}_{\mathrm{total}} = 6.64\times10^{7}\left[\mathrm{Ns/m}\right]$とし，各層の付加ダンパー減衰係数の上限値$\bar{c}_{di}$は$\bar{c}_{\mathrm{total}}$とする．付加ダンパー減衰係数ベクトルの初期値を$c_{di} = 6.64\times10^{6}\left[\mathrm{Ns/m}\right]\left(i=1,\cdots,10\right)$（各層一様配置）と設定し，逐次２次計画法を用いて(10)式のH^∞ノルム最小化問題を解く．図２はそのときの最適ダンパー配置解を示す．RC 造の最上層である第５層にはダンパーが配置されない結果となった．図３は，付加ダンパーを配置しない場合の層間変位伝達関数振幅と最大特異値を示す．また，図 4(a)，(b)は，付加ダンパーを図２に示される最適配置とした場合，及び各層一様配置とした場合の層間変位伝達関数振幅と最大特異値を示す．H^∞ノルムは付加ダンパーを配置しない場合は 0.412，最適配置の場合は0.0208，一様配置の場合は0.0217 であった．

図 5(a)-(d)は，粘性ダンパーを各層に一様に配置した建物モデル（uniform）及び図２に示される最適配置を有する建物モデル（optimal）に，様々な記録地震波を入力し，各層の最大層間変位応答をプロットしたものである．また，図 5(e)には，各地震波について，付加減衰なしの構造物モデルの最大層間変位応答を示した．これらの値はすべて時刻歴応答解析により得られたものである．図５から，ダンパーの適切な配置により，第５層から第６層における剛性の急変による建物動特性への悪影響を弱めることができていることがわかる．図3，図４及び図５から，本研究で提案した最適ダンパー配置法が極めて有効な方法であることがわかる．

表１　建物諸元

層数および階高 h_i	10 層，4 [m]
床面積	10 [m]×10 [m]
床質量（第 1~5 層）	1200 [kg/m²]
床質量（第 6~10 層）	800 [kg/m²]
骨組１次固有周期	1.05 [s]
骨組１次固有円振動数 ω_1	5.99 [rad/s]
各層回転慣性(第 1~5 層)	2.00×10^{6} [kg・m²]
各層回転慣性(第 6~10 層)	1.33×10^{6} [kg・m²]
構造減衰係数	剛性比例型減衰．１次減衰定数 ζ を 0.02 として決定
付加ダンパー総量 $\bar{c}_{\mathrm{total}}$	6.64×10^{7} [Ns/m]

表２　建物諸元

層数 i	せん断剛性 k_i [N/m]	回転剛性 s_i [N・m/rad]
1	4.07×10^{8}	1.92×10^{11}
2	4.00×10^{8}	1.88×10^{11}
3	3.85×10^{8}	1.81×10^{11}
4	3.63×10^{8}	1.71×10^{11}
5	3.33×10^{8}	1.57×10^{11}
6	0.877×10^{8}	0.413×10^{11}
7	0.746×10^{8}	0.351×10^{11}
8	0.592×10^{8}	0.279×10^{11}
9	0.417×10^{8}	0.196×10^{11}
10	0.219×10^{8}	0.103×10^{11}

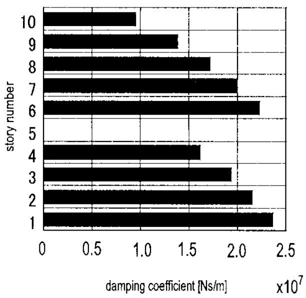


図２. 最適ダンパー配置

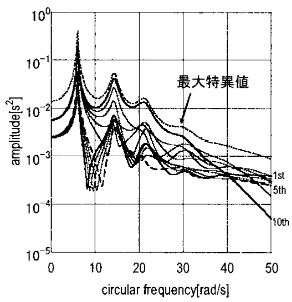
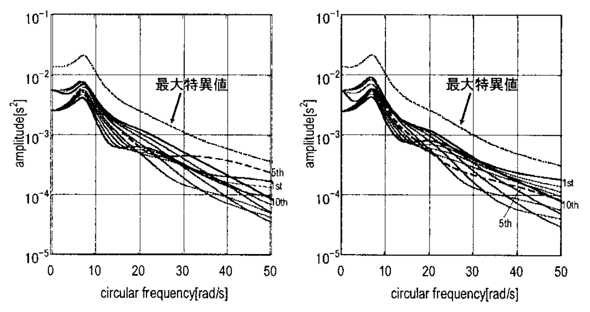
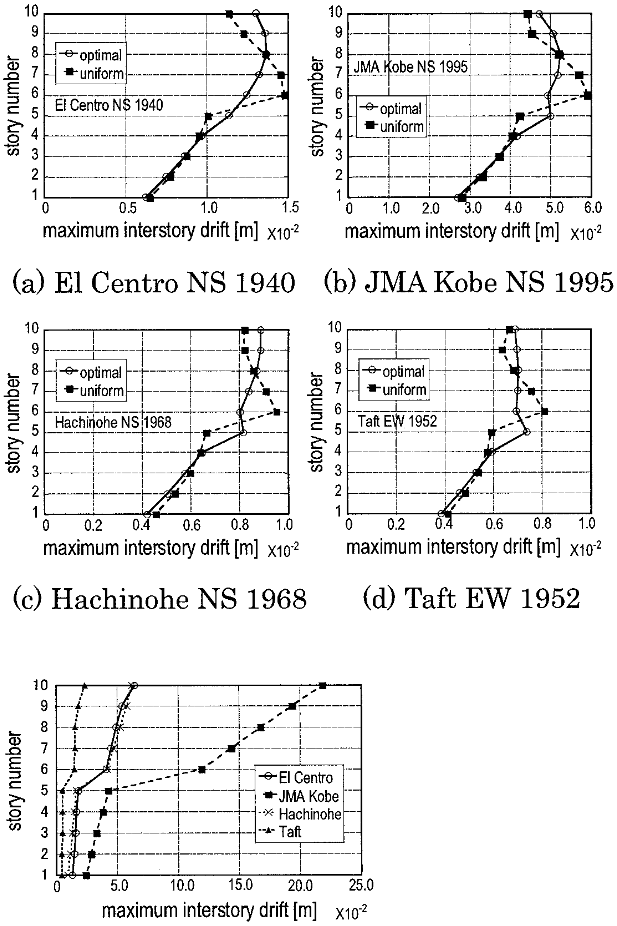


図３ 付加ダンパーを配置しない場合の層間変位伝達関数振幅と最大特異値



(a) 最適配置　　(b) 一様配置

図４　層間変位伝達関数振幅と最大特異値



(a) El Centro NS 1940　(b) JMA Kobe NS 1995

(c) Hachinohe NS 1968　(d) Taft EW 1952

(e) ダンパーを付加しないモデルの各地震波に対する応答

図 5　最適配置または一様配置を有するモデル及びダンパーを付加しないモデルの記録地震波に対する最大層間変位応答

5. 結論

本論文では，ダンパー総量を制約条件とし，伝達関数行列の H^∞ ノルムを評価関数とする最適ダンパー配置問題を，種々の構造物モデルに対して適用可能な形で定式化した．H^∞ ノルムは全周波数域における伝達関数行列の最大特異値の上限値を表す．H^∞ ノルム最小化設計法は入力の周波数帯域が広範にわたる場合に特に有効であり，本論文により提案された手法は，様々なタイプの地震動に対して有効である．得られた主な成果は以下の通りである．

(1) 本手法は，質量行列，減衰行列及び剛性行列を適切に設定することにより，様々な建物モデルを扱うことができる．さらに，出力ベクトル及び出力行列及び出力行列を適宜変更することにより，様々な応答に対する最適配置を見出すことが可能である．本論文では建物モデルとして曲げせん断型建物モデルを，出力として層間変位を扱った．

(2) 数値例題では，第 1 層から第 5 層までは RC 造，第 6 層から第 10 層までは鉄骨造の建物を曲げせん断型建物モデルにモデル化し，層間変位伝達関数の H^∞ ノルムを最小化する最適ダンパー配置解を得た．付加ダンパーを一様配置とした場合との比較や，種々の記録地震波に対する最大層間変位応答を示し，提案手法の有効性を示した．本手法によるダンパーの適切な配置により，第5層から第6層における剛性の急変による建物動特性への悪影響を弱めることができることを確認した．

謝辞　本研究の一部は日本学術振興会の科学研究費補助金による (No.21360267)．ここに記して謝意を表す．

参考文献

[1] I.Takewaki, *Building control with passive dampers: -Optimal performance-based design for earthquakes-*, John Wiley & Sons (Asia), Singapore, 2009.

[2] I.Takewaki, *Critical excitation methods in earthquake engineering*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] 山本　薫，藤田皓平，竹脇　出：層間変位及び加速度の伝達関数の H^∞ ノルムを最小化する粘性ダンパーの最適配置，日本建築学会大会梗概集，B-1 分冊，pp. 369-370, 2010.9.

[4] 竹脇　出，中村恒善：弾性支持された曲げ剪断型構造物モデルの混合型逆定式化による地震時変形制約設計，構造工学論文集，Vol. 39B, pp.105-118, 1993.

[5] 細江繁幸，荒木光彦編著，制御系設計―H_∞ 制御とその応用―，朝倉書店，1994.

[6] 福島雅夫，数理計画入門，朝倉書店，1996.

＊1 京都大学大学院　修士課程　Kyoto University, Graduate student

＊2 京都大学大学院　博士課程　Kyoto University, Graduate student, Mr. Eng.

＊3 京都大学　教授・工博　Prof., Kyoto University, Dr. Eng.