

伝達特性の差の補償機能を有する自由度縮約モデルを用いた時刻歴応答評価法

その2：建物の剛性・減衰の変動に関する変換地動慣性力の簡易評価法

正会員 ○小豊直英^{*1} 同 吉富信太^{*2} 同 辻聖晃^{*3} 同 竹脇出^{*4}

2. 構造—2. 振動

縮約モデル, 変換地動慣性力, 構造特性の変動, テイラー展開

1. 序

文献 1)において, 非線形ダンパーの最適配置を見出すことを目的として, 数値感度計算における多数回の時刻歴応答解析の計算負荷を低減するための縮約モデルを用いた手法が提案されている. 前報「その1」では, 文献 1)の手法よりも加速度の応答評価精度の高い新たな変換地動慣性力を提案しているが, 上記の目的で使用する場合には, 振動数領域における演算に伴う計算負荷の低減が課題となる. 本論文では, 感度解析が必要となるダンパーの最適配置や免制振装置のパラメータのばらつき解析等を想定し, 剛性や減衰の変化に伴う変換地動慣性力の変動量を高精度を保ちつつ小さな計算負荷で評価する手法を提案する.

2. ダンパー量の変動と応答評価精度の関係

前報「その1」で提案した変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ のフーリエ変換 $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega)$ は次式で表される.

$$\bar{\mathbf{F}}^*(\omega) = -\bar{\mathbf{A}}(\omega)\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{r}\bar{\mathbf{U}}_g(\omega) \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\omega) = -\omega^2\bar{\mathbf{M}} + i\omega\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (3)$$

$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ は原モデルの質量, 剛性, 減衰行列を, $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{C}}$ は縮約モデルの質量, 剛性, 減衰行列を表す. \mathbf{T} は $\bar{N} \times N$ の縮約変換行列で第 (j, \bar{j}) 要素 ($j=1, \dots, \bar{N}$) を 1, それ以外を 0 とする行列であり, $\bar{\mathbf{U}}_g(\omega)$ は地動加速度 $\ddot{u}_g(t)$ のフーリエ変換, $\mathbf{r} = \{1 \dots 1\}^T$ は影響係数ベクトルを表す. i は虚数単位である.

変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ を縮約モデルに作用させた運動方程式は(4)式となる. ここで, $\bar{\mathbf{y}}(t), \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t), \ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t)$ は地面に対する縮約モデルの加速度, 速度, 変位応答.

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{f}}^*(t) \quad (4)$$

(1)~(3)式において変換地動慣性力を生成するために用いるモデルを「参照モデル」, (4)式において時刻歴応答解析に用いるモデルを「解析モデル」と呼ぶ.

本節では, 文献 1)で扱われている 20 層せん断モデルに線形オイルダンパーを各層均等設置したモデルを 2 層モデルに縮約する場合を行う. またダンパー量を 0 から増加させた場合の応答評価の精度について示す.

図 1 に, ダンパー量を 0 から増加させた場合のダンパーによる付加減衰定数と頂部最大応答の関係を示す. 時刻歴応答解析に用いる「解析モデル」は, ダンパー量の変化に対応したモデルとする. $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ 生成に用いる「参照モデル」を「解析モデル」と対応させて変化させる場合と, ダンパーなしモデルに固定する場合の結果を示す(それぞれ「参照モデル変動」, 「参照モデル固定」と表記する). また比較のため, 文献 1)の手法による変換地動慣性力を用いた場合の結果も示す.

モデルの縮約だけでは精度は低く, 荷重の調整により精度が向上する. 変位応答については, 文献 1)の手法と(1)式による方法のいずれも精度が高い. 一方加速度応答については, 文献 1)の手法ではダンパーが少ないときの加速度の精度が低く, (1)式による方法ではダンパー量が 0 のときは正解に一致しているがダンパー量の増加に伴い精度が低下する.

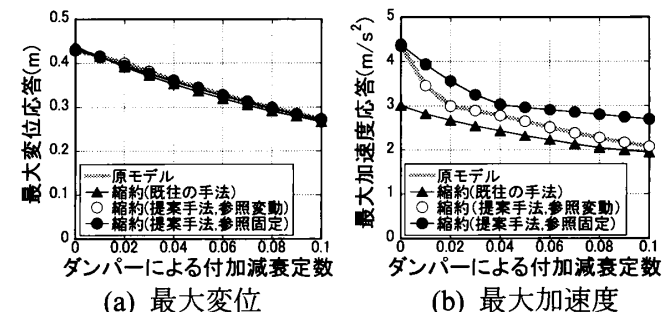


図1 ダンパー量の増加に伴う最大応答の変化 (頂部)

本節の手法は、縮約モデルを用いることにより計算負荷の低減が可能であるため、例えばダンパーの最適配置問題における感度解析や、非線形ダンパーの材料特性のばらつきを考慮した解析等の多くの時刻歴応答解析を繰り返す場合に有効である。その一方で、変換地動慣性力生成時の(1)式の $\mathbf{A}^{-1}(\omega)$ の演算に要する計算負荷が大きいため、剛性や減衰等のモデル特性の異なる複数モデルの解析に利用する場合に、それぞれの「解析モデル」に対応する「参照モデル」を用いることは計算負荷低減の観点からは望ましくない。次節においては、この問題点の解決のために、「参照モデル」を一旦固定して一度生成した変換地動慣性力を、特性の異なる複数の「解析モデル」に対して作用させる手法を提案する。

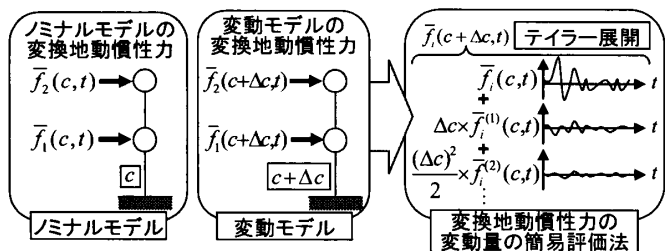


図2 提案手法の概要

3. モデル特性の変動に関する変換地動慣性力の簡易評価法

前節で述べたように、「その1」の手法では、変換地動慣性力の生成に用いる「参照モデル」と「解析モデル」が対応していれば高い精度が保証されるが、両者が対応していない場合は精度が低下する。この原因は、前報で示したように、原モデルと縮約モデルの伝達特性の違いが、減衰レベルにより異なることにある。本節では、「モデル特性の変化に対する変換地動慣性力のテイラー展開」を利用することにより、計算負荷をほとんど増やすことなく精度を飛躍的に向上させる手法を提案する。

図2に、免震建物の免震層の減衰係数 c がばらつく場合を想定した提案手法の概要を示す。ばらつく前のモデルを「ノミナルモデル」と呼び、 c が変動したモデルを「変動モデル」と呼ぶ。「その1」の手法では変動モデルに対して変換地動慣性力を生成していたが、本論文で提案する手法は、変換地動慣性力の変動分をテイラー展開により少ない計算負荷で求める方法である。

3.1 モデル特性の変動に関する変換地動慣性力の簡易評価法

(1)式で表される振動数領域の変換地動慣性力を、構造モデルの1つのパラメータ x を含めて次式のように表現する。ここで構造モデルのパラメータ x は、原モデルの剛性や減衰係数とする。パラメータが多変数 \mathbf{x} の場合に関しては次節において述べる。

$$\bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{T} \mathbf{A}^{-1}(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{\mathbf{U}}_g(\omega) \quad (5)$$

(5)式を x に関してテイラー展開して次式を得る。本節においては、 $(\cdot)^{(i)}$ は括弧内の関数のパラメータ x に関する i 階の導関数を表すものとする。

$$\bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}^{*(n)}(\omega, \mathbf{x})}{n!} (\Delta \mathbf{x})^n \right) \quad (6)$$

$\bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x})$ の導関数の導出のために、 $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$ および $\bar{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{x})$ の x に関する導関数を導出する。まず原モデルに関しては、(2)式より $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$ の導関数に関して以下の(7), (8)式が成立する。以下では簡単のため、特に断らない限り (ω, \mathbf{x}) の表記を省略する。

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{cases} i\omega \mathbf{C}^{(1)} & (x = c_j) \\ \mathbf{K}^{(1)} & (x = k_j) \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(1)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$ は、それぞれ \mathbf{K} , \mathbf{C} において、 k_j , c_j に関して偏微分した行列である。さらに、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$ の関係式を x に関して微分し、(8)式の関係を用いることにより、 \mathbf{A}^{-1} の導関数に関して次の一般式が成立することを示すことができる²⁾。

$$(\mathbf{A}^{-1})^{(n)} = (-1)^n n! (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{(1)})^n \mathbf{A}^{-1} \quad (9)$$

縮約モデルの剛性及び減衰係数が、原モデルの剛性及び減衰の線形和で表現されるような縮約法を仮定すれば、縮約モデルに関しても原モデルと同様に、(3)式より、 $\bar{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{x})$ の導関数に関して以下の(10), (11)式が成立する。

$$\bar{\mathbf{A}}^{(1)} = \begin{cases} i\omega \bar{\mathbf{C}}^{(1)} & (x = c_j) \\ \bar{\mathbf{K}}^{(1)} & (x = k_j) \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (11)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{K}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{C}}^{(1)}$ は、それぞれ $\bar{\mathbf{K}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ において、 k_j , c_j に関して偏微分した行列である。

以上の(5)~(11)の関係式を利用して、振動数領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{F}}^*$ の導関数を導出する。まず(5)式を x に関して微分して(9)式を用いると、 $\bar{\mathbf{F}}^*$ の1階の導関数が次式のように表される。

$$\bar{\mathbf{F}}^{*(1)} = \left\{ -\bar{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{T} \mathbf{A}^{-1} + \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{(1)}) \mathbf{A}^{-1} \right\} \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (12)$$

さらに、(12)式を x で微分して(8), (9), (11)式を用いると、 $\bar{\mathbf{F}}^*$ の 2 階の導関数が次式のように表される。

$$\bar{\mathbf{F}}^{*(2)} = 2\left\{\bar{\mathbf{A}}^{(1)}\mathbf{T}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{(1)})\mathbf{A}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{(1)})^2\mathbf{A}^{-1}\right\}\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{U}}_g \quad (13)$$

(9)式を用いると、 $\bar{\mathbf{F}}^*$ の導関数の一般式が次式となる。

$$\bar{\mathbf{F}}^{*(n)} = (-1)^n n! \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{(1)}\mathbf{T}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{(1)})^{n-1}\mathbf{A}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{(1)})^n\mathbf{A}^{-1} \right\} \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{U}}_g \quad (14)$$

(14)式は、 $\bar{\mathbf{A}}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(1)}$, \mathbf{A}^{-1} が得られていれば容易に演算できる。計算負荷の高い $\mathbf{A}^{-1}(\omega)$ については、(5)式の変換地動慣性力の演算時に求めたものを利用することで計算負荷を低減できる。

時刻歴応答解析に用いる時間領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t, x)$ は以下のように求める。(6)式の逆フーリエ変換により、時間領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t, x)$ のテイラー展開は(15)式で表される。

$$\bar{\mathbf{f}}^*(t, x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\mathbf{f}}^{*(n)}(t, x)}{n!} (\Delta x)^n \right) \quad (15)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{f}}^{*(n)}(t, x)$ は時間領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t, x)$ の n 階導関数であり、(14)式により演算した $\bar{\mathbf{F}}^{*(n)}(\omega, x)$ を逆フーリエ変換することにより求めることができる。これらの導関数 $\bar{\mathbf{f}}^{*(n)}(t, x)$ を一度求めておけば、パラメータ x の任意の変動 Δx に対して(15)式よりパラメータ変動後のモデルに対応した変換地動慣性力を求めることができる。

3.2 複数のモデルパラメータが変動する場合の変換地動慣性力の評価法

前節では、構造モデルのパラメータが 1 つの場合について述べた。本節では、構造モデルの複数のパラメータが変動する場合について、テイラー展開の近似的な表現を用いた手法を提案する。例えば、構造物のパラメータが x , y の 2 個である場合、変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)$ のテイラー展開は次のように表される。以下では簡単のため $\bar{\mathbf{F}}^*$ は $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)$ を表すものとする。

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y) \right\} \\ &= \bar{\mathbf{F}}^* + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*}{\partial y} \Delta y \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式の高階の微分に関して、近似的に複数の変数による微分の項を無視して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x + \Delta x, y + \Delta y) \\ & \cong \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y) \right\} \\ &= \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y) + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)}{\partial y} \Delta y \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, x, y)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

多変数 $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_x}\}^T$ の場合の一般式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{N_x} \left(\Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x}) \right\} \\ &= \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x})}{\partial x_{N_x}} \Delta x_{N_x} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x})}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{F}}^*(\omega, \mathbf{x})}{\partial x_{N_x}^2} (\Delta x_{N_x})^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

4. 数値例題

本節では、21 層せん断モデルでモデル化される免震建物を対象とし、免震層の剛性や減衰係数が変動する場合の例題を示す。入力波は Taft EW 1952 原波とする。

20 層の上部構造は固有周期 1.6s, 1 次モード直線形と仮定して剛性を決める。免震層の剛性と減衰係数は、上部構造を剛体と仮定した 1 質点モデルの周期 4.0s, 減衰定数 0.2 となるように決める。縮約モデルは 2 質点モデルとし、頂部及び免震層の床を対応自由度とする。

4.1 免震層の減衰係数のみを変化させる場合

本節では、免震層の減衰係数のみが変動する例を示す。図 3,4 に減衰係数をノミナルモデルの 80% 及び 150% とした場合の既往の手法¹⁾と、提案手法で 0 次のみ考慮した ($\bar{\mathbf{F}}^*$ 評価で減衰の変動を考慮しない) 場合及び、1 次まで考慮した場合の最大応答を示す。提案手法は既往の手法より高精度で、1 次まで考慮すれば概ね正解と一致する。

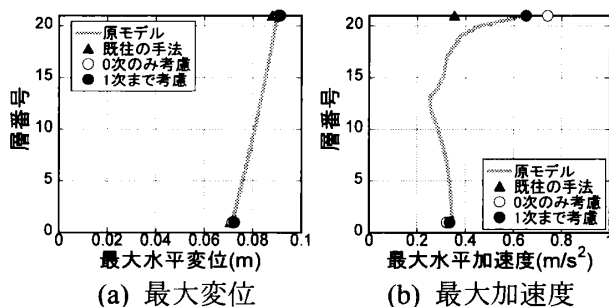


図 3 減衰変動 (ノミナルモデルの 80%)

図5, 6に, 免震層の減衰の変動に伴う変位と加速度の
変動を示す。0次では加速度の誤差は大きい, 1次まで
考慮すれば大きな変動に対しても精度が大幅に向上する。

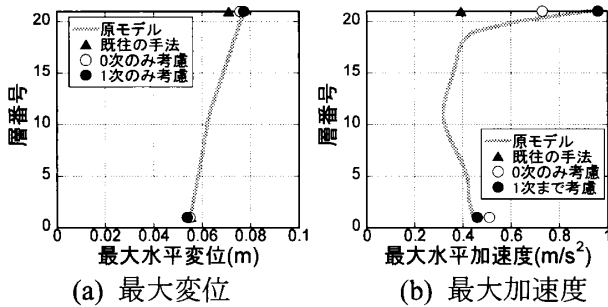


図4 減衰変動 (ノミナルモデルの150%)

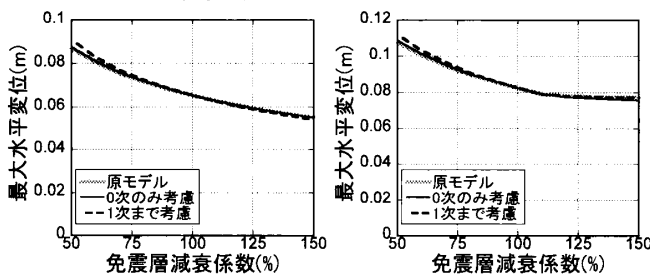


図5 免震層の変動に伴う変位の変化 (減衰変動)

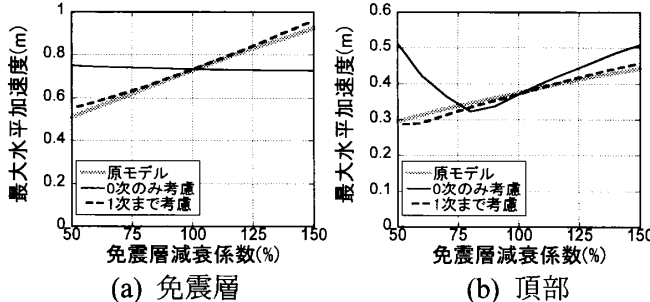


図6 免震層の変動に伴う加速度の変化 (減衰変動)

4.2 免震層の剛性のみを変化させる場合

図7に免震層の剛性のみが50%増加した場合の応答を
示す。変位は0次のみでも精度が良いが, 加速度につい
ては1次まで考慮するだけで精度が向上するといえる。

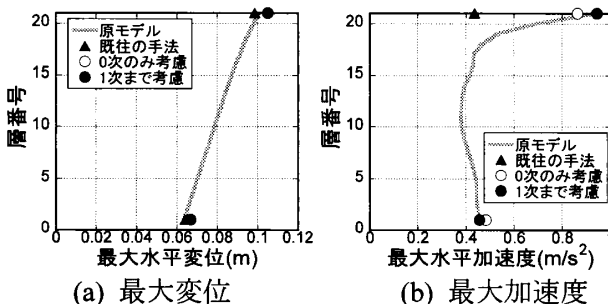


図7 免震層の変動に伴う応答の変化 (剛性変動)

4.3 免震層の減衰係数と剛性を同時に変化させる場合

本節では, 免震層の減衰と剛性が同時に20%増加した
場合の例を示す。図8は変位と加速度の図を示す。前節ま
での結果と同様に, 変位は0次のみでも精度が良いが,
加速度は1次まで考慮することで精度が向上する。

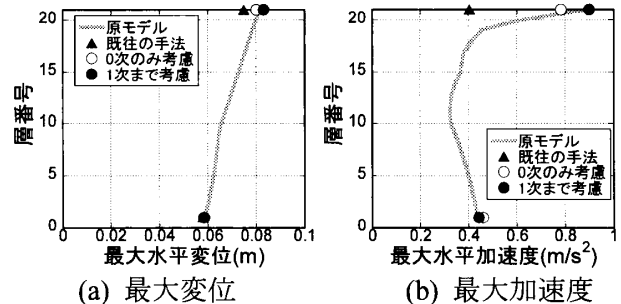


図8 免震層の変動に伴う応答の変化 (剛性・減衰変動)

5. 結論

- (1) 「その1」で提案した縮約モデルに対する変換地動慣性力について, ダンパー最適配置法の感度計算における多数回の解析や免制振装置の物理特性のばらつきを考慮した解析に利用する場合を想定し, 構造モデルの剛性や減衰の変動による変換地動慣性力の変動を, テイラー展開により少ない計算負荷で求める手法を提案した。
- (2) 21層免震建物を2層モデルに縮約し, 免震層の減衰係数と剛性 (同時変動も含む) が変動する場合を想定した数値例題を通じて提案手法の妥当性を示した。変位は0次近似 (変換地動慣性力を変動させない場合) でも精度が良いが, 加速度については0次近似では精度が低く, 1次項まで考慮するだけで精度が向上することを示した。
- (3) 提案手法により, 非線形ダンパーの最適配置など多数回の時刻歴応答解析を伴う問題において, 精度の向上と計算負荷の低減が期待できる。

謝辞 本研究の一部は科研費 H23-24[若手研究 B]による。

- 1) 辻聖晃, 国分宏樹, 吉富信太, 竹脇出:非線形復元力特性を有する制振ダンパーの構造縮約モデルを用いた最適配置法, 構造系論文集, Vol.75, No.658, pp.2143-2152, 2010.12
- 2) K. Yamamoto, K. Fujita, I. Takewaki : Instantaneous earthquake input energy and sensitivity in base-isolated building, *Struct. Design Tall and Spec. Build.*, **20**, pp.631-648, 2011.

*1 京都大学大学院 修士課程
*2 京都大学 助教・博士 (工学)
*3 京都大学 准教授・博士 (工学)
*4 京都大学 教授・工博

Graduate Student, Kyoto University
Assist. Prof., Kyoto University, Dr. Eng.
Assoc. Prof. Kyoto University, Dr. Eng.
Prof., Kyoto University, Dr. Eng.