Title	スパース最適制御の数値計算について
Author(s)	池田, 卓矢; 永原, 正章
Citation	電子情報通信学会技術研究報告 (2014)
Issue Date	2014
URL	http://hdl.handle.net/2433/190989
Right	©2014 IEICE.
Type	Conference Paper
Textversion	publisher

社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

スパース最適制御の数値計算について

池田　卓矢†　永原　正章†

† 京都大学情報学研究科

あらまし　本稿では，状態の L^2 正則化項を考慮したスパース最適制御を考察する．まず，この問題の最適解が，制御問題の正規性の仮定の下で L^1 最適制御の最適解と一致することを示す．これにより，スパース最適制御解の数値計算が L^1 最適制御の計算に帰着される．次に，正規性が満たされるための十分条件を導出する．また，その条件を満たすような制御問題の例を挙げ，スパース最適制御の数値計算結果を示す．

キーワード　スパース最適制御，L^1 最適制御，凸最適化，省エネルギー

On Numerical Computation of Sparse Optimal Control

Takuya IKEDA† and Masaaki NAGAHARA†

† Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract　In this article, we consider sparse optimal control with L^2 regularization for the states. Under the normality assumption, we prove that the solutions of the sparse optimal control problem coincide those of an L^1 optimal control problem. By this theorem, we can numerically compute the sparse optimal control via L^1 optimal control. We also show a sufficient condition for the normality assumption, and illustrate numerical examples.

1. はじめに

人類は，自然環境を資本に文明を切り拓き続けた結果，その代償として地球規模での環境問題に現在，直面している．環境問題の重大性を否定する人はほとんどいないであろう．環境問題は現代社会が解決すべき大きな問題である．

そこで本稿では，エコロジーな制御であるスパース最適制御について考察する．ここでスパースな制御とは，定義されている時間区間の長さに比べて，その台の長さが短い入力信号によって，システムを制御することを意味する．制御入力が厳密に 0 である区間においてはアクチュエータを休止させる事ができる．例えば自動車の場合，アクチュエータのひとつとしてガソリンエンジンが使われており，これが休止しているときには，CO_2 の排出量や騒音を抑制でき，また，燃料であるガソリンもその時間区間では使う必要もなくなるので，資源の確保にもつながる．したがって，スパース最適制御により，環境問題の解決への貢献も期待できる．

ここで，制御入力が加えられる時間が最短であればいいかというと，いつでもそうとは限らない．そのときの状態があまりに望ましくない振る舞いをしてしまっては，実際に使用することは憚られる．そこで，純粋に制御信号の台の長さが最短であるような制御入力を求めるのではなく，状態の振る舞いも考慮したスパースな最適制御を本稿では考察する．

次に，本稿の構成であるが，第 2 節でこのテーマを解決するにあたり必要となる数学的な記号の準備を行い，第 3 節でスパース最適制御問題およびその凸緩和問題である L^1 最適制御問題を定式化する．第 4 節で L^1 最適制御について，その性質を述べ，第 5 節でスパース最適制御問題と L^1 最適制御問題のそれぞれの最適解が一致するための十分条件を導出する．この十分条件には正規性という性質が本質的であり，この正規性の判定定理を第 6 節で導く．第 7 節にて，具体的な数値例題により提案手法の有効性を示す．

2. 数学的準備

時間区間 $[0,T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ に対して，その L^p ノルム $(p>0)$ を

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

で定義する．ただし，$0<p<1$ のときには L^p ノルムはノルムの公理のうち三角不等式の成立を保証できないので，厳密にはノルムではない．また，u の L^0 ノルムをその台の長さ，すなわち

$$\|u\|_0 = m(\mathrm{supp}(u)) = m(\overline{\{t\in[0,T] : u(t)\neq 0\}})$$

で定義する．ここで，m は $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度であり，$\overline{S}$ は集合 S の閉包，$\mathrm{supp}(u)$ は信号 u の台を表す．L^0 ノルムはノルムの公理のうちの，斉次性，すなわち，スカラー a と信号

u に対して $||\,au\,||_0 = |\,a\,|\,||\,u\,||_0$ という性質が一般には成り立たない．したがって，厳密には $||\cdot||_0$ はノルムではないが，ここでは慣例に従い，L^0 ノルムと呼ぶことにする(注1)．

3. スパース最適制御問題

本稿では，次の線形時不変モデルで表される制御対象を考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t).$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ とし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ とする．この制御対象に対して，初期値 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ から，終端値 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{0}$ まで状態を遷移させる入力で，制約

$$|\,u(t)\,| \leqq 1, \quad \forall t \in [0,T]$$

を満たすものを許容制御と呼び，すべての許容制御からなる集合を U で表すことにする．今，考えたい問題は，この許容制御のうち台の長さができるだけ短く，かつ状態の振る舞いも考慮した制御入力を見つけることである．このうち，制御入力 u の台の長さを短くすることは，u の L^0 ノルムを小さくすることに対応する．また，状態は重みつき L^2 ノルムを用いて抑制する．すなわち，今解きたい問題は次のように定式化される．

［問題 1］（スパース最適制御問題） 許容制御のうち，次の評価関数を最小化する制御入力を求めよ．

$$J_0(u) = \lambda\,||\,u\,||_0 + \int_0^T \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t)\,dt.$$

ここで，λ は正の重み定数であり，Q は半正定値対称な重み行列である．

この問題は非凸であるため，最適制御解を計算することはきわめて困難である．そこで，この問題の凸緩和である次の問題を考える．

［問題 2］（L^1 最適制御問題） 許容制御のうち，次の評価関数を最小化する制御入力を求めよ．

$$J_1(u) = \lambda\,||\,u\,||_1 + \int_0^T \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t)\,dt.$$

ここで，λ は正の重み定数であり，Q は半正定値対称な重み行列である．

問題 2 は凸最適化問題であるから，数値計算により容易に解を得ることができる(注2)．そして実は，ある仮定の下で，問題 1 と問題 2 の最適制御解からなるそれぞれの集合は一致することが示される．

4. L^1 最適制御

この節では L^1 最適制御問題の最適解の性質について整理する．まず，L^1 最適制御問題（問題 2）に対するハミルトニアンは次で定義される．

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},u) = \lambda\,|\,u\,| + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x} + Bu).$$

ここで，$\boldsymbol{p}$ は共状態ベクトルであり，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ である．ここで，もし問題 2 の最適解 u^* が存在したとすると，それに対応する状態を $\boldsymbol{x}^*$ で表すことにすれば，Pontryagin の最小原理 [1] から，次を満たす $\boldsymbol{p}^*$ が存在する．

$$H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{p}^*,u^*) \leqq H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{p}^*,u), \quad \forall u \in U,$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}^* = A\boldsymbol{x}^* + Bu^*, \quad \dot{\boldsymbol{p}}^* = -(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^* + 2Q\boldsymbol{x}^*).$$

そしてこのときの最適解 u^* は次の式で与えられる．

$$u^*(t) = -\mathrm{dez}\left\{\frac{B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^*(t)}{\lambda}\right\}.$$

ここで，関数 dez は不感帯関数と呼ばれるものであり，その定義は次の通りである．

$$\mathrm{dez}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & |x| < 1, \\ -1, & x < -1, \end{cases}$$
$$\mathrm{dez}(1) \in [0,1], \quad \mathrm{dez}(-1) \in [-1,0].$$

したがって，例えば $B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^*(t)$ がある区間 $[t_1,t_2]$ $(t_1 < t_2)$ において，恒等的に定数 λ という値をとったとすると，その区間において最適解 u^* の値は最小原理からは一意に決定できない．このような区間 $[t_1,t_2]$ をもつ制御問題を特異 (singular) な問題といい，反対に，このような正の測度を持つ区間が存在しない制御問題のことを正規な (normal) な問題と呼ぶ．L^1 最適制御問題（問題 2）の正規性の定義は次の通りである．

［定義 1］（正規性） L^1 最適制御問題（問題 2）が正規であるとは，高々可算個の点 $t = \tau_1, \tau_2, \ldots$ に対して $|\,B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^*(t)\,| = \lambda$ が成り立つときをいう．

これより，L^1 最適制御問題（問題 2）が正規ならば，その最適制御入力 u^* は高々可算個の点を除いて，$1, 0, -1$ の 3 値のいずれかをとることがわかる．

5. スパース最適制御と L^1 最適制御

この節では，スパース最適制御問題（問題 1）の解と L^1 最適制御問題（問題 2）の解との関係性について述べる．

［定理 1］ L^1 最適制御問題（問題 2）が少なくとも一つの解をもち，かつ正規であるならば，スパース最適制御問題（問題 1）の解も存在し，それらの解集合は一致する．

(証明) まず，任意の $u \in U$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \lambda \int_0^T |\,u(t)\,|\,dt + \int_0^T \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t)\,dt \\ &\leqq \lambda \int_{\mathrm{supp}(u)} 1\,dt + \int_0^T \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t)\,dt \\ &= \lambda\, m(\mathrm{supp}(u)) + \int_0^T \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t)\,dt \\ &= J_0(u). \end{aligned} \tag{1}$$

(注1)：このように呼ばれる理由としては，$f \in L^1[0,T]$ に対して $||\,f\,||_0 = \lim_{p\to 0} ||\,f\,||_p^p$. 成り立つことにある．これは Hölder の不等式や Lebesgue の収束定理を用いて証明される [2]．

(注2)：問題 2 の解が存在するためには，最短時間問題の解 T^* 以上の制御時間 T をとらなければならない．

次に，L^1 最適制御解の集合を U_1^*，スパース最適制御解の集合を U_0^* とおくと，仮定により，$u_1^* \in U_1^*$ が存在し，u_1^* に対する状態を $\boldsymbol{x}_1^*$ と書くことにする．仮定から問題 2 は正規であるので，

$$
\begin{aligned}
J_1(u_1^*) &= \lambda \int_0^T |\, u_1^*(t) \,|\, dt + \int_0^T \boldsymbol{x}_1^*(t)^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{x}_1^*(t)\, dt \\
&= \lambda \int_{\mathrm{supp}(u_1^*)} 1\, dt + \int_0^T \boldsymbol{x}_1^*(t)^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{x}_1^*(t)\, dt \qquad (2) \\
&= J_0(u_1^*).
\end{aligned}
$$

よって，(1), (2) と u_1^* の最適性により，任意の $u \in U$ に対して次が成り立つ．

$$J_0(u_1^*) = J_1(u_1^*) \leqq J_1(u) \leqq J_0(u).$$

したがって，$u_1^* \in U_0^*$ であり，U_0^* は空でない．よって，$u_0^* \in U_0^*$ をとることができて，(1), (2) と u_1^*, u_0^* の最適性により

$$J_1(u_1^*) \leqq J_1(u_0^*) \leqq J_0(u_0^*) \leqq J_0(u_1^*) = J_1(u_1^*).$$

特に，$J_1(u_0^*) = J_1(u_1^*)$ および $J_0(u_0^*) = J_0(u_1^*)$ が成り立つ．今，u_0^* と u_1^* はそれぞれ U_0^* と U_1^* の任意の元であるから，$U_0^* \subset U_1^*$ かつ $U_1^* \subset U_0^*$ となるので，$U_0^* = U_1^*$ であることがわかる． ■

定理 1 は問題 1 と問題 2 の解集合が一致するための必要条件を述べているが，証明に使用した正規性の性質は，問題 2 の最適解が Lebesgue 測度に関してほとんどいたるところで $1, 0, -1$ の 3 値をとっている，ということのみである．したがって，問題 2 が正規でなくとも，その最適解が存在し，かつ，それが Lebesgue 測度に関してほとんどいたるところで $1, 0, -1$ の 3 値をとっていれば，この定理は成り立つ．

また，ここで Q を $\mathbf{R}^{n\times n}$ の零行列としてとれば，問題 1 は評価関数から状態に関する正則化項を除いたものになるから，純粋に台の長さが最も短くなる制御入力（真にスパースな制御入力）を求める問題を考えていることになる．すなわち，次の問題 3 と問題 4 を考えたときも，それぞれの最適解からなる集合は定理 1 と同じように，系 1 で述べられる関係を持つ．

［問題 3］ 許容制御のうち，次の評価関数を最小化する制御入力を求めよ．

$$J_0'(u) = \lambda \,||\, u \,||_0,$$

ここで，λ は正の重み定数である．

［問題 4］ 許容制御のうち，次の評価関数を最小化する制御入力を求めよ．

$$J_1'(u) = \lambda \,||\, u \,||_1.$$

ここで，λ は正の重み定数である．

［系 1］ 問題 4 が少なくとも一つの解をもち，かつ正規(注3)であるならば，問題 3 の解が存在し，さらに，問題 3 と問題 4 の解集合は一致する．

6. 正規性のための十分条件

定理 1 から，L^1 最適制御問題（問題 2）が正規であるときには，非凸な最適制御問題であるスパース最適制御問題（問題 1）が凸である L^1 最適制御問題に帰着されることから，どのような条件が満たされるときに L^1 最適制御問題（問題 2）が正規となるのかを簡単に調べる方法があれば望ましい．このような方法の一つとして，L^1 最適制御問題（問題 2）の特異性の条件から調べる方法を提案する．

［定理 2］ ［問題 2 が特異であるための必要条件］ $P_1 = Q$, $P_i = QA^{i-1} - A^{\mathrm{T}} P_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ によって行列の列 P_i を定義する．$B^{\mathrm{T}} P_1 B = \cdots = B^{\mathrm{T}} P_{n-2} B = 0$ と仮定する．もし与えられた問題が特異であるならば，ある正の長さの区間 $I \subset [0, T]$ が存在して，任意の $t \in I$ に対して

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} P_1 \boldsymbol{x}(t) & \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{x}(t) & \ldots & \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{x}(t) \\
0 & b_1 & \ldots & b_n \\
2B^{\mathrm{T}} P_1 \boldsymbol{x}(t) & (AB)_1 & \ldots & (AB)_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2B^{\mathrm{T}} P_{n-1} \boldsymbol{x}(t) & (A^{n-1}B)_1 & \cdots & (A^{n-1}B)_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t)
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} C & \pm\lambda & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.
$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{a}_k$ は A の第 k 行ベクトル，$B = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, $(AB)_k$ は $n \times 1$ 行列 AB の第 k 成分を表し，C は定数である(注4)．

注意として，この定理 2 は $n \geqq 3$ 以上のときに使えるものであるが，上から 3 行目までの等式は L^1 最適制御問題（問題 2）が特異であれば成り立つ等式であるから，$n = 1, 2$ のときにでも 3 つの式からなる連立方程式は作ることができる．また，上の定理は $B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t)$ を $|\, B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t) \,| = \lambda$ となる区間の上で微分して導出したものであり，$B^{\mathrm{T}} P_i B$ とは，この過程の中で u の係数にあらわれるものである．今，u には微分可能性を与えていないので，微分の操作を繰り返すためにこの仮定を課した．しかし，もしいずれかの $B^{\mathrm{T}} P_i B$ が 0 でないという場合には，u の形が決定されることになるので，ある程度の連立方程式は得ることができる．

もし仮定が満たされているにもかかわらず，定理 2 の中の連立方程式や，正準方程式，状態方程式などの間に矛盾が生じた際には，その問題には正規であるという判定が下される．このことを利用して一つの正規な問題の簡単な例を次節で示す．

7. 数 値 例

本節では，質量 1[kg]，ばね係数 2[N/m]，粘性摩擦係数 3[N/m/sec] をもつマス-ばね-ダンパ-システムを考える．このシステムは，入力を u [N]，物体の平衡点からの変位を x_1 [m]，物体の速度を x_2[sec/m] としたとき，次の状態方程式で

(注3)：問題 4 の最適解も不感帯関数であるので，この問題に対しても問題 2 と同様に，正規性が定義できる．

(注4)：この定数 C とは，$H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*, u^*)$ の値を意味する．詳しくは [1] を参照されたい．

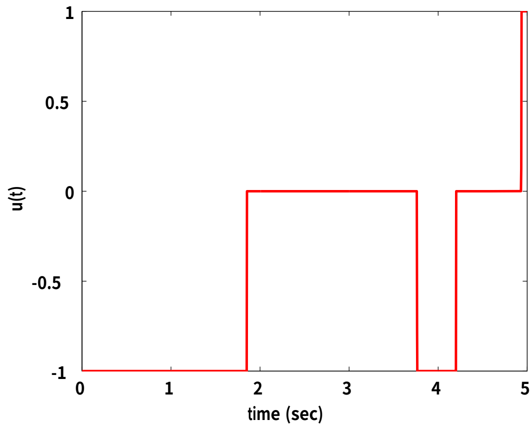

図 1　最適制御入力 $u^*(t)$

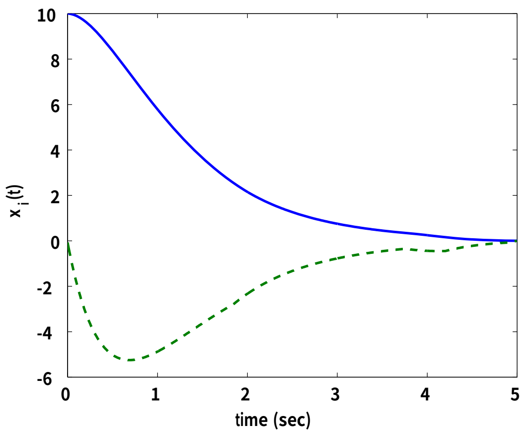

図 2　図 1 の制御入力に対する状態：$x_1(t)$（実線），$x_2(t)$（破線）

表される．

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

評価関数における重みを

$$\lambda = 1, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．証明は与えないが，この例は正規な問題を与えていることを定理 2 から示すことができる．そして，このシステムに対して，時間区間を離散化したもとで行ったシミュレーション結果が図 1 と図 2 である．

確かに，この最適入力は高々可算個の点を除いた集合の上で，$1, 0, -1$ の 3 値をとっていることがわかる．ゆえに，この入力は L^1 最適制御解であるだけでなく，スパース最適制御解にもなっていることがわかる．実際，このときの非零な制御入力を印加している時間は 2.36 秒であり，全体の 5 秒のうち，47.2%で済んでいる．

次に速度 $x_2(t)$ に制約 $-4.8 \leqq x_2(t) \leqq 10$ を課した場合の計算を行う．シミュレーション結果を図 3 と図 4 に示す．図 3 からわかるように，問題が正規であっても制約条件を加えると，その最適解は，$1, 0, -1$ をほとんどいたるところでとっている

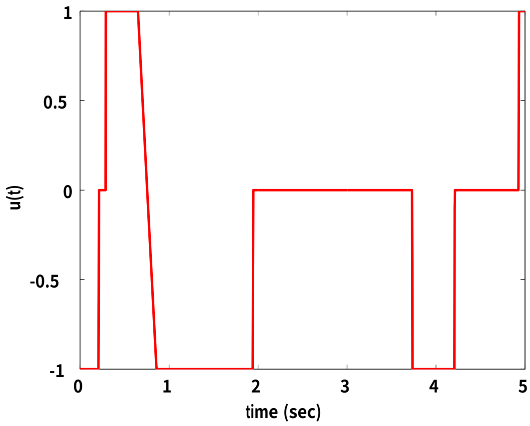

図 3　最適制御入力 $u^*(t)$

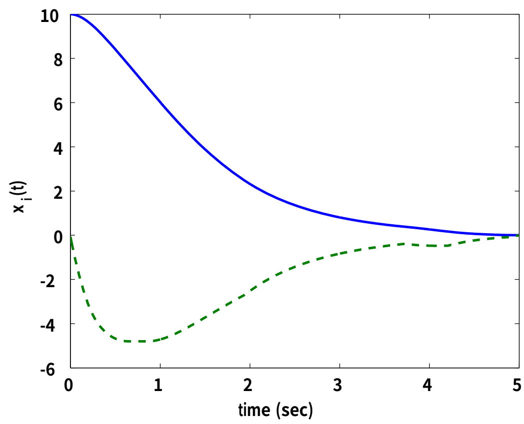

図 4　図 3 の制御入力に対する状態：$x_1(t)$（実線），$x_2(t)$（破線）

とは言えず，先ほどの結果とは異なっていることがわかる．したがって，このような場合にはスパース最適制御の解が得られている保証はない．このような場合をどのように解決するかは今後の課題である．

8. おわりに

本稿では，エコロジーな制御を目標に，状態を考慮したスパースな最適制御問題（問題 1）を設定し，ある仮定の下で，その最適解は L^1 最適制御問題（問題 2）の最適解と一致することを示した（定理 1）．本稿では線形時不変システムしか取り扱わなかったが，定理 1 は非線形システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})\,u$ に対しても成り立つことは容易に確認できる．ただし，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ や $B(\boldsymbol{x})$ にはある程度の滑らかさを仮定する．また，本稿では 1 入力システムについてのみ述べたが，多入力システムについても同様の議論をすることは可能である．

文　献

[1] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal, Control*, Dover Publications, 2007.

[2] T. Tao, *An Epsilon of Room, I; Real Analysis*, AMS, 2011.

[3] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and D. Nešić, Maximum hands-off control and L^1 optimality, *Proc. of 52nd IEEE CDC*, 2013.

[4] 永原，省エネルギーのためのスパース制御，信学技報，RRRC2013-24, 2013.