平成24年度日本建築学会
近畿支部研究発表会

部分空間法と同定関数を用いた建築構造物のシステム同定

正会員 ○金城陽介*1 同 吉富信太*2 同 竹脇出*3

2.構造—2.振動
システム同定, 構造ヘルスモニタリング, 物理パラメター同定, 部分空間法, 同定関数

1. 序

システム同定法は, 設計モデルと実在構造物の対応を明らかにして設計モデルの精度向上に資することや, 外乱を受けた後の構造物の損傷検出や経年劣化測定などを対象とする構造ヘルスモニタリングの主要な技術として, その需要は高まっている.

建築物のシステム同定は, 建築物全体の動特性を表す固有振動数や減衰定数などのモーダルパラメター同定と, 建築物の各層の動特性を表す剛性や減衰係数などの物理パラメター同定の二つに分けられる.

物理パラメター同定法として, 中村・竹脇らはN層せん断型構造物を対象に, 同定対象層の直上及び直下の 2 層分の加速度応答だけを用いて定義される同定関数の$\omega \to 0$の極限値を求めることで, 対象層の剛性・減衰係数が同定可能な方法を提案している[1]. この手法ではフーリエ変換を用いて計算される同定関数は低振動数領域においてノイズの影響を受けやすいという問題点があるため, 前田らは ARX モデルを導入し, 伝達関数の$\omega = 0$における制約条件を付加することによりこの問題点を改善した[2].

上述の同定法は少ない観測データから物理パラメターが同定可能であるという優れた利点がある一方で, 同定関数の振動数$\omega \to 0$の極限値のみが物理パラメターと直接対応するため, 同定関数の$\omega = 0$近傍の精度を如何に確保するかが課題となる. また, 全ての床の加速度応答が同時に測定可能な場合にも同定精度が向上しないという課題もある.

そこで本研究では, 全層の応答が計測されている場合に, 既往の手法よりも高精度かつ極限操作の不要な新たな同定関数を用いた物理パラメター同定法を提案する. また同定関数を計算するために用いる伝達関数を ARX モデルではなく部分空間法により求める. 部分空間法は, 状態方程式を用いることにより多入力多出力システムへ容易に拡張可能なシステム同定法で, 高い汎用性と数値的な安定性, さらには取り扱いの容易さという特徴がある.

2. 提案する同定法

2.1 同定関数の誘導

本研究で用いる同定関数を導出する. 図 1 の自由体の慣性力と層せん断力の釣り合い式より, 以下の式が得られる.

$$k_j(u_j - u_{j-1}) + c_j(\dot{u}_j - \dot{u}_{j-1}) = -\sum_{k=1}^{N} m_i \ddot{u}_i \tag{1}$$

ここで, $u_j, \dot{u}_j, \ddot{u}_j$は第$j$層の絶対変位, 絶対速度, 絶対加速度である. (1)式の両辺をフーリエ変換して次式を得る（大文字はフーリエ変換を表す).

$$k_j(U_j - U_{j-1}) + c_j(\dot{U}_j - \dot{U}_{j-1}) = -\sum_{i=j}^{N} m_i \ddot{U}_i \tag{2}$$

フーリエ変換の性質から, 以下の関係が成り立つ.

$$U_j = \dot{U}_j / (\mathrm{i}\omega) = \ddot{U}_j / (\mathrm{i}\omega)^2 \tag{3}$$

従って, 以下の式が得られる.

$$\frac{k_j}{(\mathrm{i}\omega)^2}(\ddot{U}_j - \ddot{U}_{j-1}) + \frac{c_j}{\mathrm{i}\omega}(\ddot{U}_j - \ddot{U}_{j-1}) = -\sum_{i=j}^{N} m_i \ddot{U}_i \tag{4}$$

(4)式を$k_j + \mathrm{i}\omega c_j$について解くと, 次のようになる.

$$k_j + \mathrm{i}\omega c_j = \frac{\omega^2}{\ddot{U}_j - \ddot{U}_{j-1}} \sum_{i=j}^{N} m_i \ddot{U}_i \tag{5}$$

(5)式右辺の分母分子を地動加速度$\ddot{u}_g$のフーリエ変換$\ddot{U}_g$で除すと, 次式を得る.

$$k_j + \mathrm{i}\omega c_j = \frac{\omega^2}{G_j - G_{j-1}} \sum_{i=j}^{N} m_i G_i \tag{6}$$

ただし, G_jは次式で定義される, 地動加速度に対する第j層の絶対加速度伝達関数である.

$$G_j = \frac{\ddot{U}_j}{\ddot{U}_g} \tag{7}$$

System Identification of Structures Using Subspace Method and Identification Function
KANESHIRO Yosuke, YOSHITOMI Shinta, TAKEWAKI Izuru

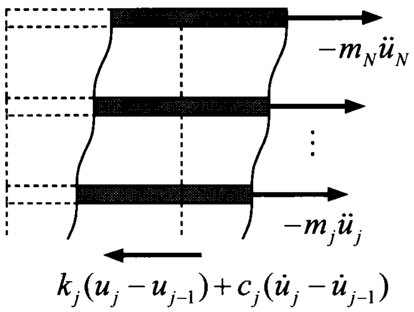

図 1 第 j 層より上層の自由体の釣り合い

(6)式の両辺を ω で除して次式を得る．

$$\frac{k_j}{\omega}+\mathrm{i}c_j=\frac{\omega}{G_j-G_{j-1}}\sum_{i=j}^{N}m_iG_i \tag{8}$$

(5),(8)式から剛性 k_j と減衰係数 c_j は以下のように表現できる．

$$\begin{aligned}k_j&=\mathrm{Re}\left[f_j(\omega)\right]\\ c_j&=\mathrm{Im}\left[f_j(\omega)/\omega\right]\end{aligned} \tag{9}$$

ただし，$f_j(\omega)$ は次のように定義され，本研究で提案する同定関数を表す．

$$f_j(\omega)=\frac{\omega^2}{G_j(\omega)-G_{j-1}(\omega)}\sum_{i=j}^{N}m_iG_i(\omega) \tag{10}$$

(9)式から明らかなように，同定値は理論上すべての ω で一定となる．したがって，既往の同定法のように $\omega\to 0$ の極限操作を行なう必要はなく，固有振動数周辺のように SN 比が大きく信頼性の高い ω における値を同定値とすることで，より高精度で物理パラメターが同定できると予想される．

2.2 部分空間法

同定関数に含まれる伝達関数 G_j の計算に部分空間法を用いる．部分空間法は，以下の状態方程式を数式モデルとするシステム同定法である．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1)&=\mathbf{Ax}(k)+\mathbf{Bu}(k)\\ \mathbf{y}(k)&=\mathbf{Cx}(k)+\mathbf{Du}(k)\end{aligned} \tag{11}$$

ただし，$\mathbf{u}(k)$ は入力ベクトル，$\mathbf{y}(k)$ は出力ベクトル，$\mathbf{x}(k)$ は状態ベクトルであり，$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ はパラメター行列である．状態ベクトルの次数は任意に設定可能であり，大きな値を設定すると計算精度が向上する反面，多くの計算時間が必要となる．従って，その次数の選定方法が重要となる．本手法では，適合率 Fit が収束し始めるときの次数を最適な次数として採用する．

$$\mathrm{Fit}=\left\{1-\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_d}\left[\hat{y}(k)-y(k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N_d}\left[y(k)-\bar{y}\right]^2}}\right\}\times 100\,[\%] \tag{12}$$

N_d はサンプル数，$y(k)$ は実測データ，$\hat{y}(k)$ は同定されたパラメターで計算された推定値，$\bar{y}$ は実測データの平均値を表す．

同定されたパラメターを用いて次式で伝達関数が求められる．

$$\mathbf{G}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D},\quad z=e^{i\omega T_0} \tag{13}$$

ただし，T_0 はサンプリング周期である．

2.3 部分空間法と同定関数を用いた提案同定法

本研究では，地動加速度を入力ベクトル，全層の絶対加速度応答を出力ベクトルとして部分空間法を適用する．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k)&=\ddot{u}_g(k)\\ \mathbf{y}(k)&=\left[\begin{array}{cccc}\ddot{u}_1(k)&\ddot{u}_2(k)&\cdots&\ddot{u}_N(k)\end{array}\right]^T\end{aligned} \tag{14}$$

状態ベクトルの次数は，(12)式の Fit が収束し始めるときの次数を採用する．得られた $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ を用いて(13)式により伝達関数を求め，(9),(10)式から剛性と減衰係数を同定する．

3. 数値シミュレーション

2 節で提案した同定法を用いて数値シミュレーションを行なう．1 次モードが直線形，1 次の固有周期が 0.32 秒（固有振動数は 19.6rad/s），減衰定数が 0.03 となる 4 層せん断型構造物モデルを扱う．なお，減衰は剛性比例型を仮定し，各層の力学特性を表 1 に示す．

表 1 各層の力学特性

	質量[kg]	剛性[N/m]	減衰係数[Ns/m]
第 1 層	4.000×10^5	1.542×10^9	4.712×10^6
第 2 層	4.000×10^5	1.388×10^9	4.241×10^6
第 3 層	4.000×10^5	1.079×10^9	3.299×10^6
第 4 層	4.000×10^5	6.169×10^8	1.885×10^6

このモデルに El Centro NS 1940（図 2）を入力データ，Newmark-β 法による時刻歴応答解析により得られた各層の絶対加速度応答値（図 3）を出力データとして本手法を適用する．

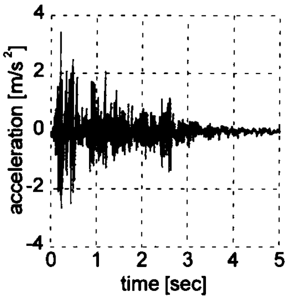

図 2 入力データ

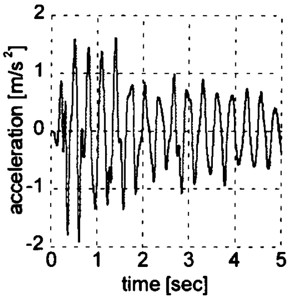

図 3 出力データ（4 層）

図 4 に，状態ベクトルの次数を変化させて(12)式により計算した Fit を示す．次数と Fit の関係から適切なモデル次数として 8 を採用する．

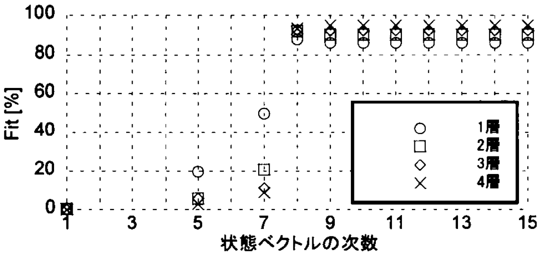

図 4 状態ベクトルの次数と Fit の関係

得られたパラメターを用いて(13)式により伝達関数を計算する．(9)，(10)式から求めた同定関数値を図 5，6 に示す．

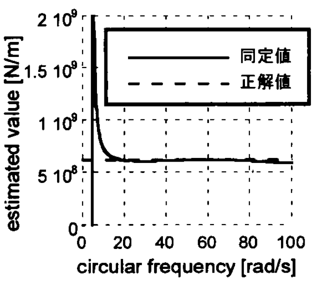

図 5 剛性の同定（4 層）

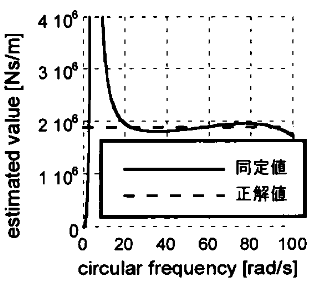

図 6 減衰係数の同定（4 層）

図 5，6 から，同定値は低振動数領域で大きく乱れることが分かる．これは低振動数領域における伝達関数の同定誤差が原因と考えられ，地動加速度に対する絶対加速度伝達関数が満たすべき次の条件を満たしていないことに起因すると思われる．

$$|G(0)| = 1 \tag{15}$$

そこで，(15)式の条件を満たすように伝達関数に次式で表される補正を加える．

$$\tilde{G}(\omega) = \left[\frac{G_m - 1}{G_m - G_0} + \frac{1 - G_0}{G_m - G_0} \frac{G_m}{|G(\omega)|} \right] G(\omega) \tag{16}$$

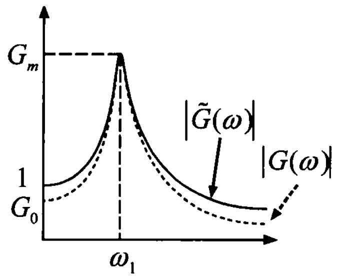

図 7 伝達関数の補正

この補正伝達関数 $\tilde{G}$ は，その絶対値 $|\tilde{G}|$ が $\omega = 0$ において 1, 1 次の固有振動数 ω_1 において G_m をとる．尚，1 次の固有振動数 ω_1 における値を補正前と同じ値になるようにしたのは，ピーク値付近は応答が大きく，信頼性が高いからである．補正伝達関数を用いた同定関数値（図 8，9）から分かるように，減衰係数は剛性に比べて同定値が安定しない．従って，どの ω における値を同定値とするかが重要となる．本研究では，剛性に関しては 1 次の固有振動数の周辺，減衰係数に関しては 2 次と 3 次の固有振動数の周辺の平均をとる．なお，(16)式は 1 次の固有振動数を中心とした補正であるので減衰係数の同定には補正前の伝達関数を用いる．同定結果を表 2，3 に示す．

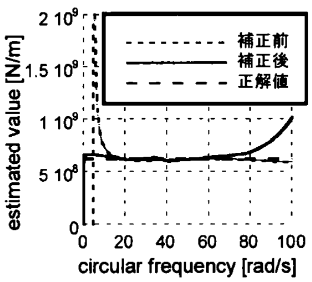

図 8 剛性の同定（4 層）

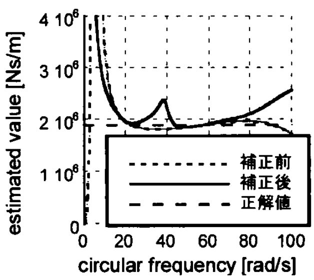

図 9 減衰係数の同定（4 層）

表 2 各層の剛性の同定結果

	同定値[N/m]	正解値[N/m]	誤差[%]
第 1 層	1.538×10^9	1.542×10^9	−0.270
第 2 層	1.387×10^9	1.388×10^9	−0.0744
第 3 層	1.080×10^9	1.079×10^9	+0.0347
第 4 層	6.164×10^8	6.169×10^8	−0.713

表 3 各層の減衰係数の同定結果

	同定値[Ns/m]	正解値[Ns/m]	誤差[%]
第 1 層	4.934×10^6	4.712×10^6	+4.71
第 2 層	4.181×10^6	4.241×10^6	−1.43
第 3 層	3.281×10^6	3.299×10^6	−0.523
第 4 層	1.840×10^6	1.885×10^6	−2.37

4. 実測データを用いた数値例題

3節では数値シミュレーションによって本手法の妥当性を示した．本手法がノイズを含む実測データにも有効であることを示すために，図10のような4層構造物模型の実測データに適用する．模型の剛性及び減衰係数は予め別の手法により求めてあり（表4），それを正解値とする．振動台による入力加速度（図11），その応答値（図12）を入出力データとして本手法を適用した．同定結果を表5，6に示す．

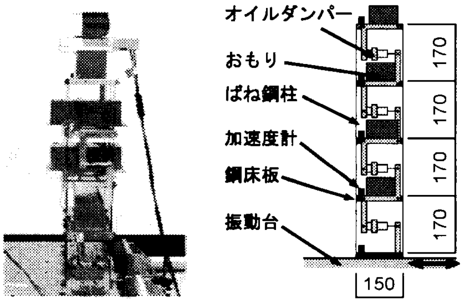

図10 4層せん断型構造物模型

表 4 各層の力学特性

	質量[kg]	剛性[N/mm]	減衰係数[Ns/mm]
第1層	22.0	36.5	0.0322
第2層	28.4	33.5	0.0322
第3層	22.0	25.4	0.0322
第4層	22.0	14.1	0.0322

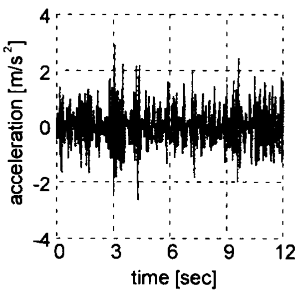

図 11 入力データ

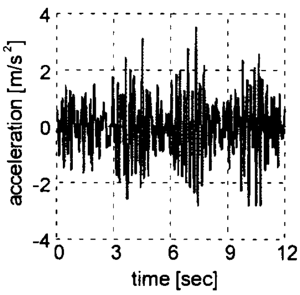

図 12 出力データ（4 層）

表 5 各層の剛性の同定結果

	同定値[N/mm]	正解値[N/mm]	誤差[%]
第 1 層	35.2	36.5	−3.5
第 2 層	32.5	33.5	−2.9
第 3 層	25.0	25.4	−1.5
第 4 層	13.1	14.1	−7.1

表 6 各層の減衰係数の同定結果

	同定値[Ns/mm]	正解値[Ns/mm]	誤差[%]
第 1 層	0.0658	0.0322	+104
第 2 層	0.0334	0.0322	+3.8
第 3 層	0.0354	0.0322	+9.9
第 4 層	0.0344	0.0322	+6.7

同定結果より，実測データを用いても剛性は精度よく同定できることがわかる．減衰係数は 2，3，4 層についてはある程度の精度で同定できているが，1 層については改善の余地があり，精度の向上が今後の課題である．

5. 結論

本論文では，部分空間法と同定関数を用いた構造物の新しいシステム同定法を提案した．その特徴は以下の通りである．

1) 全層の加速度応答が測定可能な場合，既往の手法よりも高精度な同定関数が定義でき，かつ極限操作の不要な同定が可能となることを示した．
2) 部分空間法を用いれば，新しい同定関数において必要となる全層分の伝達関数を効率的に求めることができることを示した．本手法は適切なモデル次数の設定に必要なコストが小さいことを示した．
3) 既往の同定手法では$\omega \to 0$での極限値計算が必要であるのに対し，提案した同定関数は理論上すべてのωにおいて成立するため，ある区間の平均値を採用すれば，数値シミュレーションだけでなく実測データを用いてもかなりの精度で同定できることを示した．

参考文献

1) 中村充，竹脇出，安井譲，上谷宏二：限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定，日本建築学会構造系論文集，No. 528，pp. 75-82，2000. 2.
2) 前田朋宏，吉富信太，竹脇出：限定された地震観測記録とARX モデルを用いた建物の剛性・減衰同定法，日本建築学会構造系論文集，第76 巻，第666 号，1415-1423，2011. 8.

*1 京都大学　修士課程　Graduate Student, Kyoto University
*2 京都大学　助教・博士（工学）　Assist. Prof., Kyoto University, Dr. Eng.
*3 京都大学　教授・工博　Prof., Kyoto University, Dr. Eng.