2014

平成23年度日本建築学会
近畿支部研究発表会

粘性ダンパーを有する制振構造物における不確定性を考慮したロバスト性評価法

正会員 ○藤田皓平[*1] 同 竹脇 出[*2]

2.構造—2.振動
インタバル解析，ロバスト性，不確定性，地震時応答限界，粘性ダンパー

1. はじめに

超高層建築構造物などの設計問題を考える上では，種々の制振技術を用いて地震や風外乱に対する構造物の安全性・使用姓を確保することが必須となりつつある。しかしながら，建築構造物は部材特性や施工精度などに起因し，少なからずばらつき(=不確定性)を有している。例えば，RC 構造のコンクリート弾性係数は，コンクリート強度に大きく依存する。通常は設計基準強度を下回らないように配慮するため，実際に発揮されるコンクリート強度には少なからぬばらつきがあるという調査報告がある。また，ダンパー等の制振装置が応答制御効果を十分に発揮するためには制振装置まわりの支持部材の設計にも留意する必要がある。従って支持部材の剛性のばらつきが制振性能に及ぼす影響を考慮することは重要である。

このような構造物パラメターの種々の不確定性を想定した上で，構造物の頑強さ（ロバスト性）を分析した研究には多数のものが存在する。本報では，粘性ダンパーを有する制振構造物に対して，ダンパー性能や骨組剛性などの種々のばらつきを想定した際の構造物応答のばらつきの上下限値を短時間・高精度で評価する解析法を提示する。本手法は，不確定パラメターに対するロバスト性評価のための有力な方法の一つであるインタバル解析法において Chen[1]らが提示した方法を拡張したものであるため，まず 2 節で従来のインタバル解析法の概要を示した上で，3 節では Chen らが提案した Taylor 展開を用いたインタバル解析法の成果を紹介する。

2. 従来のインタバル解析法の概要

インタバル解析法は，ばらつきを想定する構造物パラメター $\mathbf{X}=\{X_1,X_2,\cdots X_N\}$ の不確定性を上下限値が規定された N 次元の長方形領域となる非確率論的モデルで定義し，不確定パラメターの上下限値の組み合せに対して目的関数の上下限値を推定する方法である。不確定性を与える非確率論的モデルとしては凸モデル(=convex モデル)がよく知られているが，数学的扱いが困難である側面があり，構造設計においてロバスト性を容易に評価する方法として適切であるとは言い難い。本節ではインタバル解析法の基本的な概念を記す。

インタバル解析法において，ばらつきが想定される構造物パラメター $\mathbf{X}$ を次のように定義し，これをインタバル変数と称する。

$$\mathbf{X}^I=\left\{\left[X_i^c-\Delta X_i, X_i^c+\Delta X_i\right]\right\} \quad (i=1,\cdots,N_x) \tag{1}$$

ここに $(\ )^I$ はインタバル変数であることを示し，$[a,b]$ により当該変数の下限値 a および上限値 b が定義される。また，$(\ )^c$，ΔX および N_x は，それぞれ構造物パラメターのノミナル値，インタバル変数の変動幅およびインタバル変数の個数を表す。構造物パラメター $\mathbf{X}$ の関数である構造物応答(以下，目的関数 f)をインタバル変数として表わせば次式となる。

$$\begin{aligned} f^I(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}^I) \\ &= f\left([\underline{X}_1,\bar{X}_1],\cdots,[\underline{X}_{N_x},\bar{X}_{N_x}]\right) \end{aligned} \tag{2}$$

(2)式は，インタバル変数 $\mathbf{X}^I$ の端点の組み合せから目的関数 f の上下限値を見出した上で，それらの間の関数値の集合を意味する。これは通常のインタバル解析法では，目的関数 f の各変数に対する単調性を前提としているためであり，次の制約を満たすものと仮定している。

$$\left\{f(\mathbf{X}): X_i\in X_i^I, i=1,2,\cdots,N_X\right\}\subseteq f(X_1^I,X_2^I,\cdots,X_{N_X}^I) \tag{3}$$

(3)式は，構造物パラメター $\mathbf{X}$ が $\mathbf{X}$ の上下限値の変

Robustness evaluation method for uncertain building structures with viscous dampers using advanced interval analysis

FUJITA Kohei and TAKEWAKI Izuru

動領域内に存在する場合は，インタバル変数$\mathbf{X}^I$の端点の組み合せで評価される目的関数fの上下限値に内包されることを意味する。図1(a)および(b)は，インタバル変数が2つの場合を例に，目的関数の上下限値を与える不確定パラメターの組み合せにおける目的関数の単調性および非単調性の違いを図示したものである。図1(a)では，インタバル変数の端点の組み合せで評価される応答値の中に正解値が必ず含まれる。従って，各インタバル変数の上下限値の組み合せ（図1(a)では4通り）に対して逐次応答解析を実施することにより目的関数の上下限の変動幅の厳密解を得ることが可能である。しかしながら，このような端点の組み合せを総当りで調べる解法は，N_xが増大するとその組み合せ数（$=2^{N_x}$）が膨大となるため，現実問題として解くことは不可能である。さらに，目的関数が非単調性を有している場合(図1(b))には，インタバル変数の端点の組み合せのみで評価を行うのは適切ではない。

このような問題を解決することを目的とし，様々な方法が提案されている。Chenら[1]は，目的関数である固有値をTaylor展開の1次微係数および2次微係数の対角成分を用いて近似することにより，計算試行回数を大幅に低減した上でインタバル変数の端点における目的関数の上下限値を評価する方法を提示している。

しかしながら，目的関数の非単調性を考慮する場合は，一般的に逐次2次計画法や応答曲面法等を適用し，最適化問題に帰着させて解を求める必要があるため，通常のインタバル解析の範疇で目的関数の上下限値を評価することは困難である。

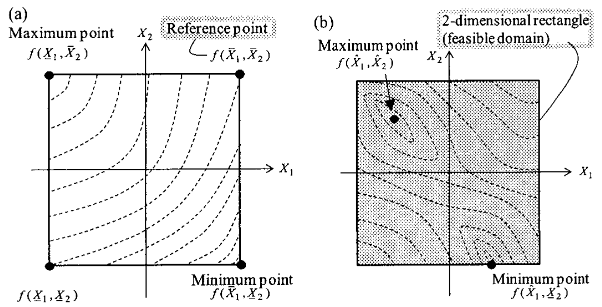

図1　不確定パラメターに対する目的関数の単調性および非単調性の違いによる目的関数の上下限値

3. Taylor展開に基づくインタバル解析法

インタバル解析法において，目的関数をTaylor展開による1次近似で表わす方法およびChenらが提示した2次近似を用いた方法について概説する。

3.1 1次近似によるインタバル解析法

Taylor展開による1次近似を用いれば，目的関数の上下限値は次式で求められる。

$$\bar{f}=f\left(\mathbf{X}^c\right)+\left|\sum_{i=1}^{N_x} f_{,X_i}\Delta X_i\right|,\quad \underline{f}=f\left(\mathbf{X}^c\right)-\left|\sum_{i=1}^{N_x} f_{,X_i}\Delta X_i\right| \tag{4a,b}$$

ここに$(\ )_{,X_i}$は，目的関数fの構造物パラメターX_iに対するノミナルモデルの基準点周りの1次感度$\partial f\left(\mathbf{X}\right)/\partial X_i\big|_{X_i=X_i^c}$を表す。

1次感度(=勾配ベクトル)を数値微分により評価する場合には，各インタバル変数についてノミナル値X_i^cまわりで微小増分dX_iを与えた上で応答解析を再度行う必要があるため，応答解析の負荷はN_xである。

3.2 2次近似によるインタバル解析法

Taylor展開による2次近似を用いて目的関数を近似することにより，ロバスト性評価の精度を向上できると期待される。2次微係数（Hessian行列）を数値微分により評価する場合の応答解析の負荷は，対角成分については$2N_x$であり，非対角成分は$3({N_x}^2-N_x)/2$となる。従って，Hessian行列のフルタームで評価することは，応答解析の負荷が大幅に増大するため不利である。そこで，Hessian行列の対角成分のみを用いて目的関数を近似することにすれば，次式となる。

$$f^{**}(\mathbf{X})=f(\mathbf{X}^c)+\sum_{i=1}^{N_x}\left\{f_{,X_i}(X_i-X_i^c)+\frac{1}{2}f_{,X_iX_i}(X_i-X_i^c)^2\right\} \tag{6}$$

ここに$(\ )_{,X_iX_j}$は，目的関数fの構造物パラメターX_iおよびX_jに対するノミナルモデルの基準点周りの2次感度$\partial^2 f\left(\mathbf{X}\right)/\partial X_i\partial X_j\big|_{X_i=X_i^c,X_j=X_j^c}$を表す。(6)式では，各インタバル変数$X_i$による目的関数の変動項$\Delta f_i\equiv f_{,X_i}(X_i-X_i^c)+f_{,X_iX_i}(X_i-X_i^c)^2/2$が独立している。従って，(6)式の上下限値を求めるためには，$\Delta f_i\ (i=1,\cdots,N_x)$の上下限値を逐次

評価した上でそれらを加えればよい。例えば，Δf_1 の上下限値は，Δf_1 をインタバル変数として表わすことにより求められ，次式となる。

$$\Delta f_1^I\left(X_1^I, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right) = \begin{bmatrix} \min\left[\Delta f_1\left(\bar{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right), \Delta f_1\left(\underline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right)\right], \\ \max\left[\Delta f_1\left(\bar{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right), \Delta f_1\left(\underline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right)\right] \end{bmatrix} \tag{7}$$

(7)式は，X_1 の上下限値に対して Δf_1 をそれぞれ評価すればよいことを意味する。1 次および 2 次微係数が既に得られていれば，Δf_1 を算定する負荷は数値微分に比べて遥かに小さい。従って，本節の方法における応答解析の負荷は，2 次微係数の導出時の数値微分が必要であるため $3N_x$ となる。

4. 評価関数の非単調性を考慮した上下限値探索によるインタバル解析法

前節までの既往の方法では，インタバル変数の端点で目的関数が最大・最小となるという目的関数の単調性を仮定している。また，目的関数を Taylor 展開近似で評価するため，不確定性の度合いが大きい場合や目的関数そのものが非単調性を有する場合には得られる結果に相当な誤差が含まれる可能性がある。本節では，目的関数の非単調性を考慮するインタバル解析法について提示する。

構造物パラメターのばらつきに対して目的関数 f を最大化（もしくは最小化）する構造物パラメターの分布を推定することができれば，時刻歴応答解析による再解析を実施することで構造物の応答に関するロバスト性を高精度に評価することが可能である。ここでは，2 次微係数までを用いた Taylor 展開により近似された目的関数 f の極値を与える構造物パラメターを見出すことを考える。

インタバル変数 X_i に対する目的関数の変動項 $\Delta f(X_i)$ において，$X_i - X_i^c$ を未知変数 $dX_i \in \Delta X_i$ と見なせば，$\Delta f(X_i)$ は次式で表わされる。

$$\Delta f_i\left(dX_i\right) = \frac{1}{2} f_{,X_i X_i}\left(dX_i + \frac{f_{,X_i}}{f_{,X_i X_i}}\right)^2 - \frac{f_{,X_i}{}^2}{2 f_{,X_i X_i}} \tag{8}$$

ここで $\Delta f_i(dX_i)$ は dX_i に関する 2 次曲線となっており，Δf_i が最大もしくは最小となる場合のインタバル変数 dX_i を陽に導くことが可能である。例えば，$f_{,X_i X_i} < 0$ の場合では，Δf_i の上限値を与えるインタバル変数 X_i は次のように求められる。

$$dX_i = \begin{cases} X_c - \alpha & \left(\alpha \le \Delta X_i\right) \\ X_c - \Delta X_i & \left(-\alpha \ge 0, \alpha > \Delta X_i\right) \\ X_c + \Delta X_i & \left(-\alpha < 0, \alpha > \Delta X_i\right) \end{cases} \tag{8}$$

ここに，α は $f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}$ である。$f_{,X_i}$ および $f_{,X_i X_i}$ を評価する方法としては，ノミナルモデルにおける基準点を固定し基準点周りで算定する方法が考えられるが，対象とする X_i 以外の不確定パラメターがノミナル値であるためインタバル変数の相互関係を考慮することが困難である。

本報では，各次の感度を評価する基準点を随時更新する方法(=Updated Reference Point 法)を提示する。目的関数の上限値を評価する URP 法のフローは以下の通りである。また，図 2 に URP 法の概略図を示す。

- Step1 目的関数のノミナルモデルにおける基準点周り勾配ベクトルを算定する。
- Step2 勾配ベクトルの絶対値 $\left|f_{,Xi}\right| \left(i = 1, \cdots, N_x\right)$ を降順に並び替える。対応するインタバル変数を $\mathbf{X}_\mathrm{A} = \{X_{\mathrm{A1}}, \cdots, X_{\mathrm{A}N_x}\}$ とする。
- Step3 X_{A_k} に対する 2 次感度 $f_{,X_{Ak} X_{Ak}}$ (=スカラー量)を算定する。$k \ge 2$ の場合には評価点を更新しているため X_{A_k} に対する 1 次感度 $f_{,X_{Ak}}$ も再評価する。
- Step4 $\Delta f_k\left(X_{A_k}\right)$ を最大化する $\hat{X}_{A_k}$ を導く。
- Step5 インタバル変数 X_{A_k} を現状の値から $\hat{X}_{A_k}$ に変更し，評価点を更新する。対応するシステム行列(例えば $\mathbf{C}$ や $\mathbf{K}$)を更新する。
- Step6 $k = k + 1$ とし，$k = N_x$ まで Step3 から Step6 を繰り返す。
- Step7 全てのインタバル変数を更新後に，再解析により目的関数の上限値を評価する。

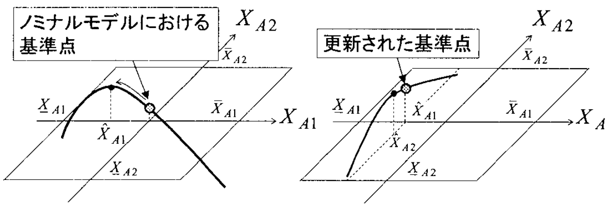

図 2　URP 法の概略図(目的関数の上限値)

5. 数値解析によるURP法の精度検証

本節では，支持部材の影響を考慮した粘性ダンパーを有する20層制振構造物を考え，代表的な記録地震波に対する頂部水平変位に関するインタバル解析を実施する。表1に構造物諸元を記す。URP法の精度検証を目的とし，種々の方法(Taylor展開による1次近似，2次近似，正解値)との比較を行う。なお正解値は，原問題を最適化問題に帰着させ，ノミナルモデルを初期値とした逐次2次計画法により評価する。入力地震波は，最大速度50kineで基準化したEl Cetnro NS(1940), Taft EW(1952)およびHachinohe NS (1968)とする。

不確定パラメターは，層剛性$\mathbf{k}_f$，支持部材剛性$\mathbf{k}_b$，粘性ダンパーの減衰係数$\mathbf{c}_D$および構造減衰係数$\mathbf{c}_f$とし，インタバル変数$\mathbf{X}^I$を(9)式で表わす。不確定パラメターの変動幅については，$\mathbf{k}_f$が±10%，$\mathbf{k}_b^I$，$\mathbf{c}_D^I$および$\mathbf{c}_f^I$は±30%とする。

$$\mathbf{X}^I = \{\mathbf{k}_f^I, \mathbf{k}_b^I, \mathbf{c}_D^I, \mathbf{c}_f^I\}^T \tag{9}$$

図3は，種々の方法で評価した不確定パラメターに対する目的関数のばらつきの上下限とノミナル値を比較したものである。図より，URP法により得られる目的関数の上下限値は，正解値と良好に一致することが確認できる。また，図4は，各方法で得られた目的関数の上限値に対応するインタバル変数の分布を図示したものである。URP法では，目的関数が最大化されるクリティカルなインタバル変数が変動領域内に存在する場合にも対応可能であり，SQP法の結果と良好に一致する。

6. 結論

制振構造物における構造物特性の不確定性を考慮した際のロバスト性を評価する独自の方法を提示した。本手法では，不確定パラメターの変動領域内で目的関数が最大化される目的関数の非単調性を考慮することが可能である。不確定パラメターに対する目的関数のばらつきがSQP法により得られる正解値と良好に一致することを示し，高精度なロバスト性の評価が可能であることを明らかにした。

謝辞 本研究の一部は，日本学術振興会の特別研究員奨励費 (No.21・364)および科研費(No.21360267)による。ここに記して謝意を表する。

参考文献

[1] S. Chen et al. "An efficient method for evaluating the natural frequency of structures with uncertain-but-bounded parameters", *Comp.Struct.*, **87**, 582-590, 2009.

表1 構造物諸元

層質量[kg]	1.024×10^6
層剛性[N/m]	1次モード直線形分布
構造減衰係数[Ns/m]	剛性比例型, 1次減衰定数0.02
ダンパー減衰係数[Ns/m]	1.500×10^8 (全層一様配置)
支持部材剛性[N/m]	剛性比(層剛性との比) = 1.0

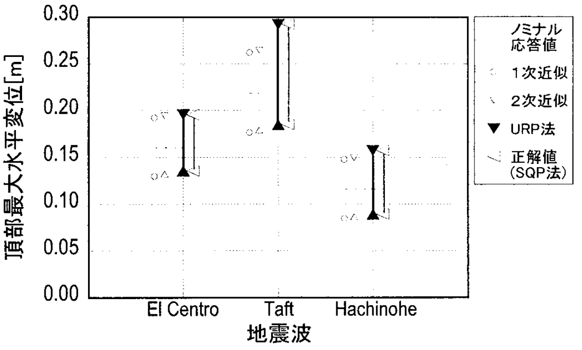

図3 不確定パラメターに対する目的関数の変動幅の比較

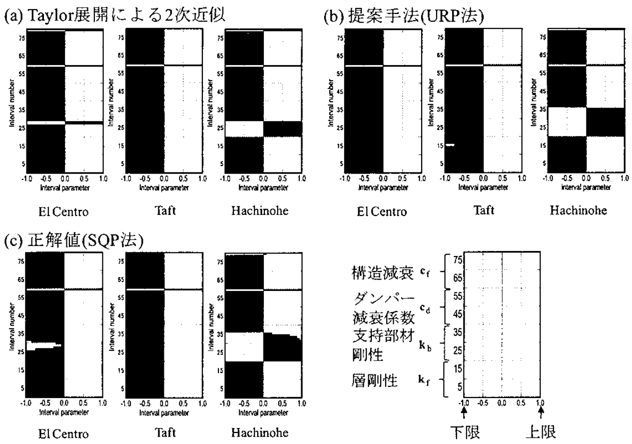

図4 目的関数の上限値に対応する不確定パラメターの分布

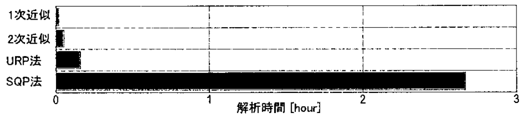

図5 各方法の解析時間の比較

＊1 京都大学大学院 日本学術振興会特別研究員
＊2 京都大学大学院 教授

Kyoto University, Graduate student, Mr. Eng.
Prof., Kyoto University, Dr. Eng.