

# 不確定な構造特性を有する免震建物のロバスト性評価のための 地震時応答限界解析

## EARTHQUAKE RESPONSE BOUND ANALYSIS OF UNCERTAIN BASE-ISOLATED BUILDINGS FOR ROBUSTNESS EVALUATION

藤田 皓平\*, 竹脇 出\*\*

*Kohei FUJITA and Izuru TAKEWAKI*

An efficient methodology is presented to evaluate the robustness (variability of response) of an uncertain base-isolated building. While a basic assumption of "inclusion monotonic" is introduced in usual interval analysis, the possibility is taken into account of occurrence of the extreme value of the objective function in an inner feasible domain of the interval parameters. It is shown that the critical combination of the structural parameters can be derived explicitly so as to maximize the approximate objective function by 2nd-order Taylor series expansion. The URP (Updated Reference-Point) method is proposed to obtain such critical combination of structural parameters. In order to investigate the validity of the proposed robustness evaluation methodologies, numerical analyses are conducted for 20-storey base-isolated building models with natural rubber isolators and passive dampers. By comparing the results with the exact solution and those by other conventional methods, it is shown that the URP method can provide a more accurate evaluation of response bounds without hard computational effort.

**Keywords :** Base isolation, Uncertainty analysis, Interval analysis, Robustness, Earthquake response

免震, 不確定性解析, インタバル解析 (区間解析), ロバスト性, 地震時応答

### 1. 序

増大する地震動レベルに対して高層建物や大規模構造物の設計を考える上で, 免震技術や制振技術は不可欠なものとなりつつある。免震技術や制振技術を用いて構造物の安全性を高めるには, 免震装置や制振装置を含めた構造物の特性を適切にモデル化した上で, 期待される応答低減効果を高精度に評価する必要がある。しかしながら, 性能の均一性が保証される工業製品とは異なり, 建築構造物の部材特性には少なからずばらつきが存在する。例えば, RC 構造のコンクリート弾性係数は, コンクリート強度に大きく依存する。通常は設計基準強度を下回らないように配慮しているため, 実際のコンクリート強度には相当なばらつきがあるという調査報告がある。また, 免震構造に採用される種々の積層ゴムアイソレータやダンパーについては, 材料物性のばらつき, 製作誤差, 温度・振動数依存性等に起因した製品のばらつきや経年による特性変化が顕著であり, 設計時にはこれらも含めた構造物パラメータの不確定性が免震性能に及ぼす影響について検討を行う必要があると指摘されている<sup>1)</sup>。

種々の不確定性を想定した上で構造物の頑強さ (=ロバスト性) を分析した研究には多数のものが存在する。例えば, 構造物パラメータの変動領域を楕円で近似する凸モデルが提案されているが, 精度上の問題から変動領域に制限がある<sup>2)</sup>。寒野と竹脇<sup>3)</sup>は, 剛性および外力

の不確定性を考慮した上で, ロバスト性の度合いを効率よく評価する方法を示している。東野と和田<sup>4)</sup>は, 入力地震動レベルの不確定性を想定し, 免震建物に想定を超える地震動が入力された場合に, 免震層の滑り支承の摩擦係数や復元力の有無が免震建物のロバスト性に及ぼす可能性について検討を行っている。また, 竹脇は<sup>5)</sup>, 超高層免震建物を対象とし, 規定された免震性能を満足するために必要となる粘性減衰ダンパー量を決定する逆問題型解法を提示し, 免震構造物のロバスト性について検討している。さらに, 実務設計では, いくつかの設計用地震動群に対して, 免震装置などの特性ばらつきを考慮した応答が設計条件内に収まることを確認する手順がとられている。

しかしながら, 構造物パラメータのばらつきに対する免震性能のロバスト性を効率的かつ高信頼度で解析する方法は未だ確立されていないとは言い難い。

本論文では免震建物を対象として, 免震装置や上部構造の種々のパラメータが不確定性を有することを想定した上で, 免震建物の設計時に検討すべき応答量の一例としての免震層水平変位および頂部絶対加速度応答の最大値の上下限値を予測するロバスト性解析法を提示する。本手法を適用することにより, 構造物パラメータのばらつきに対する応答のばらつきを高精度に予測することが可能となる。

\* 京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻  
大学院生・工修

\*\* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・工博

Grad. Student, Dept. of Urban and Environmental Eng., Graduate School of Eng., Kyoto University, M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Graduate School of Eng., Kyoto University, Dr. Eng.

## 2. 免震建物のモデル化とアイソレータの不確定性

検討対象とする基礎免震を有する  $N$  層免震建物モデルを図 1 に示す。後述するロバスト性解析法の有用性の明示を目的とし、簡易的な解析モデルを採用する。上部構造については、各層を 1 質点と見なす多質点系せん断型弾性モデルとする。アイソレータは図 2 に示す線形の復元力特性を有する天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)とし、付加減衰はオイルダンパーで与えられるものとする。

免震建物の設計にあたっては、積層ゴム・ダンパーや構造物パラメータのばらつきに対する免震性能のロバスト性を評価し、免震建物の安全性について検証する必要がある。積層ゴムの不確定性に寄与する主たる原因としては製品上のばらつき、温度・振動数変化によるばらつきおよび経年変化による特性変化が挙げられる。NRB の温度依存性については、 $20^{\circ}\text{C}$ における NRB のせん断弾性係数を基準とすれば、 $-10^{\circ}\text{C}$ で 10%程度上昇し、 $40^{\circ}\text{C}$ では数%程度低くなるとされている。また天然ゴムは有機物であるため、酸化劣化による経年変化を無視することはできない。免震構造が実用化されてから 20 年余りしか経っておらず、信頼性の高いデータは少ない状況ではあるが、NRB の経年変化としては最大で 10%程度の剛性増加が予測されている<sup>9)</sup>。

## 3. 不確定パラメータを有する問題に対する既往のインタバル解析法

構造物パラメータや入力外乱等の不確定性に対して、構造物の応答や固有振動特性のばらつき、即ち構造物が有するロバスト性を評価する不確定性解析法には様々な方法が提案されている<sup>たとえば 7-13)</sup>。インタバル解析(区間解析)法は不確定性解析法における有力な方法の一つであり、ばらつきが想定される物性値や設計パラメータ等に対してばらつきの変動幅を与え、目的関数  $f$  の上下限値を推定する方法である。インタバル解析法において、ばらつきが想定される構造物パラメータ  $\mathbf{X}$  を次のように定義し、これをインタバル変数と称する。

$$\mathbf{X}^I = \left\{ \left[ X_i^c - \Delta X_i, X_i^c + \Delta X_i \right] \right\} \quad (i=1, \dots, N_x) \quad (1)$$

ここに  $( )^I$  はインタバル変数を示し、 $[a, b]$  により当該変数の下限値  $a$  および上限値  $b$  が定義される。また、(1)式において、 $( )^c$ 、 $\Delta X$ 、 $\Delta X$  および  $N_x$  は、それぞれノミナルモデルにおける構造物パラメータのノミナル値、インタバル変数の上側と下側の変動幅およびインタバル変数の個数を表す。また、目的関数  $f$  をインタバル変数  $\mathbf{X}^I$  を用いて次のように表わすことを一般的にインタバル拡張(Interval extension)という。

$$\begin{aligned} f^I(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}^I) \\ &= f\left( [X_1^c - \Delta X_1, X_1^c + \Delta X_1], \dots, [X_{N_x}^c - \Delta X_{N_x}, X_{N_x}^c + \Delta X_{N_x}] \right) \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式は、インタバル変数の端点の組み合わせから目的関数  $f$  の上下限値を見出した上で、それらの間の関数値の集合を意味する。

通常のインタバル解析法では、目的関数  $f$  の各変数に対する単調性を前提としており(Inclusion monotonic と呼ばれる)、次の制約を満たすものと仮定している。

$$\{f(\mathbf{X}) : X_i \in X_i^I, i=1, 2, \dots, N_x\} \subseteq f(X_1^I, X_2^I, \dots, X_{N_x}^I) \quad (3)$$

(3)式の右辺は(2)式で定義した「目的関数をインタバル拡張したもの」

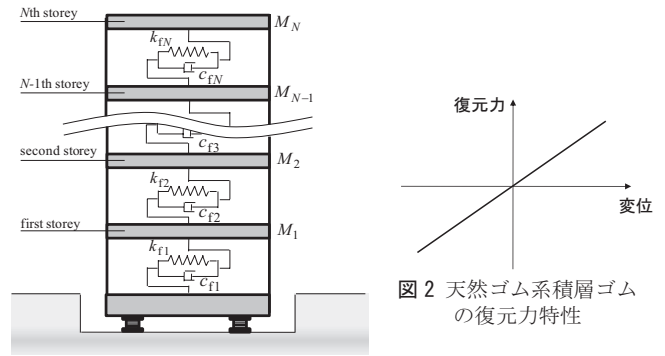


図 1  $N$  層免震建物モデル

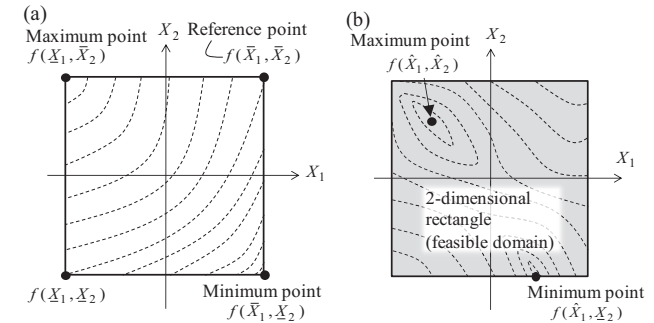


図 3 目的関数の上下限値を与える不確定パラメータの組み合わせに対する目的関数の単調性および非単調性による違い

(a) Inclusion monotonic, (b) non-monotonic

である。(3)式は目的関数  $f$  の最大・最小値がインタバル変数の端点で生起されることを意味している。図 3(a)および(b)は、インタバル変数が 2 個の場合を例として、目的関数の上下限値を与える不確定パラメータの組み合わせにおける目的関数の単調性および非単調性の違いを図示したものである。図 3(a)に示すように、目的関数  $f$  が単調性を有している場合(Inclusion monotonic 仮定)には、インタバル変数の端点の組み合わせで評価される応答値の中に正解値が必ず含まれる。従って、(3)式的前提のもとで通常のインタバル解析法における厳密解は、各インタバル変数の上限値  $\bar{X}_i = X_i^c + \Delta X_i$  と下限値  $\underline{X}_i = X_i^c - \Delta X_i$  の組み合わせに対して逐次応答解析を実施することにより得られ、全体での応答解析による負荷(=応答解析の回数)は  $2^{N_x}$  となる。しかしながら、多くの不確定パラメータを想定する場合には、 $N_x$  の増大に伴い計算試行回数が膨大となるため、上述のような総当り解法は適切ではない。さらに、図 3(b)に示すように、目的関数が非単調性を有している場合には、インタバル変数の端点の組み合わせのみで評価を行うことは適切ではない。

このような問題を解決する方法として、既往のインタバル解析法では、有限要素法における静的変位を決定する剛性マトリクスの逆行列をノイマン級数展開により近似する方法<sup>11)</sup>や、目的関数を収束級数展開により近似する方法<sup>12)</sup>などが提案されている。また、Chen ら<sup>13)</sup>は、目的関数である固有値(固有円振動数の 2 乗)を Taylor 展開の 1 次微係数および 2 次微係数の対角成分を用いて近似することにより、計算試行回数を大幅に低減した上でインタバル変数の端点における目的関数の上下限値を評価する方法を提示している。しかしながら、目的関数の非単調性を考慮する場合は、逐次 2 次計画法や応答曲面法等を適用し、最適化問題に帰着させて解を求める必要があるため、目的関数の上下限値を評価することは容易ではない。

#### 4. Taylor 展開に基づく上下限値探索によるインタバル解析法

通常のインタバル解析法では、構造物パラメータの変動に対して目的関数の単調性が仮定される。しかしながら、対象とする目的関数の選定や外乱の特性に依存して目的関数が非単調性を有する場合も想定され、不確定性を想定する構造物パラメータの上下限値で目的関数が最大化もしくは最小化されるとは限らない。

構造物パラメータの不確定性を制約したもとの目的関数の上下限値を評価する問題は、一般的に次のように記述される。

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & \mathbf{X} \\ \text{so as to maximize or minimize} & f(\mathbf{X}) \\ \text{subject to} & \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I \end{array} \quad (4)$$

(4)式は一種の制約付き最適化問題となっており、種々の方法で解くことが可能である。しかしながら、最適化問題を解く際に、解析時間の増加による弊害や解の収束性に関する個別の検討の必要性等が発生することがあり、構造設計において不確定パラメータに対するロバスト性を評価する方法として用いることは実用的とはいえない。

そこで本節では、Chen<sup>13)</sup>らが提示した Taylor 展開による 1 次および 2 次近似を用いたインタバル解析法の概要について 4.1, 4.2 節で示した上で、従来のインタバル解析法では想定し得なかった目的関数の非単調性を考慮可能な新しいインタバル解析法を提示する。

##### 4.1 Taylor 展開による 1 次近似を用いたインタバル解析法

Taylor 展開による 1 次近似を用いて目的関数  $f$  の上下限値を評価する場合、目的関数の上下限値  $\bar{f}$ ,  $\underline{f}$  は次のように求められる。

$$\bar{f} = f(\mathbf{X}^c) + \sum_{i=1}^{N_x} |f_{,X_i} \Delta X_i|, \quad \underline{f} = f(\mathbf{X}^c) - \sum_{i=1}^{N_x} |f_{,X_i} \Delta X_i| \quad (5a,b)$$

ここに  $(\cdot)_{,X_i}$  は、ノミナルモデルにおける目的関数  $f$  の構造物パラメータ  $X_i$  に対する 1 次感度  $\partial f(\mathbf{X}) / \partial X_i |_{X_i=X_i^c}$  を表す。本論文では目的関数  $f$  を時刻歴応答解析により得られる最大応答値とするため、1 次感度  $f_{,X_i}$  は数値感度解析を用いて次式により評価する。

$$f_{,X_i} = \{f(X_i^c + dX_i) - f(X_i^c)\} / dX_i \quad (i=1, \dots, N_x) \quad (6)$$

(6)式では、各インタバル変数についてノミナル値  $X_i^c$  まわりで微小増分  $dX_i$  を与えた上で応答解析を再度行う必要があるため、Taylor 展開による 1 次近似を用いる場合の応答解析の負荷は  $N_x$  である。

##### 4.2 Taylor 展開による 2 次近似を用いたインタバル解析法

Taylor 展開による 1 次近似を用いる方法は、応答解析の負荷を大幅に抑えることが可能である。しかしながら、Taylor 展開による 1 次近似は、不確定性の度合いが大きい場合には正解値に対する誤差が大きくなる傾向にあり、一般には目的関数の上下限値幅を過大に評価するため信頼性に乏しい。一方、Taylor 展開による 2 次近似を用いて目的関数を近似することによりロバスト性評価の精度の向上が期待される。Taylor 展開による 2 次近似で表わされる目的関数  $f^*$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{X}) = & f(\mathbf{X}^c) + \sum_{i=1}^{N_x} f_{,X_i} (X_i - X_i^c) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} f_{,X_i X_j} (X_i - X_i^c)(X_j - X_j^c) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに  $(\cdot)_{,X_i X_j}$  は、目的関数  $f$  の構造物パラメータ  $X_i$  および  $X_j$  に対する 2 次感度  $\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial X_i \partial X_j |_{X_i=X_i^c, X_j=X_j^c}$  を表す。数値感度解析により 2 次微係数 (Hessian 行列) を評価する場合には次式を用いる。

$$f_{,X_i X_j} = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} & f(X_i^c + dX_i, X_j^c + dX_j) - f(X_i^c, X_j^c + dX_j) \\ & - f(X_i^c + dX_i, X_j^c) + f(X_i^c, X_j^c) \end{aligned} \right\} / dX_i dX_j \quad (i \neq j) \\ \left\{ \hat{f}(X_i^c + 2dX_i) - 2\hat{f}(X_i^c + dX_i) + \hat{f}(X_i^c) \right\} / dX_i^2 \quad (i = j) \end{cases} \quad (8)$$

ここに  $\hat{f}(X_i)$  は、目的関数をインタバル変数  $X_i$  のみの関数とみなしたものであり、 $X_i$  以外のインタバル変数は全てノミナル値としている。(8)式における応答解析の負荷は、対角成分については  $2N_x$  であり、非対角成分は  $3(N_x^2 - N_x) / 2$  である。従って、Hessian 行列を数値感度解析により評価する場合には、勾配ベクトルを評価する場合に比べて応答解析の負荷が大幅に増大する。また、(7)式で表わされる目的関数の上下限値を推定するためには、(7)式の第 3 項において異なるインタバル変数同士の積、即ちクロス項が存在することに起因してインタバル変数の端点の組み合わせの違いが目的関数の変動に及ぼす影響を別途考慮する必要がある。

そこで、(7)式においてインタバル変数のクロス項を無視し、Hessian 行列の対角成分のみを用いて目的関数を近似する方法が考えられる。この場合の目的関数は次式で表わされる。

$$f^{**}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^c) + \sum_{i=1}^{N_x} \left\{ f_{,X_i} (X_i - X_i^c) + \frac{1}{2} f_{,X_i X_i} (X_i - X_i^c)^2 \right\} \quad (9)$$

(9)式では、各インタバル変数  $X_i$  による目的関数の変動項が独立している。例えばインタバル変数  $X_1$  に対する目的関数の変動量  $\Delta f_1$  は次のように表わされる。

$$\Delta f_1(X_1, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c) = f_{,X_1} (X_1 - X_1^c) + \frac{1}{2} f_{,X_1 X_1} (X_1 - X_1^c)^2 \quad (10)$$

(9)式で表わされる目的関数の上下限値を求めるには、 $\Delta f_i$  ( $i=1, \dots, N_x$ ) の最大値および最小値を逐次評価した上でそれらを加えればよい。例えば、 $\Delta f_1$  の上下限値は(10)式をインタバル拡張することにより求められ、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta f_1^I(X_1^I, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c) & \\ = & \left[ \begin{aligned} & \min \left[ \Delta f_1(\bar{X}_1, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c), \Delta f_1(\underline{X}_1, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c) \right], \\ & \max \left[ \Delta f_1(\bar{X}_1, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c), \Delta f_1(\underline{X}_1, X_2^c, \dots, X_{N_x}^c) \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式より、インタバル変数  $X_1$  の上下限値  $\bar{X}_1$ ,  $\underline{X}_1$  に対する  $\Delta f_1$  を 2 回算定すれば、 $\Delta f_1$  の上下限値が定まる。

##### 4.3 評価関数の非単調性を考慮した上下限値探索によるインタバル解析法

前節までの方法では、インタバル変数の端点で目的関数が最大・最小となる目的関数の単調性を仮定している。また、目的関数を Taylor 展開による近似で評価するため、不確定性の度合いが大きい場合や目的関数そのものが非単調性を有する場合には得られる結果に相当な誤差が含まれる可能性がある。ここでは、前節までの方法を拡張し、目的関数の非単調性を考慮可能なインタバル解析法を提示する。



目的関数  $f$  を最大化（もしくは最小化）する構造物パラメータの分布を推定することができれば、時刻歴応答解析による再解析を実施することで構造物の応答に関するロバスト性を高精度に評価することが可能となる。ここでは非対角項を無視した2次までの Taylor 展開により近似された目的関数  $f$  を用いて、その極値を与える構造物パラメータを見出すことを考える。

(10)式のように表わされるインタバル変数  $X_i$  ( $i=1, \dots, N_x$ ) に対する目的関数の変動項  $\Delta f(X_i)$  において、 $X_i - X_i^c$  を未知変数  $-dX_i \leq dX_i \leq \Delta X_i$  と見なせば、 $\Delta f(X_i)$  は次のように書き換えることができる。ただし、次式で表わされる  $\Delta f_i(dX_i)$  は、 $dX_i \equiv X_i - X_i^c$  と座標変換を行っているため(10)式で定義した関数形とは異なるが、簡単のためここでは同じ関数形を用いる。

$$\Delta f_i(dX_i) = \frac{1}{2} f_{,X_i X_i} (dX_i + f_{,X_i} / f_{,X_i X_i})^2 - f_{,X_i}^2 / 2 f_{,X_i X_i} \quad (12)$$

ここで  $\Delta f_i(dX_i)$  は  $dX_i$  に関する2次曲線となっており、 $\Delta f$  が最大もしくは最小となる場合の  $dX_i$  を陽に導くことが可能である。例えば、 $f_{,X_i X_i} < 0$  の場合では、 $\max[\Delta f_i]$  を与えるインタバル変数  $\hat{X}_i$  は次のように求められる。ただし、簡単のため  $\Delta \bar{X}_i = \Delta X_i = \Delta X_i$  とする。

$$\hat{X}_i = \begin{cases} X_i^c - f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} & (|f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}| \leq \Delta X_i) \\ X_i^c + \Delta X_i & (-f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} \geq 0, |f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}| > \Delta X_i) \\ X_i^c - \Delta X_i & (-f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} < 0, |f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}| > \Delta X_i) \end{cases} \quad (13)$$

(13)式より、 $dX_i$  を決定するためには勾配ベクトル  $f_{,X_i}$  および Hessian 行列(但し対角成分のみ)  $f_{,X_i X_i}$  が必要である。 $f_{,X_i}$  および  $f_{,X_i X_i}$  を評価する方法としては、ノミナルモデル(基準点)を固定し基準点周りで算定する方法が考えられる。しかしながら、上述の方法で評価される  $f_{,X_i}$  および  $f_{,X_i X_i}$  は、対象とするインタバル変数以外の不確定パラメータがノミナル値であるためインタバル変数の相互関係を考慮することが困難である。

本論文では、各次の感度を評価する基準点を随時更新する方法(=Updated Reference Point 法)を提示する。目的関数の上限値を評価する URP 法のフローは以下の通りである。

- Step1 目的関数  $f$  のノミナルモデル(基準点)周りの勾配ベクトル  $f_{,X_i}$  ( $i=1, \dots, N_x$ ) を算定する。
- Step2 勾配ベクトルの絶対値  $|f_{,X_i}|$  ( $i=1, \dots, N_x$ ) を降順に並び替える。対応するインタバル変数を  $\mathbf{X}_A = \{X_{A1}, \dots, X_{AN_x}\}$  とする\*。  
(\*この操作により目的関数  $f$  の変動に大きな影響を及ぼす構造物パラメータ  $\mathbf{X}$  を明らかにすることが可能となる。)
- Step3  $X_{A_k}$  に対する2次感度  $f_{,X_{A_k} X_{A_k}}$  (=スカラー量)を算定する。  
 $k=1$  の場合には評価点はノミナルモデルにおける基準点であり、 $k \geq 2$  の場合には評価点を更新しているため  $X_{A_k}$  に対する1次感度  $f_{,X_{A_k}}$  も再評価する。
- Step4 Taylor 展開による2次近似で表わされる目的関数の変動項  $\Delta f_k(X_{A_k})$  を最大化する  $\hat{X}_{A_k}$  を導く。
- Step5 インタバル変数  $X_{A_k}$  を現状の値から  $\hat{X}_{A_k}$  に変更し、評価点を更新する。変更した構造物パラメータに対応するシステム行列(例えば  $\mathbf{C}$  や  $\mathbf{K}$ )を更新する。
- Step6  $k=k+1$  とし、 $k=N_x$  まで Step3 から Step6 を繰り返す。
- Step7 全てのインタバル変数を更新後に時刻歴応答解析による再解析を実施し、目的関数の上限値を評価する。

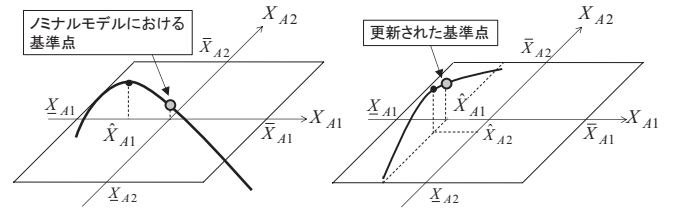


図4 目的関数の近似上限値に評価点を更新する URP 法の概略図

目的関数の下限値を評価する場合は、Step4 で  $\Delta f_k(X_{A_k})$  を最小化する  $\hat{X}_{A_k}$  を算定し、評価点を更新する。URP 法においては、目的関数の上限値と下限値に対応する評価点の遷移はそれぞれ独立したものであり、対象とする評価点を逐次更新した上で各次の感度を計算する必要があるため、4.2 節で示した方法に比べて応答解析の負荷が約3倍程度大きくなる。図4に URP 法の概略を図示する。

### 5. 数値解析による URP 法の検証

本節では、2 節で示した免震建物モデルに対して URP 法を適用し、不確定パラメータに対するインタバル解析を実施する。種々の方法(Taylor 展開による1次近似、2次近似、正解値)と比較し、URP 法の有用性を示す。正解値としては、(4)式で表わされる問題を制約付き最適化問題とし、逐次2次計画法(=SQP 法)を適用した結果を採用する。ここでは、初期値としてノミナルモデルで用いる構造物パラメータを与える。SQP 法は、評価点周りの勾配ベクトルに基づいて探索方向を決定するため、初期値に依存して局所最適解に陥ることも考えられるが、本節における数値例に関しては初期値依存性による正解値の変動は小さいことを確認している。

数値解析例における不確定パラメータ  $\mathbf{X}$  は、免震層減衰係数  $c_0$ 、免震層剛性  $k_0$ 、上部構造物構造減衰係数  $c_f$  および上部構造物層剛性  $k_f$  とし、インタバル変数  $\mathbf{X}^I$  を次のように表わす。

$$\mathbf{X}^I = \{c_0^I, k_0^I, c_f^I, k_f^I\} \quad (14)$$

上部構造の剛性(および減衰)については、数層にわたり同様のばらつきを与えることが適当となる場合も考えられるが、本手法ではそのような場合についても同様に扱うことが可能である。インタバル変数の変動の上下限を与える  $\bar{\mathbf{a}}$  および  $\underline{\mathbf{a}}$  は、インタバル変数の変動幅をノミナル値で除したもので定義し、次式で表わす。

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ \frac{\Delta c_0}{c_0^c}, \frac{\Delta k_0}{k_0^c}, \frac{\Delta c_{f1}}{c_{f1}^c}, \dots, \frac{\Delta k_{f1}}{k_{f1}^c}, \dots \right\}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \left\{ \frac{\Delta c_0}{c_0^c}, \frac{\Delta k_0}{k_0^c}, \frac{\Delta c_{f1}}{c_{f1}^c}, \dots, \frac{\Delta k_{f1}}{k_{f1}^c}, \dots \right\} \quad (15a,b)$$

### 5.1 免震建物モデルの特性

表1に20層( $N=20$ )上部構造物および免震層の諸元を示す。上部構造物の1層あたりの質量は1024 [t]とする。単位床質量を1.0 [t/m<sup>2</sup>]とすれば平面プランは、32 [m]×32 [m]に相当する。上部構造物質量は全層で一様(=m)とする。上部構造物の層剛性  $k_f$  は、免震層固定時の1次モードが直線形で与えられると仮定し、次式で求める。

$$k_{fi} = \frac{1}{2} \{N(N+1) - i(i-1)\} m \omega_1^2 \quad (i=1, \dots, N) \quad (16)$$

$\omega_1$  は、免震層固定時の上部構造物の1次固有円振動数であり、ここ

では 3.93 [rad/s](=1 次固有周期が 1.60s)とする。尚、上部構造物は、弾性範囲で挙動するものとする。

免震層の層剛性は上部構造物を剛体とみなし、免震層を含めた建物全体の総質量  $W_E$  を 1 質点とみなす振動系において 1 次固有円振動数  $\omega_0$  が 1.57 [rad/s](=1 次固有周期が 4.00s)となるように設定する。従って、免震層に要求される水平剛性  $k_0$  は次式となる。

$$k_0 = \omega_0^2 W_E \quad (17)$$

この時、免震層および上部構造物で構成される全体系の 1 次固有円振動数は、1.50 [rad/s](=1 次固有周期が 4.19s)となる。

免震構造のアイソレータの選定にあたっては、アイソレータの径およびゴム厚さ、ゴムのせん断弾性係数等を定める必要がある。設計時に留意すべき次項としては、1) 長期面圧が許容値以下であること、2) 十分な免震性能(変形能力および 1 次固有周期)を有していること、が挙げられる。本数値解析例においては、(17)式により免震層の層剛性を指定しているため、長期面圧に関する制約を満足するアイソレータを適切に選定する必要がある。アイソレータとして天然ゴム系積層ゴムを用いる場合は、免震層の層剛性は次式で与えられる。

$$k_0 = A_R G / T_R \quad (18)$$

ここに  $A_R$ 、 $T_R$  および  $G$  は、アイソレータの総断面積、積層ゴムの総厚さおよびゴムのせん断弾性係数である。(17)式および(18)式が等価であるとすれば、長期面圧  $\sigma_R$  は次式で求められる。

$$\sigma_R = g G T_R / \omega_0^2 \quad (19)$$

ここに  $g$  は重力加速度を表す。(19)式において  $T_R = 0.2$  [m]、 $G = 0.49$  [N/mm<sup>2</sup>] とすれば、 $\sigma_R = 9.74$  [N/mm<sup>2</sup>] となる。これは一般的な天然ゴム系積層ゴムアイソレータの長期許容圧縮面圧以下である。また、(18)式より、指定した免震性能に要求される免震層剛性からアイソレータの総断面積が規定される。本数値例ではアイソレータの径は  $\phi 1300$  とし、これを 20 基設置することに相当する。

免震層のオイルダンパーの減衰係数は、上部構造物を剛体とみなした際の 1 次減衰定数が 0.2 となるように与える。

## 5.2 入力地震動

本節における不確定性解析で用いる入力地震波は、地動最大速度が 50kine となるように基準化した代表的な記録地震波 4 波およびレベル 2 相当の模擬地震波とする。各地震波(地震波番号 1~5)の特性を表 2 に示し、加速度波形を図 5 に示す。

## 5.3 免震層水平変位応答に関するインタバル解析

本節では、目的関数を免震層最大水平変位とした場合の不確定性解析を行う。(15)式のばらつきの度合い  $\bar{\alpha}$  および  $\underline{\alpha}$  を次のように与える。

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.26 & (i=2) \\ 0.1 & (i=3, \dots, N+2) \\ 0.05 & (i=N+3, \dots, 2N+2) \end{cases}, \quad \underline{\alpha} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.15 & (i=2) \\ 0.1 & (i=3, \dots, N+2) \\ 0.05 & (i=N+3, \dots, 2N+2) \end{cases} \quad (20a,b)$$

(20)式において、 $i$  は不確定パラメータのインタバル番号を表し、 $i=1$  は免震層のオイルダンパーの減衰係数  $c_0$ 、 $i=2$  は免震層の剛性  $k_0$  を表す。ここで  $k_0$  は、正側と負側で変動幅を非対称とする。これは、経年変化による積層ゴムの硬化に起因してアイソレータの剛性が増大するためである<sup>6)</sup>。また、 $i=3, \dots, N+2$  は上部構造の減衰係数  $c_f$ 、

表 1 免震建物の諸元

	上部構造物	免震層
質量[t]	1024	3072
剛性[N/m]	(16)式	$5.81 \times 10^7$
減衰係数[Ns/m]	剛性比例型: 1 次減衰定数 0.02	$1.48 \times 10^7$

表 2 入力地震波の特性

	El Centro NS (1940)	Taft EW (1952)	Hachinohe NS (1968)	Tomakomai EW (2003)	BCJ L2
地動最大加速度[m/s <sup>2</sup> ]	4.59	5.07	3.32	0.90	2.41
地震波番号	1	2	3	4	5

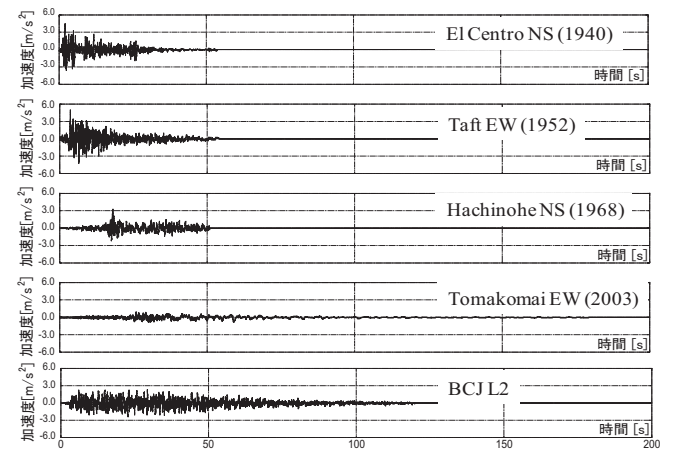


図 5 地動最大速度 50kine で基準化した入力地震動の加速度波形

$i=N+3, \dots, 2N+2$  は上部構造の層剛性  $k_f$  を表す。

図 6 は、各入力地震波に対する免震層水平変位の時刻歴最大応答値のばらつきに関するインタバル解析を、種々の方法(Taylor 展開による 1 次近似, Taylor 展開による 2 次近似, URP 法, 正解値(SQP 法))で行った結果を比較したものである。URP 法により得られた結果は、SQP 法を適用して得られた正解値と上下限共に良好に一致しており、URP 法の信頼性・有効性を示している。また、図より地震波番号 4 では、長周期成分が卓越しているためにノミナルモデルにおける応答値(以下ではノミナル応答値)が他の地震波に対して大きい。さらに、構造物パラメータの不確定性を考慮した場合には免震層最大水平変位は、およそ 0.5m になっており(ノミナル応答値からの変動は 1.39 倍)、標準的な積層ゴムの限界水平変形を上回る可能性も考えられる。一方、地震波番号 4 以外ではノミナル応答値に大ききばらつきは見ら

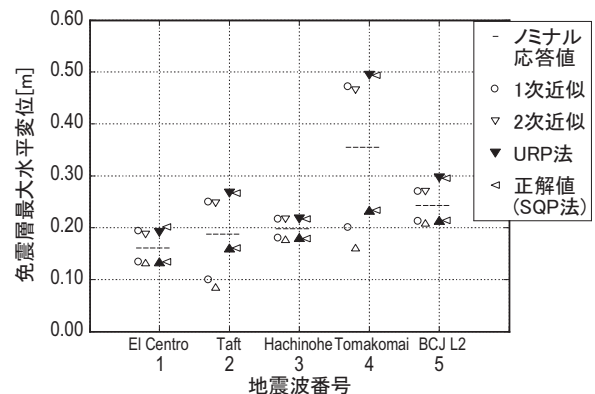


図 6 構造物パラメータのばらつきに対する免震層最大水平変位応答の上下限推定値

れないが、構造物パラメータの不確定性を考慮した場合の目的関数のばらつきの度合いは地震波により傾向が異なる。これは、構造物パラメータのばらつきに起因する免震建物の動特性の変化による影響が、地震波の周波数特性に依存して異なるためであると考えられる。

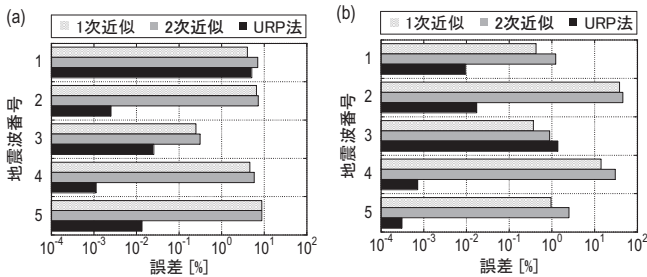


図7 種々の方法による免震層最大水平変位に関するインタバル解析結果の正解値からの誤差：(a) 上限値の誤差，(b) 下限値の誤差

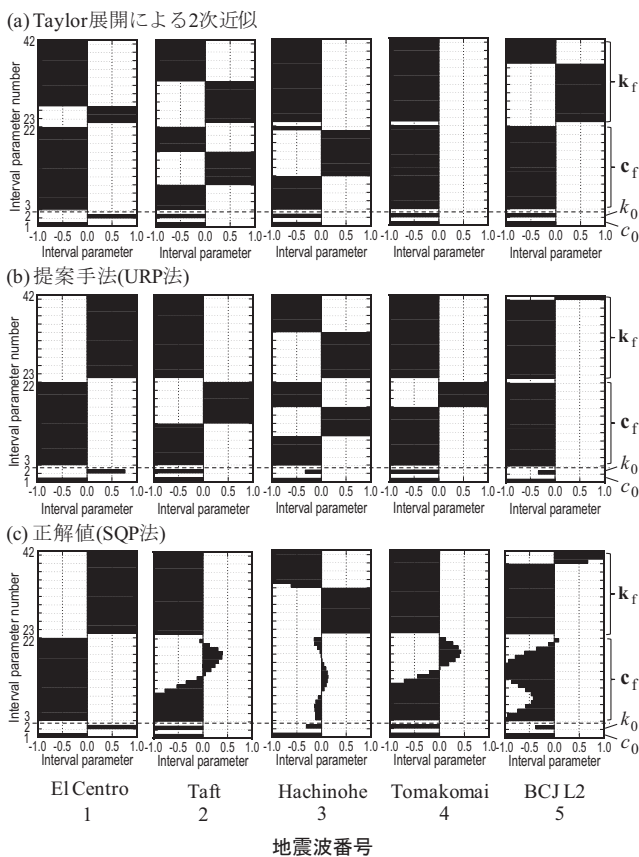


図8 免震層最大水平変位の上限値を与える構造物パラメータの比較

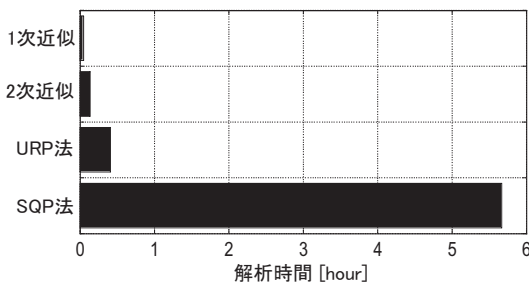


図9 種々の解析法における解析時間の比較

それぞれのインタバル解析法により得られた結果について精度検証を行う。図 7(a),(b)は、それぞれのインタバル解析法で得られた免震層最大水平変位の上下限値の正解値に対する誤差(=正解値との差を正解値で除した値)を、対数表記で図示したものである。Taylor 展開による1次近似および2次近似の方法でも目的関数の上下限値をある程度は予測することが可能であるといえるが、地震波によっては誤差が10%程度生じるものもあり、信頼性の高い評価が得られているとは言い難い。一方、URP 法により得られた目的関数の上下限値は正解値と良好に一致し、多くの地震波において誤差が0.1%以下(最大でも数%の誤差)となっていることが確認できる。

図8は、Taylor 展開による2次近似、URP 法およびSQP 法(≈正解)により得られた免震層最大水平変位の上限値を与える不確定パラメータの変動分布を示している。横軸は、それぞれのインタバル変数のノミナル値からの変動率を-1 から1に割り当てたものである。横軸で-1となる場合は、インタバル変数  $X_i$  が下限値  $X_i$  をとった場合がクリティカルなケースとなることを意味し、横軸で0となる場合は、インタバル変数  $X_i$  がノミナル値であることを表す。また、図8において縦軸は、(14)式で定義したインタバル変数の番号を表す。即ち、インタバル変数番号1および2が免震層減衰係数および免震層剛性に相当し、インタバル変数番号3から22までは上部構造物の構造減衰係数、インタバル変数番号23から42は上部構造物の剛性を表す。

Taylor 展開による2次近似を用いたインタバル解析法では、それぞれのインタバル変数の端点において目的関数の変動を評価する。従って、図8(a)ではインタバル変数が中間値をとることはない。一方、URP 法およびSQP 法では、目的関数の非単調性を考慮し、インタバル変数の領域内で目的関数を最大化する変数のクリティカルな組み合わせを見出すことが可能である。図8(b)より、免震層減衰係数はいずれの地震波においても下限値をとった場合がクリティカルである。一方、地震波番号1,3および5では、免震層剛性はインタバル変数の領域内に解が存在する。図8(c)の結果と比較すれば、地震波番号3および5では良好に一致しているといえる。最終的に図8(b)と図8(c)を比較すれば、上部構造物パラメータの分布が一部異なる結果となっているが、免震層減衰係数(インタバル変数番号1)および免震層剛性(番号2)のクリティカルな分布がほぼ一致しているため、URP 法は不確定パラメータに対する目的関数の上限値を高精度に評価することが可能となっていると考えられる。

図9は、各インタバル解析法およびSQP 法による不確定性解析の所要時間を図示したものである(CPU: Core i7 3.57GHz, Memory: 6GB)。SQP 法は初期値依存性があり、誤差許容値の設定に依存して解析時間が大きく変動する。一方、URP 法は、Taylor 展開による1次近似および2次近似を用いたインタバル解析法に比べて解析時間において若干不利であるが、比較的短時間で極めて高精度なロバスト性解析が可能となる有効な方法であるといえる。

#### 5.4 頂部絶対加速度応答に関するインタバル解析

本節では、目的関数を頂部絶対加速度応答の最大値とした場合のインタバル解析を行う。免震建物のモデルパラメータ、ばらつきの度合いおよび入力地震動については前節と同様である。図10は、図6と同様に各入力地震動に対する頂部絶対加速度応答の最大値のばらつきに関するインタバル解析の結果を比較したものである。



図10より、地震波番号2に対して上限値の変動が最も顕著であり、ノミナル応答値からの変動は1.43倍となっている。地震波番号2の上限値に関しては、いずれの方法を用いても大きな差異は見られない。しかしながら、Taylor展開による1次近似および2次近似を用いた手法では、一部の地震波に対する目的関数の上限値を正解値に対して過小評価している。一方、URP法では、地震波番号5の下限値を除いて、ほぼすべての地震波に対する目的関数の上下限値が正解値と良好に一致しており、頂部絶対加速度応答の最大値に対しても本手法が有効であるといえる。地震波番号5において下限値がノミナル応答値を上回っている理由については、後述する。

図11(a),(b)は、図7と同様に、各インタバル解析法で得られた頂部絶対加速度応答の最大値の上下限値の正解値に対する誤差を図示したものである。URP法により得られる上限値については、ほぼ全ての地震波において正解値との誤差が0.1%程度以下に抑えられており、極めて高精度な評価が可能であるといえる。尚、図11(b)の地震波番号3においては、Taylor展開による2次近似で表わされた目的関数を最小化する構造物パラメータのクリティカルな組み合わせが正解値と厳密に一致した。従って、目的関数の上下限値は、正解値と完全に一致するため誤差は生じなかった。一方、図11(b)の地震波番号5では10%を超える誤差が見られる。これは、地震波番号5は模擬波であり、振幅がほぼ定常状態となる時間が比較的に長い為、頂部絶対加速度応答の最大値を与える時刻が構造物パラメータの変更に伴って変化し、数値感度の評価が困難となるためであると考えられる。しかしながら、下限値は設計上大きな問題とならないものと思われる。

図12は、図8と同様にそれぞれのインタバル解析法で得られた目的関数の上限値を与えるインタバル変数の分布を示している。これらと比較すれば、Taylor展開による2次近似を用いた従来の方法に比べ、URP法で得られた構造物パラメータのクリティカルな分布は、SQP法の結果と概ね良好に一致していることが確認できる。特に、図12(b)と図12(c)と比較すれば、上部構造物パラメータの分布が一部異なる部分が存在するものの、免震層減衰係数(インタバル変数番号1)および免震層剛性(番号2)のクリティカルな分布がほぼ一致しているため、URP法は頂部絶対加速度応答の最大値に対しても不確定パラメータに対する上限値を高精度に評価することが可能となっていると考えられる。

通常の免震建物の設計では、上部構造の構造物特性のばらつきを考

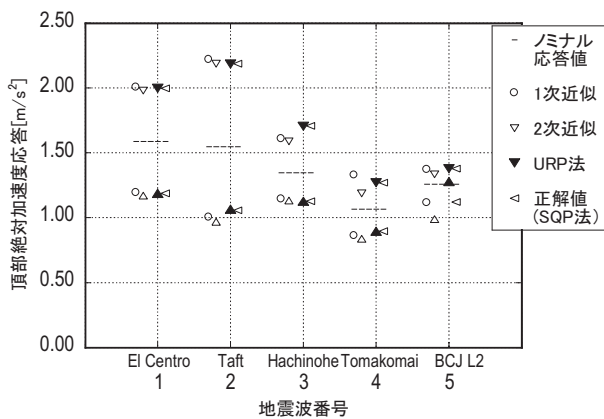


図10 構造物パラメータのばらつきに対する頂部絶対加速度応答の最大値の上下限推定値

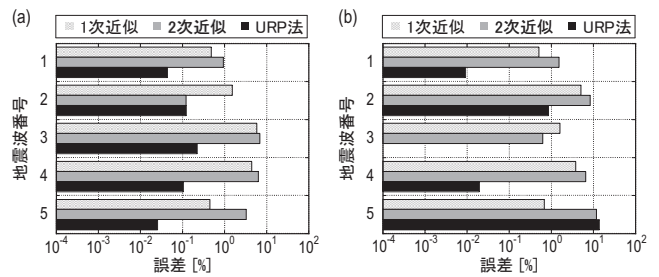


図11 種々の方法による頂部絶対加速度応答に関するインタバル解析結果の正解値からの誤差: (a)上限値の誤差, (b)下限値の誤差

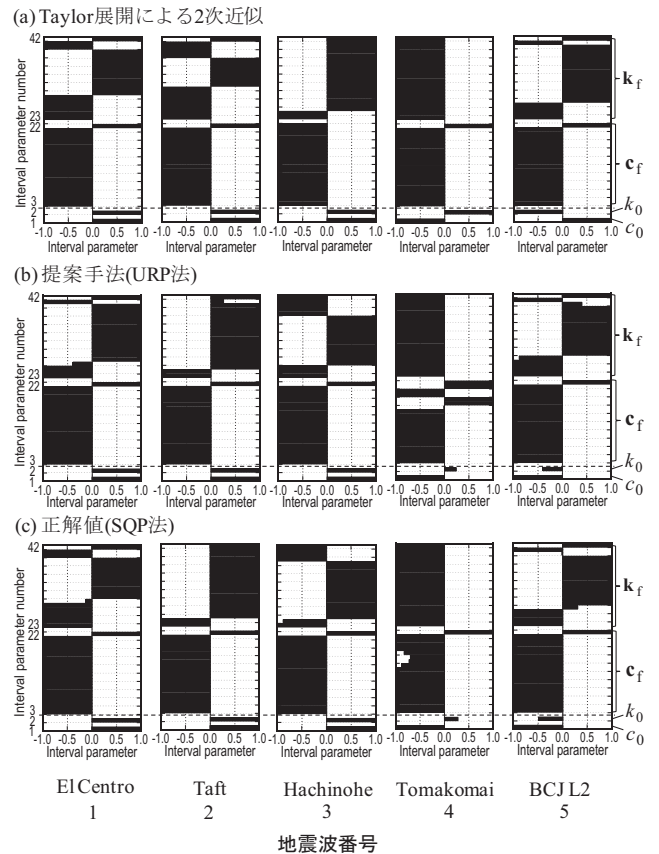


図12 頂部絶対加速度の上限値を与える構造物パラメータの比較

慮することは稀である。免震層水平変位に関しては、免震層の特性変動による影響が支配的であるが、層間変位や頂部絶対加速度などの上部構造物に関する応答は、上部構造物の構造物パラメータのばらつきによる影響を無視することができないため、設計時には留意すべきである。

## 6. 結論

本論文では、基礎免震を有する免震建物について、構造物パラメータの不確定性を考慮して免震建物に有する頑強さ(ロバスト性)を評価するインタバル解析法を提案した。本論文により得られた成果は以下の通りである。

- (1) 種々の入力地震動に対する免震層水平変位および頂部絶対加速度応答の最大値を目的関数とし、免震層および上部構造物の不確定性を考慮した場合の目的関数のばらつき、即ち免震建物のロバ

スト性を効率的に評価する独自の方法を提示した。本手法により、製作誤差、温度・振動数依存性や経年変化等によるアイソレータやダンパーの性能のばらつき、さらには上部構造の剛性変動（RC構造ではヤング係数などによる変動）という種々の不確定性に対する免震性能の変化を高精度に評価することが可能である。

- (2) 本手法は、不確定性解析における有力な方法の一つであるインタバル解析法において、目的関数を Taylor 展開により近似する既往の方法を拡張したものである。即ち、Taylor 展開による 2 次近似で表わされた目的関数の最大値および最小値を与える構造物パラメータが、目的関数の勾配ベクトルならびに Hessian 行列により陽に表わされることを利用している。通常のインタバル解析法は目的関数の単調性を前提としており（Inclusion monotonic 仮定）、不確定パラメータの変動幅の上下限において目的関数を評価している。一方、本提案手法は目的関数の非単調性を考慮することが可能であり、不確定パラメータのばらつきの度合いが大きい問題に対しても有効である。
- (3) 目的関数を最大化（もしくは最小化）する不確定パラメータの組み合わせを高精度に見出すには、Taylor 展開による 2 次近似で表わされた目的関数を最大化（もしくは最小化）する不確定パラメータを求めた上で、不確定パラメータの変動に応じて現在の状態から目的関数の基準点を更新する Updated Reference Point (URP) 法が有効であることを示した。URP 法では、目的関数の基準点が更新された際に、対象とする不確定パラメータに対する現在の基準点まわりにおける各次の感度を逐次評価する必要があり、応答解析の負荷は増大する。しかしながら URP 法では、制約付き最適化問題を逐次 2 次計画法(SQP 法)に代表される種々の方法で詳細に評価する方法に対して比較的短時間でかつ極めて高精度な結果を得ることが可能である。
- (4) 天然ゴム系積層ゴムとオイルダンパーで構成される基礎免震を有する 20 層免震建物を対象とし、最大速度で標準化した代表的な入力地震波に対して構造物パラメータの不確定性を想定した場合の構造物応答のばらつきを評価した。種々の地震波に対するノミナルモデルにおける応答値がほぼ同レベルであっても、地震波の特性に依存して目的関数のばらつきの変動幅は大きく異なることを示した。免震層水平変位については、免震層減衰係数は、設計値を下回った場合が全ての地震波において不利である。一方、免震層剛性については地震波によりクリティカルとなるケースが異なり、必ずしもばらつきの上下限值において構造物応答が最大化されるとは限らないため、目的関数の非単調性を考慮できる本手法が極めて有効であることを示した。
- (5) 免震層の水平変位については、ノミナルモデルにおいて応答値が大きくなる長周期地震動に対して特に留意する必要がある。これは、構造物パラメータの変動による免震建物の周期の変化が、免震層の挙動に対して敏感となるためであると考えられる。数値例

で対象とした Tomakomai EW(2003)では、クリティカルな構造物パラメータの組み合わせに対する免震層水平変位がノミナルモデルにおける応答値に対して 1.39 倍となっている。

- (6) 頂部絶対加速度応答については、地動最大加速度が大きい地震波においてばらつきが大きくなる傾向にある。数値例で対象とした Taft EW(1952)では、ノミナルモデルにおける応答値に対して 1.43 倍となっている。頂部絶対加速度応答を最大化するクリティカルな不確定パラメータの分布の傾向においては、免震層の層剛性が正側に分布することが多い。アイソレータとして積層ゴムを用いる場合では、経年変化によるゴムの硬化が懸念されており、頂部絶対加速度応答に及ぼす影響については設計時に留意する必要がある。

## 謝辞

本研究の一部は、日本学術振興会の特別研究員奨励費 (No.21・364)および科研費(No.21360267)による。ここに記して謝意を表する。

## 参考文献

- 1) 日本建築学会, 免震構造設計指針, 2001.
- 2) Y. Ben-Haim and I. Elishakoff: Convex models of uncertainty in applied mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1990.
- 3) 寒野善博, 竹脇 出: 剛性および外力の不確定性を考慮したトラスのロバストネス関数に対する近似アルゴリズム, 日本建築学会構造系論文集, 第 591 号, pp53-60, 2005.5.
- 4) 東野雅彦, 和田 章: 地震入力に対してロバスト性のある免震構造に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 641 号, pp1233-1240, 2009.7.
- 5) I. Takewaki: Robustness of base-isolated high-rise buildings under code-specified ground motions, *Struct. Design Tall Spec. Build.*, **17**, pp257-271, 2008.
- 6) 日本免震構造協会, 免震構造 部材の基本から設計・施工まで, 2010.
- 7) Y. Ben-Haim: Information-gap decision theory: decisions under severe uncertainty. Academic Press, San Diego, 2001.
- 8) I. Takewaki and Y. Ben-Haim: Info-gap robust design with load and model uncertainties, Special Issue: Uncertainty in Structural Dynamics, *J. Sound & Vibration*, **288**(3), pp551-570, 2005.
- 9) 趙衍剛, 小野徹郎, 鈴木 誠: パラメータの不確定性を考慮した動的構造信頼性評価, 日本建築学会構造系論文集, 第 497 号, pp33-38, 1997.7.
- 10) S. Rao and L. Berke: Analysis of uncertain structural systems using interval analysis, *ALAA Journal*, **34** (4), pp727-735, 1997.
- 11) Z. Qiu and I. Elishakoff: Antioptimization of structures with large uncertain-but-nonrandom parameters via interval analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **152**, pp361-372, 1998.
- 12) Z. Qiu, S. Chen, D. Song: The displacement bound estimation for structures with an interval description of uncertain parameters, *C. Numer. Meth. Engrg.*, **12**, pp1-11, 1996.
- 13) S. Chen, L. Ma, G. Meng and R. Guo: An efficient method for evaluating the natural frequency of structures with uncertain-but-bounded parameters, *Comp. Struct.*, **87**, pp582-590, 2009.

(2011年3月7日原稿受理, 2011年4月28日採用決定)