重力式砂防堰堤における3次元応力の研究

遠藤隆一

緒　　言

重力式砂防堰堤，あるいは一般にその他の目的のために築造される重力式堰堤において，その断面の安定計算は主として畳積工として取扱つている。近時，発電その他の用に供せられる重力堰堤にあつては，拱堰堤理論の影響を受けて trial load method が応用されて来たが，未だ，砂防堰堤に trial load method を応用したものはなく，その研究もなされていない。

Noetzli 氏は拱堰堤の新解法を提議した。氏の解法は，拱堰堤は水平拱及び垂直片持梁による組合せであると仮定し，両者の拱頂における撓みを一致させるように荷重を両者に分割負荷したものである。

その後，米国開発局において trial load method が提唱された。trial load method は Noetzli 氏の理論に従つて水平拱及び垂直片持梁の任意の多数点において両者の撓みが一致するように荷重分割をするものである。しかし，これは分割荷重を任意に仮定して，各点の両者の撓みが一致すれば1回の計算でよいが，一致を見なければ，更に分割荷重を変更仮定して，両者の撓みが一致するまで計算を繰返す方法である。

この拱堰堤の trial load method を重力式堰堤に応用した研究は米国開発局でなされた。この要旨は重力堰堤は垂直片持梁要素（element）と水平梁要素の連合体であると考えたものである。横断面が狭く，両岸が急傾斜の地点においては，両岸近くの片持梁は中央部近くの高さの高い片持梁に引張られて撓みを起す傾向がある。また逆に，両岸近くの梁は中央部近くの近接梁を引戻して原位置に止めようとする傾向がある。このために相互の梁で捩り応力が起る。このことは trial-load twist method として Richard Whinnerah 及び F. D. Kirn の両氏によつてなしとげられた。

この tria-load twist method は垂直と水平の element に分けて，これに twist structure を考慮して，荷重を仮定によつて分割し，これ等の各要素の交点の撓みを計算し，撓みが一致するまで計算を繰返すものである。

かくの如くにして，重力堰堤の3次元応力としての解析が進展して来たのであるが，その計算が繁雑であるため，これを直接，数多くの砂防堰堤の設計に利用することは困難で，到底不可能な事である。

我国においても，仁羽義次氏の論文「直線型重力堰堤の変形および内部応力について」において，3次元応力の問題として取扱われているが，単にその傾向を示すに過ぎない。

著者は trial load method の繁雑を除くため既に日本林学会第61回大会において，「砂防堰堤の内部応力について」と題し，その研究の1部を発表した。即ち本報文第Ⅰ章はこれを詳述したものである。

砂防堰堤は一般に峡谷に設ける場合が多く，堰堤の堤高に比べ堤長は余り大きくないものが多い。それ故に，重力のみに依存する，従来の断面決定法では過大に失する傾向があると考察される。

ここに砂防堰堤は両岸及び河床に固定されている3辺支承の版と考えるのが至当である。ところが，この版は垂直方向断面が一定でなく，漸変断面をとり，しかも荷重状態も一般に高さと共に漸変するものであり，この解析は甚だ困難であつて，版構造としての解は，現在不可能に近いものである。

一歩後退して，この版は河床に固定された垂直方向の片持梁群と，両岸に固定された水平固定梁群によつて集成された十字梁と考え，この不静定応力の解法を用いて，一般式を誘導する。

trial-load twist method では普通 1ft 幅の element を取つて，element の間にかかる荷重は考慮に入れない。著者は全荷重を考え，element は堰堤全面積を占めるように分割し，変位の一般式を作り，これに既知の数値を入れて，解くことによつて一挙に荷重分割が出来る如くし，繁雑な trial load method の如く何回も計算を繰返す必要のないようにした。

まず，第Ⅰ章においては，水平外力のみを考え，鉛直外力及び自重を一応無視し，その一般式を導いた。更に，2個の横断面の変つた模型実験によつて理論の裏付けとした。

第Ⅱ章においては任意方向の外力をとり，自重をも考慮し，しかも，水平梁及び垂直梁の間に起る振り応力を考えに入れ，振り構造としてこれを検討した。trial-load twist method と根本的に異るところは，前述の如く，試算によらず，両梁の交点数をn個とすると3n個の3n元1次方程式の一般式を誘導し，これを解くことによつて，一挙に荷重分割が出来る如くした。

更に，第Ⅲ章の実験によつて3n個の方程式を解く必要なく，単にn個の方程式を解く丈けで，荷重の分割が可能であることを明かにし，次いで2次元理論によるものと内部応力を比較した。

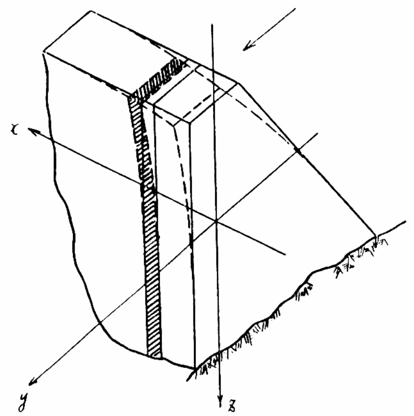
第Ⅰ章　振り応力を無視した場合における3次元応力の解法

第1節　堰堤の変位

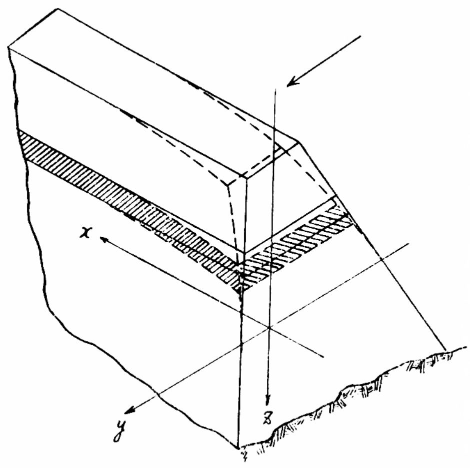
砂防堰堤に上流側から水圧，土圧などが作用すると，堰堤に変位が起る。1—1図において，x-軸方向には伸び，と縮みが生じ，y-軸方向には撓みが生ずる。更にz-軸方向にも撓みが生じ，x-軸に直角な面，すなわちyz面内に振りを生ずる。第Ⅰ章においては，y-軸方向の撓みのみについて論じ，x方向の変位，z方向の変位，及びyz面内の振り応力については，これをすべて無視して論ずることとする。

ここで堰堤を垂直片持梁群と水平固定梁群の集成されたものと考え，これ等梁群に生ずる撓みは曲げモーメント，及び剪断力によるものであるとする。（1—1図参照）

1—1図 (a)　片持梁構造



1—1図 (b)　水平固定梁構造



第2節　撓みの一般式

§1.　水平固定梁の曲げモーメントによる撓み

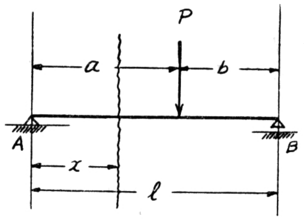
固定梁において，不静定力としてM_A，M_Bをとり，静定基本形として単純梁をとるものとする。かくすると固定梁は集中荷重を受ける単純梁と，両支点に不静定力M_A，M_Bを受ける単純梁を合成し，両支

点における撓み角が0となることを条件として解くことが出来る。

i) 集中荷重 P を受ける単純梁の撓み，及び撓み角

1―2図の如き荷重状態の単純梁において弾性線の方程式は荷重点を界として次の如くなる。

1―2図



$$\chi \leqq a \text{ において } \frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\,\frac{bx}{l} \quad \cdots\cdots (1.1)$$

$$\chi \geqq a \quad 〃 \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\left\{\frac{bx}{l} - (\chi - a)\right\} \quad \cdots\cdots (1.2)$$

ここで　E： 弾性係数

　　　　I： 断面2次モーメント

(1.1)，(1.2) 式をそれぞれ積分すると

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{P}{EI}\,\frac{b}{2l}\,x^2 + c_1 \quad \cdots\cdots (1.3)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{P}{EI}\left\{\frac{bx^2}{2l} - \frac{(x-a)^2}{2}\right\} + c \quad \cdots\cdots (1.4)$$

となり，boundary condition から $\left[\dfrac{dy_1}{dx}\right]_{x=a} = \left[\dfrac{dy_2}{dx}\right]_{x=a}$

故に $c_1 = c$ となる。更に積分して

$$y_1 = -\frac{P}{EI}\,\frac{bx^3}{6l} + c_1 x + c_2 \quad \cdots\cdots (1.5)$$

$$y_2 = -\frac{P}{EI}\left\{\frac{bx^3}{6l} - \frac{(x-a)^3}{6}\right\} + c_1 x + c_3 \quad \cdots\cdots (1.6)$$

boundary condition から $\left[y_1\right]_{x=a} = \left[y_2\right]_{x=a}$ 故に $c_2 = c_3$

となる。更に　$x = 0$ では $y_1 = 0$

　　　　　　　$x = l$ 〃 $y_2 = 0$

故に $c_2 = 0$,

また (1.6) 式から　$c_1 = \dfrac{Pb\,(l^2 - b^2)}{6EIl}$

従つて (1.3)，(1.4) 式から

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{Pb\,(l^2 - b^2 - 3x^2)}{6EIl} \quad \cdots\cdots (1.7)$$

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{P}{6EIl}\left\{b\ (l^2-b^2-3x^2)\ +3l\ (x-a)^2\right\} \quad\cdots\cdots (1.8)$$

となり，支点の撓み角は次の如くなる。

$$i_A=\left[\frac{dy_1}{dx}\right]_{x=0}=\frac{Pb\ (l^2-b^2)}{6EIl}=\frac{Pab\ (l+b)}{6EIl} \quad\cdots\cdots (1.9)$$

$$i_B=\left[\frac{dy_2}{dx}\right]_{x=l}=-\frac{Pab\ (l+a)}{6EIb} \quad\cdots\cdots (1.10)$$

ii）両支点にモーメントを受ける単純梁の撓み，及び撓み角

1—3図

1—3図の如くA，B両支点に作用するモーメントを M_A，M_B とする。A，B両支点の反力を R_A，R_B で表わすと

$$R_A=-\frac{M_A-M_B}{l} \quad\cdots\cdots (1.11)$$

$$R_B=\frac{M_A-M_B}{l} \quad\cdots\cdots (1.12)$$

この場合，荷重が0であるから微分方程式は次の如くなる。

$$EI\ \frac{d^4y}{dx^4}=0 \quad\cdots\cdots (1.13)$$

これを逐次積分すると

$$EIy=\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_2x^2+c_3x+c_4 \quad\cdots\cdots (1.14)$$

boundary condition は次の如くなる。

$x=0$ 　のとき　 $y=0$,　 $EIy''=-M_A$

$x=l$ 　のとき　 $y=0$,　 $EIy''=-M_B$

これから積分常数 c_1，c_2，c_3，c_4 を決定すれば

$$c_1=\frac{M_A-M_B}{l},\qquad c_2=-M_A$$

$$c_3=\frac{(2M_A+M_B)\ l}{6},\qquad c_4=0$$

故に（1.14）式は

$$EIy=\frac{M_Al^2}{6}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$
$$-\frac{M_Bl^2}{6}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^3-\left(\frac{x}{l}\right)\right\} \quad\cdots\cdots (1.15)$$

となる。次に支点の撓み角を θ_A, θ_Bとすると

$$\theta_A = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \frac{1}{6}\,\frac{(2M_A + M_B)\,l}{EI} \quad \cdots\cdots (1.16)$$

$$\theta_B = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=l} = -\frac{1}{6}\,\frac{(M_A + 2M_B)\,l}{EI} \quad \cdots\cdots (1.17)$$

更に（1.15）式の第２次微分から次式が得られる。

$$M_X = M_A\left\{1 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\} + M_B\left(\frac{x}{l}\right) \quad \cdots\cdots (1.18)$$

iii）集中荷重を受ける水平固定梁の撓み角

集中荷重を受ける単純梁の撓み角と，両支点にモーメントを受ける単純梁の撓み角を合成すると，A点における撓み角

$$I_A = i_A + \theta_A = \frac{Pab\,(l+b)}{6EIl} + \frac{(2M_A + M_B)\,l}{6EI} \quad \cdots\cdots (1.19)$$

B点における撓み角

$$I_B = i_B + \theta_B = -\frac{Pab\,(l+a)}{6EIl} - \frac{(M_A + 2M_B)\,l}{6EI} \quad \cdots\cdots (1.20)$$

となる。然るに固定梁においては　$I_A = I_B = 0$　となるから（1.19），（1.20）式を０とおくと，両端モーメントは次の如くなる。

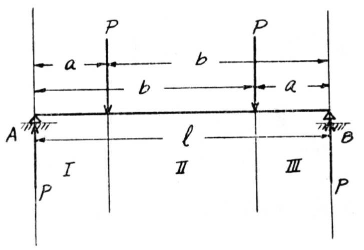
$$M_A = -\frac{Pa\,b^2}{l^2} \quad \cdots\cdots (1.21)$$

$$M_B = -\frac{Pa^2\,b}{l^2} \quad \cdots\cdots (1.22)$$

iv）固定梁が対称位置に相等しい荷重を受ける場合の撓み，及び撓み角

(i)　単純梁に対称荷重が作用するとき

1－4図



1－4図の単純梁を３区間に分ち，各区間の曲げモーメントは

$0 < x < a \qquad M_{\mathrm{I}} = Px$

$a < x < b \qquad M_{\mathrm{II}} = Px - P\,(x - a) = Pa$

$b < x < l \qquad M_{\mathrm{III}} = Px - P\,(x - a) - P\,(x - b) = Pa - P\,(x - b)$

となる。

（ii） 両支点にモーメントを受ける単純梁

（1.18）式

$$M_X = M_A\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\} + M_B\left(\frac{x}{l}\right) \quad \cdots\cdots (1.23)$$

（iii） 単純梁が対称荷重と両支点にモーメントを受けるとき

単純梁が対称荷重と両支点モーメントを受ける場合においては。$M_{(A)}$，$M_{(B)}$ の値は等しい。（1.21）（1.22）式から次式が得られる。

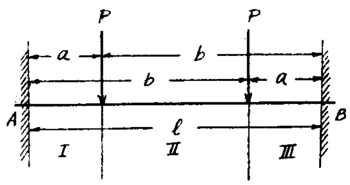
$$M_{(A)} = M_{(B)} = M_A + M_B = -\frac{Pab^2}{l^2} - \frac{Pab^2}{l^2} = -\frac{Pab}{l} \quad \cdots\cdots (1.24)$$

この値を（1.23）式の M_A，M_B に入れると，次の如くなる。

$$M_X = -\frac{Pab}{l}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)+\left(\frac{x}{l}\right)\right\} = -\frac{Pab}{l} \quad \cdots\cdots (1.25)$$

（iv） 固定梁に対称荷重を受ける場合の曲げモーメント，及び撓み

1－5図



1－5図の各区間の曲げモーメントは次の如くなる。

$$0 < x < a \qquad M_{(\mathrm{I})} = Px - \frac{Pab}{l} \quad \cdots\cdots (1.26)$$

$$a < x < b \qquad M_{(\mathrm{II})} = Pa - \frac{Pab}{l} = \frac{Pa^2}{l} \quad \cdots\cdots (1.27)$$

$$b < x < l \qquad M_{(\mathrm{III})} = Pa - P(x-b) - \frac{Pab}{l}$$

$$= P\left\{\frac{a^2}{l} - (x-b)\right\} \quad \cdots\cdots (1.28)$$

即ち，固定梁における弾性曲線はⅠ，Ⅱ，Ⅲの各区間において，それぞれ異つた分枝からなる曲線である。然しながら境界において y 及び，$\dfrac{dy}{dx}$ の値は等しい，又梁の両端においては $y=0$ となる。この boundary condition を用いて積分常数を処理することが出来る。

弾性曲線の方程式は各区間で次の如くなる。

$$\mathrm{I} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = P\left(\frac{ab}{l} - x\right) \quad \cdots\cdots (1.29)$$

$$\mathrm{II} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pa^2}{l} \quad \cdots\cdots (1.30)$$

$$\mathrm{III} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P\left\{\frac{a^2}{l} - (x-b)\right\} \quad \cdots\cdots (1.31)$$

(1.29) 式から

$$EI\,\frac{dy}{dx}=P\left\{\frac{ab}{l}x-\frac{x^2}{2}\right\}+c_1 \quad \cdots\cdots (a)$$

$$EIy=P\left\{\frac{ab}{2l}x^2-\frac{x^3}{6}\right\}+c_1x+c_2 \quad \cdots\cdots (b)$$

(1.30) 式から

$$EI\,\frac{dy}{dx}=-\frac{Pa^2}{l}x+c_3 \quad \cdots\cdots (c)$$

$$EIy=-\frac{Pa^2}{2l}x^2+c_3x+c_4 \quad \cdots\cdots (d)$$

(1.31) 式から

$$EI\,\frac{dy}{dx}=-P\left\{\frac{a^2}{l}x-\frac{(x-b)^2}{2}\right\}+c_5 \quad \cdots\cdots (e)$$

$$EIy=-P\left\{\frac{a^2}{2l}x^2-\frac{(x-b)^3}{6}\right\}+c_5x+c_6 \quad \cdots\cdots (f)$$

$[a]_{x=a}=[c]_{x=a}$

$$P\left\{\frac{a^2b}{l}-\frac{a^2}{2}\right\}+c_1=-\frac{Pa^3}{l}+c_3 \quad \cdots\cdots (i)$$

$[b]_{x=a}=[d]_{x=a}$

$$P\left\{\frac{a^3b}{2l}-\frac{a^3}{6}\right\}+c_1a+c_2=-\frac{Pa^4}{2l}+c_3a+c_4 \quad \cdots\cdots (ii)$$

(b) 式から　$x=0,\ y=0\quad \therefore\ c_2=0$

$$P\left\{\frac{a^3b}{2l}-\frac{a^3}{6}\right\}+c_1a=-\frac{Pa^4}{2l}+c_3a+c_4 \quad \cdots\cdots (ii)'$$

$[c]_{x=b}=[e]_{x=b}$

$$-\frac{Pa^2b}{l}+c_3=-P\left\{\frac{a^2b}{l}-\frac{(b-b)^2}{2}\right\}+c_5 \quad \cdots\cdots (iii)$$

$\therefore\quad c_3=c_5$

$[d]_{x=b}=[f]_{x=b}$

$$-\frac{Pa^2b^2}{2l}+c_3b+c_4=-P\left\{\frac{a^2b^2}{2l}-\frac{(b-b)^3}{6}\right\}+c_5b+c_6 \quad \cdots\cdots (iv)$$

$\therefore\quad c_4=c_6$

(f) 式で　$x=l,\ y=0$

$$-P\left\{\frac{a^2l}{2}-\frac{(l-b)^3}{6}\right\}+c_5l+c_6=0 \quad \cdots\cdots (v)$$

ここで $c_3=c_5$，$c_4=c_6$，$c_2=0$ であり，未知数は c_1，c_3，c_4 である。

(i) 式から　$$c_3=P\left\{\frac{a^2b}{l}-\frac{a^2}{2}\right\}+c_1+\frac{Pa^3}{l} \quad \cdots\cdots (vi)$$

(ii)′ 式に (vi) 式を入れると

$$P\left\{\frac{a^3b}{2l}-\frac{a^3}{6}\right\}+c_1a=-\frac{Pa^4}{2l}+Pa\left\{\frac{a^2b}{l}-\frac{a^2}{2}\right\}+c_1a+\frac{Pa^4}{l}+c_4$$

これから　$c_4=-\dfrac{Pa^3}{6}$ ……………………………… (vii)

$c_6=-\dfrac{Pa^3}{6}$ ……………………………… (viii)

(v) 式に (viii) 式を入れると

$c_5=\dfrac{Pa^2}{2}$ ……………………………… (ix)

$c_3=\dfrac{Pa^2}{2}$ ……………………………… (x)

(vi) 式に (x) 式を入れると

$$c_1=\frac{Pa^2}{l}(l-a-b)$$

然るに $l-a-b=0$　$\therefore$　$c_1=0$ ……………………………… (xi)

となる。故に撓みの式は次の如くなる。

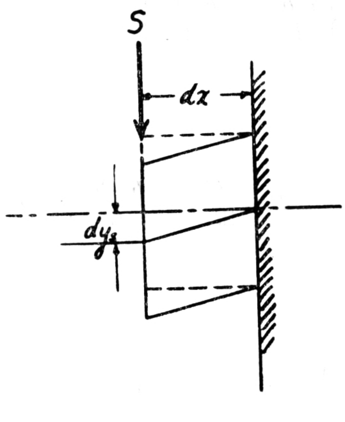
Ⅰ　$y=\dfrac{P}{6EI}\left(3\dfrac{ab}{l}x^2-x^3\right)$ ……………………………… (1.32)

Ⅱ　$y=\dfrac{P}{6EI}\left(3x-3\dfrac{x^2}{l}-a\right)$ ……………………………… (1.33)

Ⅲ の区間は Ⅰ と対称である。

§ 2.　水平固定梁の剪断力に基因する撓み

1—6図



1—6図の如き梁の微小部分 dx を取つて考える。これが剪断力 S のために撓みを生じ，この変位を中心軸において dy_S とする。
Tetmayer 氏によると

$$dy_S = \frac{dx}{GS}\int \tau^2\, df \quad \cdots\cdots (1.34)$$

となる。ここで τ は微小面積 df に起る応力であり，G は剪断弾性係数である。この積分は断面の上端から下端まで行うものである。

(1.34) 式から

$$y_S = \eta\frac{Sx}{GA} \quad \cdots\cdots (1.35)$$

η は矩形断面においては $\frac{6}{5}$ であるから

$$y_S = \frac{6}{5GA}Sx \quad \cdots\cdots (1.36)$$

である。

剪断力 S のために dy_S 丈け変位することによつてなされる仕事量は応力 τ の仕事量に等しい。故に

$$\frac{1}{2}S\,dy_S = dx\int\frac{\tau^2}{2G}df \quad \cdots\cdots (\text{i})$$

$$y_S = \frac{1}{G}\int\frac{dx}{S}\int\tau^2\,df \quad \cdots\cdots (\text{ii})$$

τ の断面上の分布は幅 b，高さ h の矩形断面においては中心軸から η なる距離では次の如くなる。

$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{S}{bh}\left\{1-\left(\frac{2\eta}{h}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots (\text{iii})$$

(iii) 式と $df = bd\eta$ を用いて

$$\int\tau^2\,df = \frac{9}{4}\,\frac{S^2}{bh^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left\{1-\left(\frac{2\eta}{h}\right)^2\right\}^2 d\eta$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{S^2}{bh}$$

$$y_S = \frac{6}{5GA}Sx \quad \cdots\cdots (\text{v})$$

即ち (1.36) 式が得られる。

§ 3. 水平固定梁の撓みの一般式

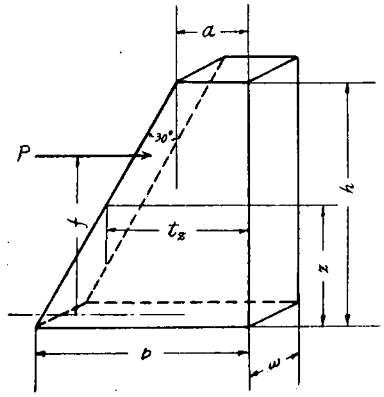
第2節 § 1，§ 2 から撓みの一般式は次の弾性曲線式によつて与えられる。断面が一様で両端が固定しており，対称荷重を受けると，撓み曲線は中点に対して対称である。

$$0 < x < a \qquad y = \frac{P}{6EI}\left(3\frac{ab}{l}x^2 - x^3\right) + \frac{6}{5}\,\frac{P}{GA}x \quad \cdots\cdots (1.37)$$

$$a < x < \frac{l}{2} \qquad y = \frac{Pa^2}{6EI}\left(3x - 3\frac{x^2}{l} - a\right) + \frac{6}{5}\,\frac{Pa}{GA} \quad \cdots\cdots (1.38)$$

§ 4. 片持梁の曲げモーメントによる撓み

1—7図



1—7図の如き厚さ ω の梯形片持梁において，固定端から z の距離にある断面の幅を t_z とすると

$$t_z = b - tan\,30° \times z \quad \cdots\cdots (1.39)$$

この断面の断面2次モーメントを I_z とすれば

$$I_z = \frac{\omega t_z^3}{12} \quad \cdots\cdots (1.40)$$

となる。ここで $tan\ 30° = c = 0.5774$ とする。

外力の作用点距離 f が z より大きいか，小さいかによつて曲げモーメント式は異る。

$z < f$ の場合，固定端から z の距離にある点の曲げモーメントを M_z とすれば

$$M_z = -P\,(f-z) \quad \cdots\cdots (1.41)$$

となり，この場合の弾性曲線の方程式は

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_z}{EI} = \frac{12P}{E}\,\frac{(f-z)}{w(b-cz)^3} \quad \cdots\cdots (1.42)$$

となる。(1.42) 式を遂次積分して，その積分常数を次の boundary condition によつて決める。

$$z = 0 \qquad のとき \quad \frac{dy}{dz} = 0$$

$$z = 0 \qquad 〃 \qquad y = 0$$

かくすると

$$y = \frac{6P}{wEc^3}\left\{\frac{cf-b}{b-cz} - \frac{c(b+cf)}{b^2}z - 2\,log_e\left(\frac{b-cz}{b}\right) - \frac{cf-b}{b}\right\} \quad \cdots\cdots (1.43)$$

$z > f$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &M_z = 0, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = 0 \\ &\frac{dy}{dz} = c_1 \\ &y = c_1 x + c_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.44)$$

積分常数 c_1, c_2 は次の如くして求められる。

$z<f$ の場合の境界 $z=f$ で求めた $\dfrac{dy}{dz}$, y がそれぞれ (1.44) 式において $z=f$ とした $\dfrac{dy}{dz}$, y に等しい筈であるから

$$c_1 = \frac{12P}{Ew}\left\{\frac{1}{2c^2(b-cf)} - \frac{b+cf}{2b^2c^2}\right\}$$

$$c_2 = -\frac{12P}{Ew}\left\{\frac{cf}{2bc^3} + \frac{f}{2c^2(b-cf)} + \frac{1}{c^3}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right)\right\}$$

となり。(1.44) 式の y は次の如くなる。

$$y = \frac{6P}{wEc^2}\left\{\frac{c^2f^2}{b^2(b-cf)}z - \frac{f(2b-cf)}{b(b-cf)} - \frac{2}{c}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right)\right\} \quad \cdots\cdots (1.45)$$

§5. 片持梁の剪断力による撓み

剪断力による撓み y_S とすれば

$0<z<f$ では

$$y_S = \frac{6}{5}\,\frac{P}{G}\int_0^z \frac{dz}{w(b-cz)} = \frac{-6P}{5Gwc}\left\{\log_e(b-cz) - \log_e b\right\}$$

$$= -\frac{6P}{5Gwc}\log_e\left(\frac{b-cz}{b}\right) \quad \cdots\cdots (1.46)$$

$f<z<h$ では

$$y_S = \frac{6}{5}\,\frac{P}{G}\int_0^f \frac{dz}{w(b-cz)}$$

$$= -\frac{6P}{5Guc}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right) \quad \cdots\cdots (1.47)$$

となる。

§6. 片持梁の撓みの一般式

第2節 §4., §5. から次の式が得られる。

$z<f$ なるとき

$$y = \frac{6P}{Ec^3w}\left\{\frac{cf-b}{b-cz} - \frac{c(b+cf)}{b^2}z - 2\log_e\left(\frac{b-cz}{b}\right) - \frac{cf-b}{b}\right\}$$

$$-\frac{6P}{5Gcw}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right)\Big\} \quad \cdots\cdots (1.48)$$

$z>f$ なるとき

$$y=\frac{6P}{Ec^2w}\left\{\frac{c^2f^2}{b^2(b-cf)}z-\frac{(2b-cf)f}{b(b-cf)}-\frac{2}{c}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right)\right\}$$

$$-\frac{6P}{5Gcw}\log_e\left(\frac{b-cf}{b}\right)\quad\cdots\cdots(1.49)$$

第 3 節　堰堤の撓みの実験　其の1

（谷の横断面が梯形の場合）

§ 1.　寒天模型

1—8，1—9図に示す如き水槽を作製し，これに寒天模型を作つた。この寒天模型の型状，寸法は次の如きものである。

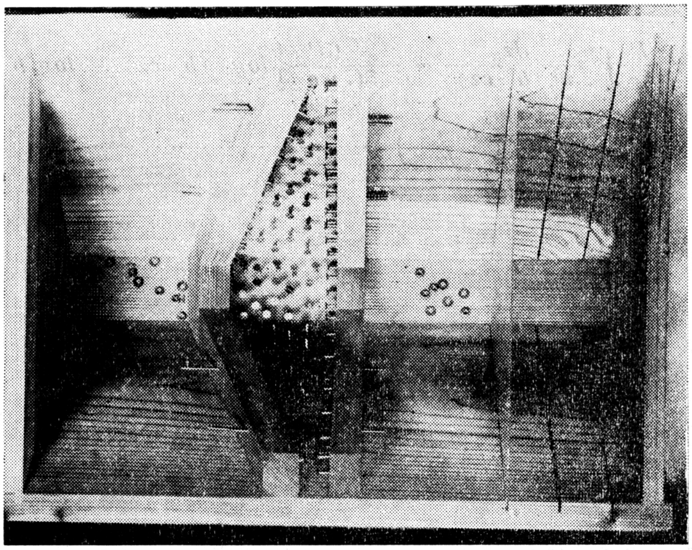
高さ 180mm　　天端幅 29mm　　底幅 132.93mm

ここで左右両端において各 30mm，底辺において 30mm を固定し，圧力を受ける部分は

高　さ	150mm		
天端幅	29mm	底　幅	115.61mm
天端長	346mm	底　長	46　mm

とし，左右両端の勾配を1割とした。この断面は1—10図に示す。

1—8図 (a)

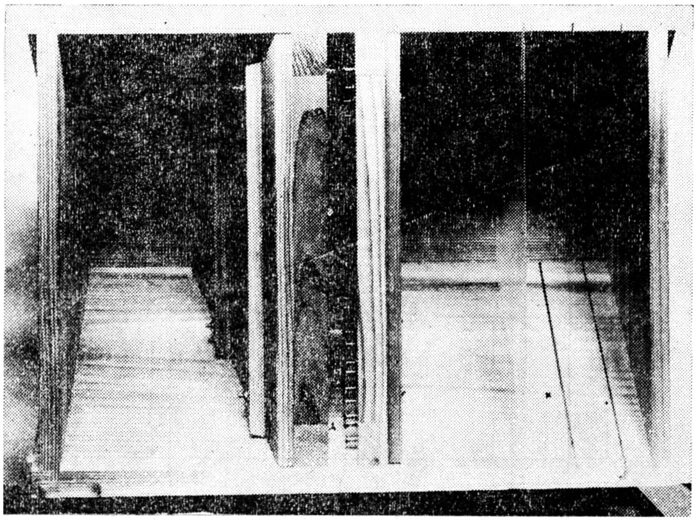


上流法の鉛直とのなす角は30°とし，下流法は鉛直とした。この模型で静水圧を天端まで載荷し（1—9図参照)，1—10図に示す如き横に3本，縦に7本の測線を設け，測線の交点における水平方向の撓みをマイクロメーターを用いて測定した。

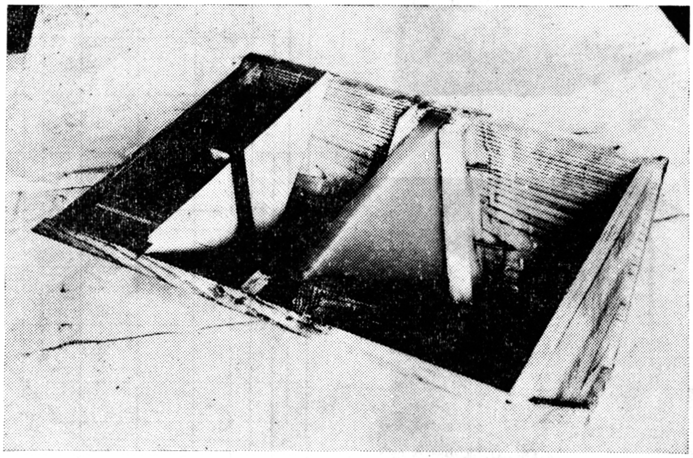
§ 2.　材料の力学的性質

1—11図に示す如き円形断面試験片を2様の方法で作製した。即ち，模型実験終了後において，この

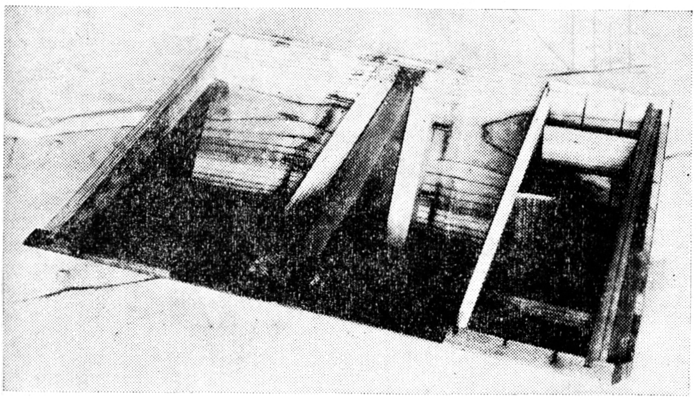
1－8図（b）

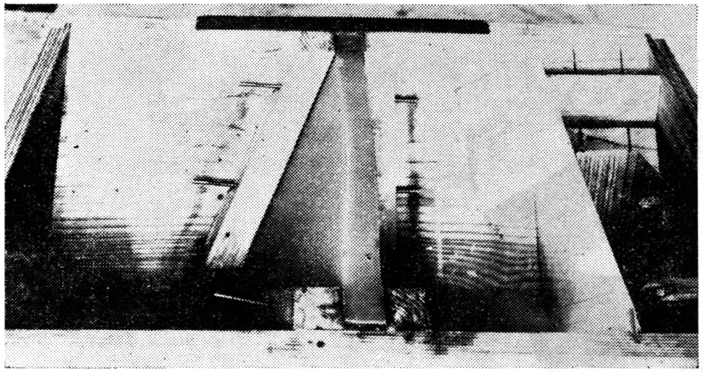


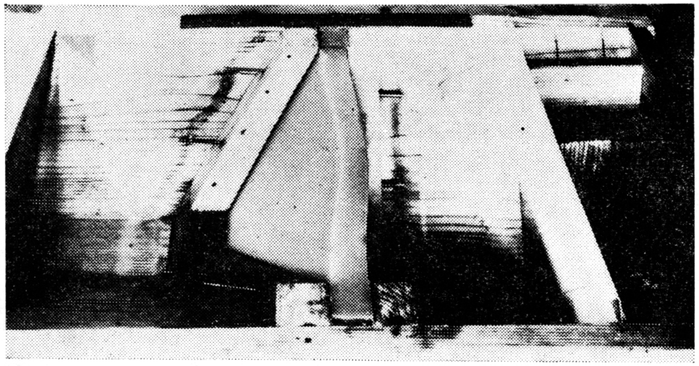
1－9図（a）　無載荷状態

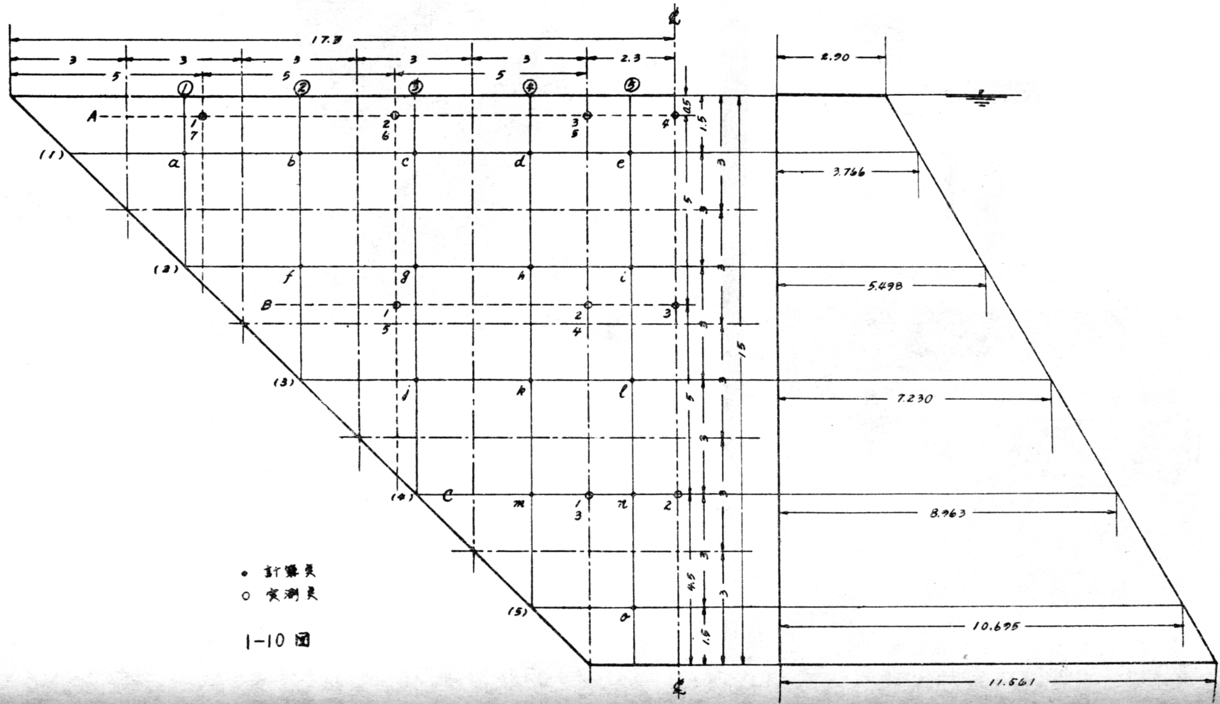


1－9図（b）　載荷状態




1－9図（c）無載荷状態

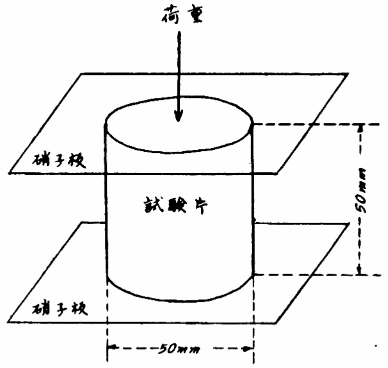

1－9図（d）載荷状態



1-10図

一部から試験片を切取つたものと，同一寒天を型に流し込んで作製したものと２種類作つた。

1—11図



この試験片を水平な硝子板上に載せ，更にその上に硝子板を載せて，載荷前後の試験片の高さ，及び直経を測定し，それから弾性係数，及びポアソン比を求めた。この結果は１—１表に示す。

1—1表

試験体	試験荷重　g	弾性係数 E g/cm²	ポアソン比 ν	比重	備考
1	200	322.01	0.70	0.994	型の中へ垂直方向に流し込む
	500	364.69	0.84		
2	200	354.55	0.98	0.951	模型から水平方向に切取る
	500	283.56	0.73		
3	200	305.71	0.88	0.982	模型から垂直方向に切取る
平均		336.74	0.85	0.976	

以上の結果から理論値計算には，弾性計数 $E=335$ g/cm²，ポアソン比 $\nu=0.85$ を採用した。従つて剪断弾性係数は 90.54 g/cm² となり，$G=90$ g/cm² とした。

§3.　理論値計算点

理論値計算点は１—10図に示す如く，横方向に測線５本，縦方向に10本の測線を設け，この交点について計算した。

本計算は z 方向の撓み，及び xy 面内の捩りを無視することを条件としたのであるから，水圧を集中荷重に換算し，その作用点は各ブロックの中心に一致するものと考え，また一応模型の自重を無視しているものである。

§4.　外力の計算

理論値計算に用いる各ブロックに作用する外力を，それぞれ集中荷重に換算した結果は次の如くなる。

$P_a=P_b=P_c=P_d=13.5$g　　$P_e=10.35$g　　$P_f=P_g=P_h=40.5$g

$P_i=31.05$g　　$P_j=P_k=67.5$g　　$P_l=51.75$g

$P_m=94.5$g　　$P_n=72.45$g　　$P_o=93.15$g

P_a, P_b, …………, P_o はそれぞれ a, b, …………, o 点の荷重を示す。

§ 5. 単位荷重に対する片持梁及び固定梁の変位

（片持梁及び固定梁の記号は 1 —10図と対称する）　単位　cm

片持梁 ⑤

荷重点＼計算点	o	n	l	i	e
o	0.00079	0.00083	0.00087	0.00090	0.00094
n	0.00083	0.00293	0.00332	0.00371	0.00411
l	0.00087	0.00332	0.00670	0.00806	0.00942
i	0.00090	0.00371	0.00806	0.01404	0.01754
e	0.00094	0.00411	0.00942	0.01754	0.03040

片持梁 ④

荷重点＼計算点	m	k	h	d
m	0.00146	0.00162	0.00177	0.00193
k	0.00162	0.00395	0.00473	0.00551
h	0.00177	0.00473	0.00893	0.01123
d	0.00193	0.00551	0.01123	0.01957

片持梁 ③

荷重点＼計算点	j	g	c
j	0.00183	0.00211	0.00238
g	0.00211	0.00546	0.00692
c	0.00238	0.00692	0.01406

片持梁 ②

荷重点＼計算点	f	b
f	0.00246	0.00302
b	0.00302	0.00864

片持梁 ①

荷重点＼計算点	a
a	0.00377

固 定 梁 (1)

荷重点＼計算点	a	b	c	d	e
a	0.00527	0.00742	0.00901	0.01002	0.01044
b	0.00742	0.01859	0.02493	0.02898	0.03065
c	0.00901	0.02493	0.04174	0.05085	0.05461
d	0.01002	0.02898	0.05085	0.06958	0.07626
e	0.01044	0.03065	0.05461	0.07626	0.08865

固 定 梁 (2)

荷重点＼計算点	f	g	h	i
f	0.00520	0.00716	0.00841	0.00892
g	0.00716	0.01754	0.02252	0.02458
h	0.00841	0.02252	0.03630	0.04094
i	0.00892	0.02458	0.04094	0.05114

固 定 梁 (3)

荷重点＼計算点	j	k	l
j	0.00509	0.00672	0.00740
k	0.00672	0.01579	0.01848
l	0.00740	0.01848	0.02651

固 定 梁 (4)

荷重点＼計算点	m	n
m	0.00489	0.00586
n	0.00586	0.01215

固 定 梁 (5)

荷重点＼計算点	o
o	0.00379

§6. 変位の方程式

§4. で述べた外力を片持梁で負荷すべき荷重を a, b, ………………, o 固定梁で負荷すべき荷重を A, B, ………………, O とすれば

$$\left.\begin{aligned}
a &= 13.5 - A \\
b &= 13.5 - B \\
c &= 13.5 - C \\
d &= 13.5 - D \\
e &= 10.35 - E \\
f &= 40.5 - F \\
g &= 40.5 - G \\
h &= 40.5 - H \\
i &= 31.05 - I \\
j &= 67.5 - J \\
k &= 67.5 - K \\
l &= 51.75 - L \\
m &= 94.5 - M \\
n &= 72.45 - N \\
o &= 93.15 - O
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.50)$$

となる。片持梁及び固定梁の各点に生ずる撓みは，重ね合せの原理により，各点に各々単位荷重が作用した場合の撓みの荷重倍となる。

片持梁，固定梁の各交点の撓み量は片持梁，固定梁に適当に荷重を負荷すれば一致する筈であるから a，b，………………，o の15個所の各点において次の変位の方程式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&a\text{ 点}\\
&0.00377\ (13.5 - A) = 0.00527\,A + 0.00742\,B + 0.00901\,C\\
&\qquad + 0.01002\,D + 0.01044\,E\\
&b\text{ 点}\\
&0.00302\ (40.5 - F) + 0.00864\ (13.5 - B) = 0.00742\,A + 0.01859\,B\\
&\qquad + 0.02493\,C + 0.02898\,D + 0.03065\,E\\
&c\text{ 点}\\
&0.00238\ (67.5 - J) + 0.00692\ (40.5 - G) + 0.01406\ (13.5 - C)\\
&\quad = 0.00901\,A + 0.02493\,B + 0.04174\,C + 0.05085\,D\\
&\quad + 0.05461\,E\\
&d\text{ 点}\\
&0.00193\ (94.5 - M) + 0.00551\ (67.5 - K) + 0.01123\ (40.5 - H)\\
&+ 0.01957\ (13.5 - D) = 0.01002\,A + 0.02898\,B + 0.05085\,C\\
&\qquad + 0.06958\,D + 0.07626\,E\\
&e\text{ 点}\\
&0.00094\ (93.15 - O) + 0.00411\ (72.45 - N) + 0.00942\ (51.75 - L)\\
&+ 0.01754\ (31.05 - I) + 0.03040\ (10.35 - E)\\
&= 0.01044\,A + 0.03065\,B + 0.05461\,C + 0.07626\,D + 0.08865\,E\\
&f\text{ 点}\\
&0.00246\ (40.5 - F) + 0.00302\ (13.5 - B)\\
&= 0.00520\,F + 0.00716\,G + 0.00841\,H + 0.00892\,I\\
&g\text{ 点}\\
&0.00211\ (67.5 - J) + 0.00546\ (40.5 - G) + 0.00692\ (13.5 - C)\\
&= 0.00716\,F + 0.01752\,G + 0.02252\,H + 0.02458\,I\\
&h\text{ 点}\\
&0.00177\ (94.5 - M) + 0.00473\ (67.5 - K) + 0.00893\ (40.5 - H)\\
&+ 0.01123\ (13.5 - D)\\
&= 0.00841\,F + 0.02252\,G + 0.03630\,H + 0.04094\,I
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (1.51)$$

i 点

$0.00090\ (93.15-O)\ +0.00371\ (72.45-N)\ +0.00806\ (51.75-L)$
$+\ 0.01404\ (31.05-I)\ +\ 0.01754\ (10.35-E)$
$=0.00892\,F+0.02458\,G+0.04094\,H+0.05114\,I$

j 点

$0.00183\ (67.5-J)\ +0.00211\ (40.5-G)\ +0.00238\ (13.5-C)$
$=0.00509\,J+0.00672\,K+0.00740\,L$

k 点

$0.00162\ (94.5-M)\ +0.00395\ (67.5-K)\ +0.00473\ (40.5-H)$
$+\ 0.00551\ (13.5-D)$
$=0.00672\,J+0.01579\,K+0.01848\,L$

l 点

$0.00087\ (93.15-O)\ +0.00332\ (72.45-N)\ +0.00670\ (51.75-L)$
$+\ 0.00806\ (31.05-I)\ +\ 0.00942\ (10.35-E)$
$=0.00740\,J+0.01848\,K+0.02651\,L$

m 点

$0.00146\ (94.5-M)\ +0.00162\ (67.5-K)\ +0.00177\ (40.5-H)$
$+\ 0.00193\ (13.5-D)\ =0.00489\,M+0.00586\,N$

n 点

$0.00083\ (93.15-O)\ +0.00293\ (72.45-N)\ +0.00332\ (51.75-L)$
$+\ 0.00371\ (31.05-I)\ +\ 0.00411\ (10.35-E)$
$=0.00586\,M+0.01215\,N$

o 点

$0.00079\ (93.15-O)\ +0.00083\ (72.45-N)\ +0.00087\ (51.75-L)$
$+\ 0.00090\ (31.05-I)\ +\ 0.00094\ (10.35-E)$
$=0.00379\,O$

§ 7. 片持梁並に固定梁の分割荷重及び撓み

i) 分割荷重

§ 6. に述べた変位方程式 (1.51) を解くと次の分割荷重が得られる。

単位 gr

作用点	片 持 梁	固 定 梁	計
a	20.3708	−6.8708	13.5
b	20.4731	−6.9731	
c	13.4537	0.0463	
d	5.8662	7.6338	
e	1.9368	8.4132	10.35
f	40.6449	−0.1449	40.5
g	40.8501	−0.3501	
h	31.7851	8.7149	
i	20.7604	10.2896	31.05
j	59.6531	7.8469	67.5
k	55.0567	12.4433	
l	37.7204	14.0296	51.75
m	66.8770	27.6230	94.5
n	52.0853	20.3647	72.45
o	56.0011	37.1489	93.15

ii) 撓 み 量

変位方程式 (1.51) の各々の式の左辺が片持梁の撓みを表わし, 右辺が固定梁の撓みを示すものであるから, これに § 7. i) の分割荷重をそれぞれ当てはめると次の撓み量が求められる。

単位 cm

計算点	片 持 梁	固 定 梁	誤 差 %
a	0.076798	0.076793	0.007
b	0.299636	0.299636	0.000
c	0.613816	0.613812	0.001
d	0.904184	0.904180	0.000
e	1.045045	1.045055	0.000
f	0.161815	0.161815	0.000
g	0.442010	0.442007	0.001
h	0.728508	0.728504	0.001
i	0.873110	0.873100	0.001
j	0.227379	0.227379	0.000
k	0.508482	0.508478	0.001
l	0.659945	0.659944	0.000
m	0.254414	0.254413	0.000
n	0.409304	0.409302	0.000
o	0.140794	0.140794	0.000

§ 8. 撓みの実験値と理論値の比較

実験値は1—2表に示す通りである。

1—2表 撓み量 cm

測 定		I	II	平 均	
上部測線	1	0.108	0.124	0.116	0.110
	7	0.090	0.112	0.104	
	2	0.354	0.391	0.373	0.369
	6	0.338	0.390	0.364	
	3	0.570	0.672	0.621	0.626
	5	0.565	0.695	0.630	
	4	0.611	0.708		0.660
中央測線	1	0.230	0.244	0.237	0.235
	5	0.227	0.239	0.233	
	2	0.414	0.405	0.410	0.414
	4	0.419	0.415	0.417	
	3	0.438	0.438		0.438

測定		I	II	平均	
下部測線	1	0.220	0.227	0.224	0.222
	3	0.219	0.219	0.219	
	2	0.243	0.243		0.243

理論値と実験値を比較すれば次の如くなる。この測点は一致していないから，理論値各計算点間は直線変化をするものとして計算したものである。

測定		理論値 cm	実験値 cm	実験値/理論値 %
上部測線	1, 7	0.1284	0.110	85.67
	2, 6	0.6169	0.369	59.82
	3, 5	1.0129	0.626	61.80
	4	1.1630	0.660	56.75
中部測線	1, 5	0.3267	0.235	71.93
	2, 4	0.7383	0.414	56.07
	3	0.8546	0.438	51.25
下部測線	1, 3	0.3421	0.222	64.89
	2	0.4765	0.243	51.00
			平均	62.13

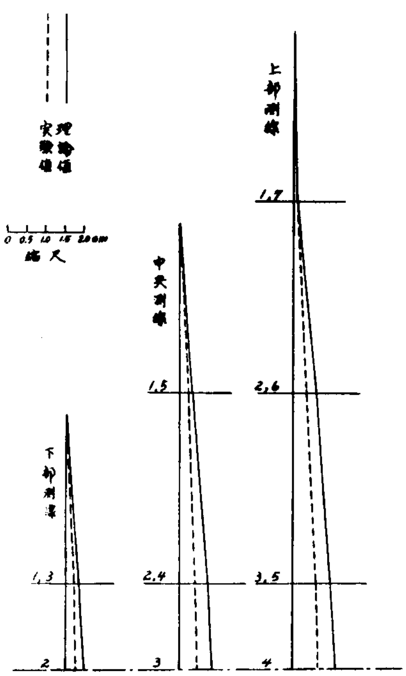
この比較図は1—12図に示す。

この理論値と実験値を比較すると，実験値は理論値より小さく，平均62%である。しかしながら1—12図に見る如く両曲線は殆んど相似の関係にあることから，大体ここで仮定した理論は正しいことが立証された訳である。この撓み量の差が甚しいことは寒天模型の製作にあたり，これが均質を期すことが甚だ困難であることが考えられる。また弾性係数，ポアソン比の測定が適当でなかつたこと，即ち引張り弾性を取り得なかつたこと，また載荷すると試験片がややもすると硝子板の間から滑出せんとする傾向にあつて，この測定が不正確であることが考えられる。

更に，応力計算にあたつて模型の自重を無視したこと，及び荷重点を各ブロック中央点として，水平方向に働くものとしたこと，各梁の重心に外力が作用していないため，捩り応力が当然起ることが考えられる。

しかしながら一応本章で述べたことは，その傾向を示すものとして認め得るものと考えられる。

1—12図



§9. コンクリート堰堤の撓みと内部応力

以上の実験に用いた模型の100倍の大さのコンクリート

堰堤を考える。すなわち，高さ 15.00m，天端幅 2.90m，底幅 11.561m，天端長 34.60m，底長 4.50m とする。

コンクリートの弾性係数 335,000kg/cm²，剪断弾性係数 90,000kg/cm²と仮定して，1—10図の片持梁⑤（eilno）に相当する堰堤の撓みを計算すると次の如くなり，非常に微小なものである。

*e*点	0.000104cm	*i*点	0.000087cm
*l*点	0.000066cm	*n*点	0.000041cm
*o*点	0.000014cm		

i）片持梁の曲げモーメント及び断面内最大応力

（i）片持梁 ⑤ ——eilno——

各点の曲げモーメント及び断面内最大応力は次の通りである。ここで断面内最大応力は上流側“—”，下流側“+”である。この計算に当つては中立軸を断面の中心に取つた。

測点	曲げモーメント ton m	応力 kg/cm²
e	0	0
i	− 5.8104	±0.0501
l	− 73.8020	±0.3683
n	−255.1648	±0.8286
o	−592.6635	±1.3517
固定端	−854.4196	±1.6677

（ii）片持梁 ④ ——dhkm——

測点	曲げモーメント ton m	応力 kg/cm²
d	0	0
h	− 17.5986	±0.1164
k	−130.5525	±0.4995
m	−408.6765	±1.0174
固定端	−887.4315	±1.5509

（iii）片持梁 ③ ——cgj——

測点	曲げモーメント ton m	応力 kg/cm²
c	0	0
g	− 40.3611	±0.2670
j	−203.2725	±0.7777
固定端	−544.1432	±1.3547

（iv）片持梁 ② ——bf——

測点	曲げモーメント ton m	応力 kg/cm²
b	0	0
f	− 61.4193	±0.2982
固定端	−244.7733	±0.4012

(v) 片持梁 ① ——a——

測　点	曲げモーメント ton m	応 力 kg/cm²
a	0	0
固定端	− 61. 1124	± 0. 4033

ここで堰堤の自重を考え，これが断面に等分布しているものと仮定する。コンクリートの単位重量を 2.35 ton/m³ とするときは，各点の上流端における応力は次の如くなる。　単位 kg/cm²

片持梁	計算点	外力による引張り応力	自重による圧縮応力	応　力　計
⑤	固定端	− 1. 6677	+ 2. 2046	+ 0. 5359
	o	− 1. 3517	+ 2. 0164	+ 0. 6647
	n	− 0. 8286	+ 1. 6329	+ 0. 8043
	l	− 0. 3683	+ 1. 2347	+ 0. 8664
	i	− 0. 0501	+ 0. 8076	+ 0. 7575
	e	0	+ 0. 3120	+ 0. 3120
④	固定端	− 1. 5509	+ 2. 0164	+ 0. 4655
	m	− 1. 0174	+ 1. 6329	+ 0. 6155
	k	− 0. 4995	+ 1. 2347	+ 0. 7352
	h	− 0. 1164	+ 0. 8076	+ 0. 6912
	d	0	+ 0. 3120	+ 0. 3120
③	固定端	− 1. 3547	+ 1. 6329	+ 0. 2782
	j	− 0. 7777	+ 1. 2347	+ 0. 4560
	g	− 0. 2670	+ 0. 8076	+ 0. 5406
	c	0	+ 0. 3120	+ 0. 3120
②	固定端	− 0. 4012	+ 1. 2347	+ 0. 8335
	f	− 0. 2982	+ 0. 8076	+ 0. 5094
	b	0	+ 0. 3120	+ 0. 3120
①	固定端	− 0. 4043	+ 0. 8076	+ 0. 4033
	a	0	+ 0. 3120	+ 0. 3120

以上の如く片持梁方向においては引張り応力は起らない。下流側においては従来の考え方より大きい圧縮応力が起ることになる。

ii) 固定梁の曲げモーメント及び断面内最大応力

固定梁	計算点	曲げモーメント kg cm	最大内部応力 kg/cm²	備　考
(1)	固定端	− 7, 060, 876	∓ 0. 9967	上流側に引張応力
	a	− 6, 333, 470	∓ 0. 8924	

(1)	b	− 3,596,300	∓ 0.5071	
	c	+ 1,230,590	± 0.0266	
	d	+ 6,091,900	± 0.8585	下流側に引張応力
	e	+ 8,321,400	± 1.1734	
(2)	固定端	− 11,418,871	∓ 0.7555	
	f	− 5,865,646	∓ 0.3881	
	g	− 269,790	∓ 0.0179	
	h	+ 5.421,648	± 0.3587	
	i	+ 8,148,368	± 0.5391	
(3)	固定端	− 13,954,063	∓ 0.5339	
	j	− 3,658,133	∓ 0.1400	
	k	+ 4,563,864	± 0.1746	
	l	+ 8,672,023	± 0.3318	
(4)	固定端	− 13,184,858	∓ 0.3383	
	m	+ 1,211,442	± 0.0302	
	n	+ 7,320,862	± 0.1823	
(5)	固定端	− 6,411,851	∓ 0.1199	
	o	+ 3,432,608	± 0.0642	

以上の如く，固定梁 (1) においては固定端，*a*，*b* 附近には上流側に引張り応力が生じ，*c*，*d*，*e* 附近では下流側に引張り応力を生ずる。しかし，この応力は僅少であつて，梁の高さ 1m について φ 12mm の鉄筋3本を以て補強すれば足りる程度のものである。

固定梁 (2)，(3)，…………においても極めて僅かではあるが引張り応力が働くことが明白である。

第 4 節　堰堤の撓みの実験　其の2

（谷の横断面が矩形の場合）

§ 1.　寒天模型

1—13，1—14図に示す如き水槽を作り，これに寒天模型を作つた。この寒天模型の形状寸法は次の如きものである。

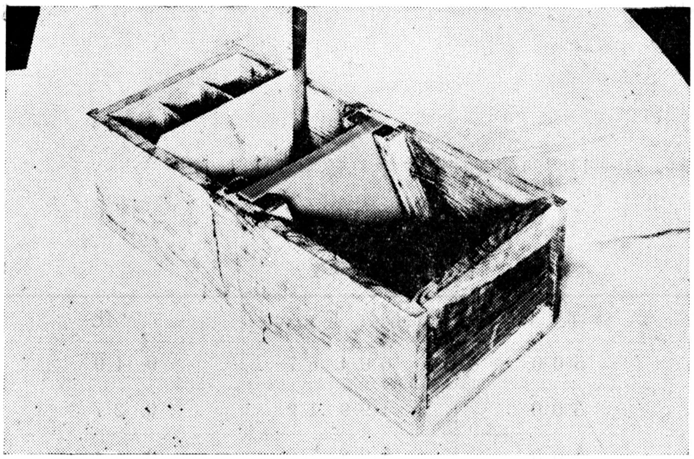
高　さ	180 mm	長　さ	260 mm
天端幅	29 mm	底　幅	145.61 mm

ここで左右両端において各 30mm，底辺において 30mm を固定し，圧力を受ける部分は

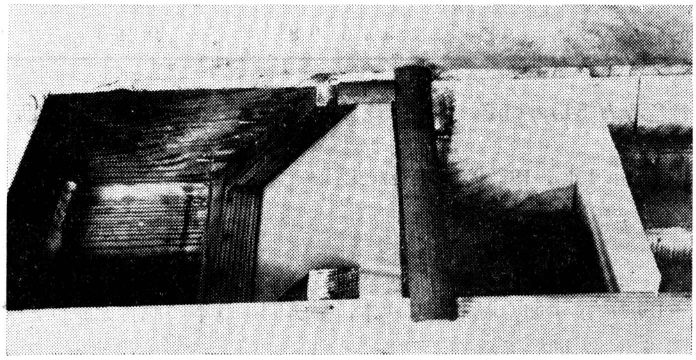
高　さ	150 mm	長　さ	200 mm
天端幅	29 mm	底　幅	115.61 mm

とし，矩形断面を有する谷に，梯形断面の模型堰堤を作製した。この断面図は1—15図に示す。

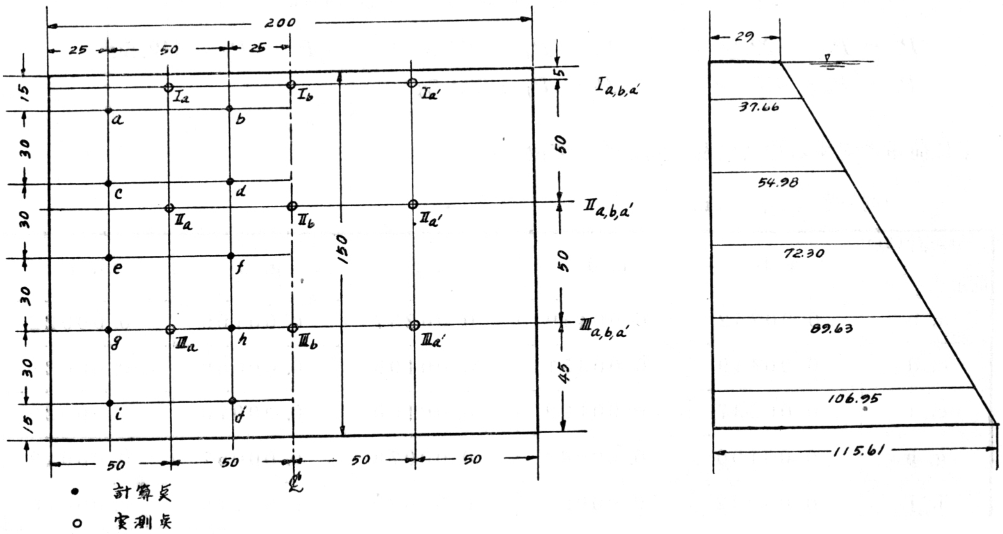
1 —13図



1 —14図



1 —15図



上流法の鉛直とのなす角を30°とし，下流法を鉛直とした。この模型に天端まで静水圧を荷載したことは第3節の実験と同様である。1—15図に示す如く，測線を縦3本，横3本とし，測線の交点における水平方向の撓みをマイクロメーターを用いて変位の測定を行つた。

§ 2. 材料の力学的性質

第3節の実験と同様，1—11図の如き試験片を，模型実験終了後において，この一部から切取つて作製した。試験方法は第3節 § 2. に述べたものと同様である。この試験結果は1—3表の通りである。

1—3表

試験片	試験荷重 gr	弾性係数 E g/cm²	ポアソン比 ν	比重
1	500	604.57	0.49	0.989
	300	499.12	0.27	
2	500	528.72	0.44	0.996
	300	535.04	0.42	
3	300	554.87	0.61	1.028
平均		546.98	0.45	1.004

理論値計算には，弾性係数E 545g/cm²，ポアン比 ν 0.45を採用した。従つて剪断弾性係数

$$G = \frac{1}{\nu}E\Big/2\left(\frac{1}{\nu}+1\right) = 187.9 \fallingdotseq 188\text{g/cm}^2$$ とした。

§ 3. 理論値計算点

理論値計算点は1—15図に示す如く縦方向に4本，横方向に5本の測線を設け，この交点について計算した。条件は第3節 § 3. と同様である。

§ 4. 外力の計算

各ブロックの外力を集中荷重とすること，及び荷重点は第3節と同様である。

$P_a = P_b = 22.5\text{g}$　　$P_c = P_d = 67.5\text{g}$　　$P_e = P_f = 112.5\text{g}$

$P_g = P_h = 157.5\text{g}$　　$P_i = P_j = 202.5\text{g}$

§ 5. 単位荷重に対する片持梁及び固定梁の変位

片持梁　　単位 cm

荷重点＼計算点	a, b	c, d	e, f	g, h	i, j
a, b	0.00752	0.00449	0.00237	0.00100	0.00022
c, d	0.00449	0.00351	0.00199	0.00089	0.00021
e, f	0.00237	0.00199	0.00160	0.00078	0.00020
g, h	0.00100	0.00089	0.00078	0.00067	0.00019
i, j	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00018

固定梁　　単位 cm

—ab—

荷重点＼計算点	a	b
a	0.00360	0.00765
b	0.00765	0.03607

—cd—

荷重点＼計算点	c	d
c	0.00199	0.00389
d	0.00389	0.01785

—ef—

荷重点＼計算点	e	f
e	0.00152	0.00298
f	0.00298	0.01365

—gh—

荷重点＼計算点	g	h
g	0.00097	0.00169
h	0.00169	0.00740

—ij—

荷重点＼計算点	i	j
i	0.00072	0.00114
j	0.00114	0.00478

§ 6.　変位方程式

片持梁で負荷すべき荷重を $a, b, \cdots\cdots j$, 固定梁の負荷すべき荷重を $A, B, \cdots\cdots J$, とすれば

$A = 22.5 - a$　　$B = 22.5 - b$　　$C = 67.5 - c$

$D = 67.5 - d$　　$E = 112.5 - e$　　$F = 112.5 - f$

$G = 157.5 - g$　　$H = 157.5 - h$　　$J = 202.5 - i$

$J = 202.5 - j$

第3節 § 6. と同様な考え方で次の変位方程式が成立する。

a 点

$0.00360\ (22.5-a) + 0.00765\ (22.5-b)$
$= 0.00752a + 0.00449c + 0.00237e + 0.00100g + 0.00022i$

b 点

$0.00765\ (22.5-a) + 0.03607\ (22.5-b)$
$= 0.00752b + 0.00449d + 0.00237f + 0.00100h + 0.00022j$

c 点

$0.00199\ (67.5-c) + 0.00389\ (67.5-d)$
$= 0.00449a + 0.00351c + 0.00199e + 0.00089g + 0.00021i$

d 点

$0.00389\ (67.5-c) + 0.01784\ (67.5-d)$
$= 0.00449b + 0.00351d + 0.00199f + 0.00089h + 0.00021j$

e 点

$0.00152\ (112.5-e) + 0.00298\ (112.5-f)$
$= 0.00237a + 0.00199c + 0.00160e + 0.00078g + 0.00020i$

………………… (1.52)

f 点

$0.00298\ (112.5-e)\ +0.01365\ (112.5-f)$
$= 0.00237b + 0.00199d + 0.000160f + 0.00078h + 0.00020j$

g 点

$0.00097\ (157.5-g)\ +0.00169\ (157.5-h)$
$= 0.00100a + 0.00089c + 0.00078e + 0.00067g + 0.00019i$

h 点

$0.00169\ (157.5-g)\ +0.00740\ (157.5-h)$
$= 0.00100b + 0.00089d + 0.00078f + 0.00067h + 0.00019j$

i 点

$0.00072\ (202.5-i)\ +0.00114\ (202.5-j)$
$= 0.00022a + 0.00021c + 0.00020e + 0.00019g + 0.00018i$

j 点

$0.00114\ (202.5-i)\ +0.00478\ (202.5-j)$
$= 0.00022b + 0.00021d + 0.00020f + 0.00019h + 0.00018j$

§ 7. 片持梁並に固定梁の分割荷重及び撓み

i) 分割荷重

変化方程式 (1.52) を解くと，次の分割荷重が得られる。

単位 gr

作用点	片　持　梁	固　定　梁	計
a	− 6.1012	28.6012	22.5
b	9.1680	13.3320	〃
c	12.6188	54.8812	67.5
d	47.5070	19.9930	〃
e	38.6212	73.8788	112.5
f	97.6590	14.8410	〃
g	70.7563	86.7437	157.5
h	142.1424	15.3576	〃
i	144.3710	58.1290	202.5
j	196.7115	5.7885	〃

ii) 撓　み　量

第3節 § 7. と同様にして次の如くなる。

計算点	片 持 梁　cm	固 定 梁　cm	誤　　差　(%)
a	0.204954	0.204954	0.000
b	0.699596	0.699684	〃
c	0.186984	0.186987	〃

d	0. 570163	0. 570163	〃
e	0. 156509	0. 156522	〃
f	0. 422734	0. 422739	〃
g	0. 110092	0. 110095	〃
h	0. 260233	0. 260243	〃
i	0. 048463	0. 048452	〃
j	0. 093940	0. 093936	〃

計算点	片持梁 cm	固定梁 cm	誤差(%)
ab 梁中央		0. 774713	
cd 〃		0. 625964	
ef 〃		0. 460036	
gh 〃		0. 280658	
ij 〃		0. 099807	
片持梁 acegi 自由端	0. 290425		
片持梁 bdfhj 自由端	0. 863382		

§ 8. 撓みの実験値と理論値の比較

実験値は1—4表の示す通りである。

1—4表　　　　撓み量 cm

測点		1	2	平均	
上部測線	Ⅰa	0. 141	0. 157	0. 149	0. 151
	Ⅰa′	0. 146	0. 158	0. 152	
	Ⅰb	0. 225	0. 246		0. 236
中央測線	Ⅱa	0. 092	0. 106	0. 099	0. 099
	Ⅱa′	0. 083	0. 115	0. 099	
	Ⅱb	0. 126	0. 144		0. 130
下部測線	Ⅲa	0. 070	0. 063	0. 067	0. 068
	Ⅲa′	0. 069	0. 066	0. 068	
	Ⅲb	0. 086	0. 076		0. 081

理論値に対する実験値の割合は次に示す通りであり，第3節の実験に較べ，その差が大である。このことは弾性係数の測定法に欠点のあることは考えられるが，第3節に述べた如く，模型の自重を無視したる点，荷重点を各ブロック中央点におき，水平に働く水圧とした点，各梁の重心に外力が作用していないため，捩り応力が起る点，などの諸問題が第3節の実験よりも顕著に現われているものと考えられる。

測点		理論値 cm	実験値 cm	実験値/理論値（%）
上部	Ⅰa. Ⅰa′	0.5354	0.151	28.20
測線	Ⅰb	0.8218	0.236	28.72
中央	Ⅱa. Ⅱa′	0.3489	0.099	28.37
測線	Ⅱb	0.5707	0.130	22.78
下部	Ⅲa. Ⅲa′	0.1852	0.068	38.72
測線	Ⅲb	0.2807	0.081	28.86
			平均	29.28

更に両固定端及び底面固定端の固定条件にも疑問がある。よつて本論では，その傾向を知ることが出来るが，正確な理論であるとはいえない。

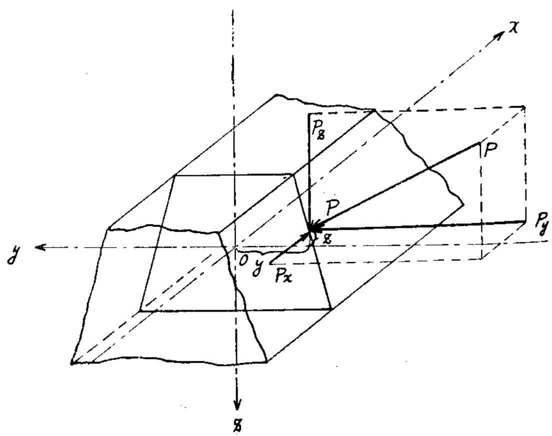
第Ⅱ章　捩り応力を考慮した場合における3次元応力の解法

第1節　固定梁の変位

任意の方向及び，大さを有する単一集中荷重を受ける場合，更に梁の長さの方向の中点を通る軸に垂直な平面に対して対称な2個の集中荷重を受ける場合，についての固定梁の変位について考察する。

§1.　任意荷重の各軸方向の成分，及び偶力

2—1図



2—1図に示す如く，点 P (o, y, z) に作用する任意の外力 P は3軸方向力 P_x, P_y, P_z 及び3偶力 M_x, M_y, M_z に分割される。但し P の添字は力の方向を表わし，M の添字は偶力の作用する軸を表わす。

そこで，これらの外力によつて生ずる変位と，それぞれの作用は次の如くなる。

1.　x—軸方向の変位に関係する力　P_x

これによつて生ずる変位は圧縮，及び伸張である。

2.　y—軸方向の変位に関係する力

$$P_y,\ M_z = P_x \times y$$

これはy—軸方向の撓みを生ずる。

3.　z—軸方向の変位に関係する力　P_z, $M_y = P_x \times z$

これは z—軸方向の撓みを生ずる。

4.　x—軸に直角な面内に捩りを生ずる力　$M_t = M_x = P_y \times z + P_z \times y$

以上の考察によつて分割された4成分から生ずる変位について，以下，各場合について検討する。

§2.　y—，z—軸方向の直応力，及び偶力による撓みと撓み角

i)　断面2次モーメント

今，対称とする固定梁の断面はy—軸に平行な2直線と，yz面内にあつて，z—軸に等角度を以て交る

2直線によつて囲まれた2等辺梯形であるとする。この断面2次モーメントは y—軸方向の変位については z—軸に対する断面2次モーメント I_z，z—軸方向の変位については y—軸に対する断面2次モーメント I_y を取らなければならない。

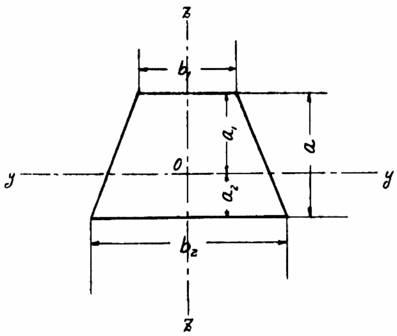
2－2図の如き断面において

$$\text{断面積}\ A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\,a$$

y—，z—軸に対する断面2次モーメント I_y，I_z はそれぞれ

$$I_y = \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{36\,(b_1 + b_2)}\,a^3 \quad \cdots\cdots (2.1)$$

2—2図



$$I_z = \frac{1}{48}(b_1^2 + b_2^2)(b_1 + b_2)\,a \quad \cdots\cdots (2.2)$$

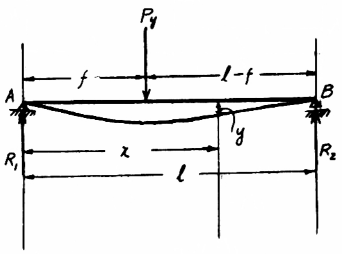
重心軸の位置は

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}\;\frac{a}{3} \\ a_2 &= \frac{b_2 + 2b_1}{b_1 + b_2}\;\frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.3)$$

によつて与えられる。

ii）　垂直荷重による単純梁の撓み，及び撓み角

2—3図



2—3図の如く，単一集中荷重 P_y が支点端 A から f の距離の点に働く場合の y 方向の撓みを考える。弾性係数を E，断面2次モーメントを I_z とすれば

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x \leqq f\ \text{において}\quad \frac{d^2 y_{1P}}{dx^2} = -\frac{P_y}{EI_z}\;\frac{l-f}{l}\,x \\ &(2)\quad x \geqq f\ \text{において}\quad \frac{d^2 y_{2P}}{dx^2} = -\frac{P_y}{EI_z}\left\{\frac{(l-f)x}{l} - (x-f)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

これを積分し

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{dy_{1P}}{dx}=-\frac{P_y}{EI_z}\,\frac{l-f}{2l}\,x^2+c_1\\&(2)\quad \frac{dy_{2P}}{dx}=-\frac{P_y}{EI_z}\left\{\frac{(l-f)}{2l}x^2-\frac{(x-f)^2}{2}\right\}+c_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

更に積分して

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad y_{1P}=-\frac{P_y}{EI_z}\,\frac{l-f}{6l}\,x^3+c_1x+c_3\\&(2)\quad y_{2P}=-\frac{P_y}{EI_z}\left\{\frac{(l-f)}{6l}x^3-\frac{(x-f)^3}{6}\right\}+c_2x+c_4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

boundary condition から積分常数を決定すれば次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{llll}x=f & \text{において} & y'_{1P}=y'_{2P} & \text{から}\quad c_1=c_2\\ x=f & 〃 & y_{1P}=y_{2P} & 〃\quad c_3=c_4\\ x=0 & 〃 & y_{1P}=0 & 〃\quad c_3=c_4=0\\ x=l & 〃 & y_{2P}=0 & 〃\\ \multicolumn{4}{r}{c_1=c_2=\dfrac{P_y}{6EI_z}\,\dfrac{(l-f)(2l-f)f}{l}}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.7)$$

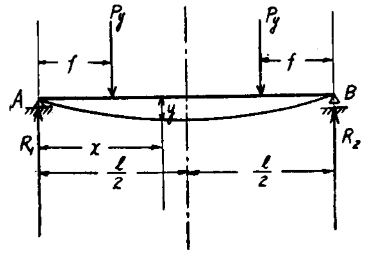
次に2—4図の如き集中荷重 P_y が，両支点端 A，B から等距離 f の点に2個作用する場合のy方向の撓み，及び撓み角を求める。

$R_1=R_2=P_y$

$x\leqq f$ において $M_1=P_yx$

$\dfrac{l}{2}\geqq x\geqq f$ 〃 $M_2=P_yf$

2—4図



$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x\leqq f \ \text{において}\ \frac{d^2y_{1P}}{dx^2}=-\frac{P_y}{EI_z}x\\&(2)\quad f\leqq x\leqq\frac{l}{2}\ \text{において}\ \frac{d^2y_{2P}}{dx^2}=-\frac{P_y}{EI_z}f\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.8)$$

これを逐次積分し

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{dy_{1P}}{dx}=-\frac{P_y}{2EI_z}x^2+c_1\\&(2)\quad \frac{dy_{2P}}{dx}=-\frac{P_y}{EI_z}fx+c_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.9)$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & y_{1P} = -\dfrac{P_y}{6EI_z}x^3 + c_1 x + c_3 \\
(2) & y_{2P} = -\dfrac{P_y}{2EI_z}f x^2 + c_2 x + c_4
\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.10)
$$

boundary condition から積分常数を決定すると

$$
\left.\begin{array}{lll}
x = f & \text{において} & y'_{1P} = y'_{2P} \\
x = \dfrac{l}{2} & 〃 & y'_{2P} = 0 \\
x = 0 & 〃 & y_{1P} = 0 \\
x = f & 〃 & y_{1P} = y_{2P}
\end{array}\right\}
\therefore
\left.\begin{array}{l}
c_1 = \dfrac{P_y f\,(l-f)}{2EI_z} \\
c_2 = \dfrac{P_y f l}{2EI_z} \\
c_3 = 0 \\
c_4 = -\dfrac{P_y f^3}{6EI_z}
\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.11)
$$

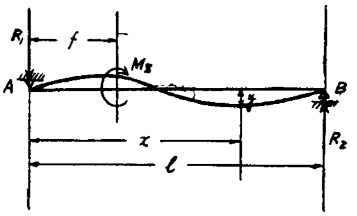
(2.9)，(2.10) 式は次の如くなる。

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{dy_{1P}}{dx} = -\dfrac{P_y}{2EI_z}\left\{x^2 - f(l-f)\right\} \\
(2) & \dfrac{dy_{2P}}{dx} = -\dfrac{P_y}{2EI_z}f\,(2x-l)
\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.12)
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & y_{1P} = \dfrac{P_y}{6EI_z}x\,(3fl - 3f^2 - x^2) \\
(2) & y_{2P} = \dfrac{P_y}{6EI_z}f\,(3xl - 3x^2 - f^2)
\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.13)
$$

iii) モーメントによる単純梁の撓み，及び撓み角

2—5図



2—5図の如きモーメント M_z が支点端 A から距離 f なる点に作用する場合の y 方向の撓み，及び撓み角を考えると

$$
R_1 = -R_2 = \frac{M_z}{l} \quad \text{から}
$$

$$
\left.\begin{array}{llll}
(1) & x \leqq f & \text{において} & \dfrac{d^2 y_{1M}}{dx^2} = \dfrac{M_z}{EI_z}\,\dfrac{x}{l} \\
(2) & x \geqq f & 〃 & \dfrac{d^2 y_{2M}}{dx^2} = \dfrac{M_z}{EI_z}\left(\dfrac{x}{l} - 1\right)
\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.14)
$$

これを積分すると次の如く書くことが出来る。

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{dy_{1M}}{dx}=\frac{M_z}{EI_z}\,\frac{x^2}{2l}+c_1\\&(2)\quad \frac{dy_{2M}}{dx}=\frac{M_z}{EI_z}\left\{\frac{x^2}{2l}-(x-f)\right\}+c_2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.15)$$

更に積分して

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad y_{1M}=\frac{M_z}{EI_z}\,\frac{x^3}{6l}+c_1x+c_3\\&(2)\quad y_{2M}=\frac{M_z}{EI_z}\left\{\frac{x^3}{6l}-\frac{1}{2}(x-f)^2\right\}+c_2x+c_4\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.16)$$

boundary condition から積分常数を決定すれば

$$\left.\begin{aligned}&x=f\quad \text{において}\quad y'_{1M}=y'_{2M}\quad \therefore\ c_1=c_2\\&x=f\quad 〃\quad y_{1M}=y_{2M}\quad \therefore\ c_3=c_4\\&x=0\quad 〃\quad y_{1M}=0\quad \therefore\ c_3=0\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_4=0\\&x=l\quad 〃\quad y_{2M}=0\\&\qquad\therefore\ c_1=c_2=\frac{M_z}{6EI_zl}\,(2l^2-6lf+f^2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.17)$$

次に2—6図の如く，大さ等しく，反対方向のモーメント $M_z, -M_z$ が両端 A，B から等距離 f なる点に作用する場合の y 方向の撓み，及び撓み角は次の如くなる。

$$R_1=R_2=0$$

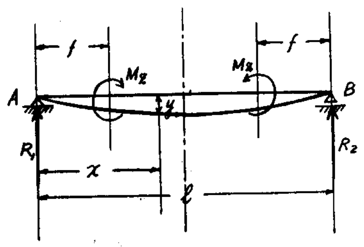
$$x\leqq f\quad \text{においては}\quad M_1=0$$

$$f\leqq x\leqq\frac{l}{2}\quad 〃\quad M_2=M_z$$

よつて

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x\leqq f\quad \text{において}\quad \frac{d^2y_{1M}}{dx^2}=0\\&(2)\quad f\leqq x\leqq\frac{l}{2}\quad 〃\quad \frac{d^2y_{2M}}{dx^2}=-\frac{M_z}{EI_z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.18)$$

2—6図



これを遂次積分して

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{dy_{1M}}{dx}=c_1\\&(2)\quad \frac{dy_{2M}}{dx}=-\frac{M_z}{EI_z}x+c_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.19)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad y_{1M}=c_1x+c_2\\&(2)\quad y_{2M}=-\frac{M_z}{2EI_z}x^2+c_3x+c_4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.20)$$

boundary condition から積分常数は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{llll}x=0 & \text{において} & y_{1M}=0 & \therefore\ c_2=0\\ x=\dfrac{1}{2} & 〃 & y'_{2M}=0 & \therefore\ c_3=\dfrac{M_zl}{2EI_z}\\ x=f & 〃 & y'_{1M}=y'_{2M} & \therefore\ c_4=-\dfrac{M_z}{2EI_z}f^2\\ x=f & 〃 & y_{1M}=y_{2M} & \therefore\ c_1=-\dfrac{M_z}{2EI_z}(2f-l)\end{array}\right\}\cdots(2.21)$$

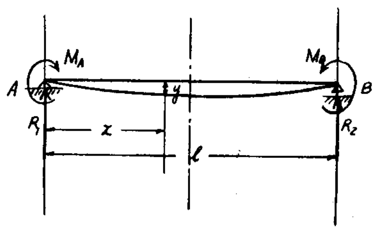
(2.19), (2.20) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{dy_{1M}}{dx}=-\frac{M_z}{2EI_z}(2f-l)\\&(2)\quad \frac{dy_{2M}}{dx}=-\frac{M_z}{2EI_z}(2x-l)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.22)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad y_{1M}=-\frac{M_z}{2EI_z}(2f-l)\,x\\&(2)\quad y_{2M}=-\frac{M_z}{2EI_z}(x^2-lx+f^2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.23)$$

iv) 両支点端にモーメントを有する単純梁の撓み，及び撓み角

2—7図



2—7図の如く両支点 A, B にモーメント M_A, M_B が働く場合の y 方向の撓み，及び撓み角は次の如くなる。

$$R_1=-\frac{M_A-M_B}{l}$$

$$R_2=\frac{M_A-M_B}{l}$$

この場合経間には荷重が作用しないから $EI_z \dfrac{d^4y}{dx^4} = 0$ であるから，撓み曲線の方程式は，これを逐次積分して

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \frac{dy_E}{dx} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3\right) \\ &(2)\quad y_E = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.24)$$

boundary condition から積分常数は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 \quad \text{において} \quad y_E = 0, \quad EI_z y''_E = -M_A \\ &x = l \quad \text{〃} \quad y_E = 0, \quad EI_z y''_E = -M_B \end{aligned}\right\} \text{から}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = \frac{M_A - M_B}{l}, \quad c_2 = -M_A \\ &c_3 = \frac{(2M_A + M_B)}{6} l, \; c_4 = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.25)$$

荷重が対称な場合は $M_A = M_B = M$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = -M \\ &c_3 = \frac{l}{2} M \quad , \quad c_4 = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.25')$$

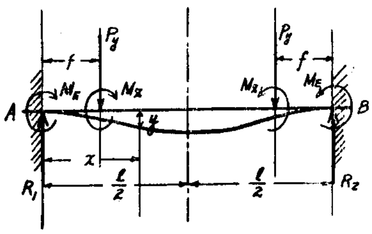
よつて (2.24) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \frac{dy_E}{dx} = -\frac{M_E}{2EI_z}(2x - l) \\ &(2)\quad y_E = -\frac{M_E}{2EI_z}(x^2 - lx) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.26)$$

v)　固定梁に対称な任意荷重が作用する場合の撓み，及び撓み角

2—8図の如き固定梁において両固定端からそれぞれ f なる距離の点に垂直集中荷重 P_y，及びモーメント M_z が作用する場合の撓み，及び撓み角を考える。

2—8図



この場合，仮に単純梁であるとするならば，撓み角は (2.12)，(2.22) 式の代数和であり，撓みは (2.13)，(2.23)式の代数和である。これが固定梁であるために，固定梁の条件として $x = 0$，及び $x = l$ において $\dfrac{dy}{dx} = 0$ とならなければならない。この条件を満足させるためには，それぞれ (2.26) 式の (1)，(2) で与えられる如き端モーメントを与えなければならない。

即ち，$x = 0$ において $y'_{1P} + y'_{1M} + y'_E = 0$ から次式が得られる。

$$\frac{1}{2EI_z}\left\{P_y\ (fl-f^2)\ -M_z\ (2f-l)\ +M_E l\right\}=0$$

$$M_E=-\frac{1}{l}\left\{P_y\ (fl-f^2)\ -M_z\ (2f-l)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.27)}$$

(2.27) 式を (2.26) 式に代入すると

$$\left.\begin{aligned}&(1)\qquad \frac{dy_E}{dx}=\frac{1}{2EI_z l}\left\{P_y\ (fl-f^2)\ -M_z\ (2f-l)\right\}\ (2x-l)\\&(2)\qquad y_E=\frac{1}{2EI_z l}\left\{P_y\ (fl-f^2)\ -M_z\ (2f-l)\right\}\ (x^2-lx)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots \text{(2.28)}$$

となり，(2.12)，(2.22)，(2.28) 式の代数和即ち撓み角は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=\frac{1}{2EI_z}\left[P_y\left\{2\frac{f\ (l-f)}{l}x-x^2\right\}-2M_z\left(\frac{2f}{l}-1\right)x\right]\\\frac{dy_2}{dx}&=\frac{1}{2EI_z}f\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(P_y f+2M_z\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.29)}$$

また，(2.13)，(2.23)，(2.28) 式の代数和は撓みを示すものである。

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\frac{1}{6EI_z}\left[P_y\left\{3\frac{f\ (l-f)}{l}x^2-x^3\right\}-3M_z\left(\frac{2f}{l}-1\right)x^2\right]\\y_2&=\frac{1}{6EI_z}\left\{P_y f^2\left(3x-3\frac{x^2}{l}-f\right)-3M_z f\left(f-2x+\frac{2x^2}{l}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots \text{(2.30)}$$

以上の (2.29)，(2.30) 式から任意対称荷重に対する固定梁の撓み，及び撓み角が与えられる。

ここに示すものは y 方向に関する変位である。z 方向に関しても同様に，I_z の代りに I_y を，P_y の代りに P_z を，M_z の代りに M_y を用いると，次の如くなる。

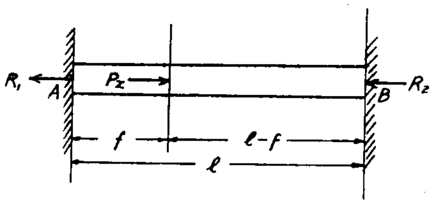
$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dx}&=\frac{1}{2EI_y}\left[P_z\left\{2\frac{f\ (l-f)}{l}x-x^2\right\}-2M_y\left(\frac{2f}{l}-1\right)x\right]\\\frac{dz_2}{dx}&=\frac{1}{2EI_y}f\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(P_z f+2M_y\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots \text{(2.31)}$$

$$\left.\begin{aligned}z_1&=\frac{1}{6EI_y}\left[P_z\left\{3\frac{f\ (l-f)}{l}x^2-x^3\right\}-3M_y\left(\frac{2f}{l}-1\right)x^2\right]\\z_2&=\frac{1}{6EI_y}\left\{P_z f^2\left(3x-3\frac{x^2}{l}-f\right)-3M_y f\left(f-2x+\frac{2x^2}{l}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.32)}$$

以上，求めた一般式は荷重が梁の中点に対し，対称な場合のものであるが，任意単一荷重の場合については，それぞれ ii)，iii)，iv) において求めた，撓み，撓み角の式から，同様の固定端条件を満足する方程式が求められる。また，非対称な荷重についても各個について求めた結果の代数和を求めることによつて容易にその解が得られる。今，ここで特殊な対称荷重の場合のみについての一般式を求めたのは，これを分割荷重法の計算に用いる場合，非対称荷重については，計算上の労力が甚しく増大するため，実用上使用に適さないからである。しかしながら，もし堰堤の平面形状が対称でない場合は，例え労力が大きくなつても，前述のような組合せによる計算式を作り直すことが必要である。

§3. x 方向の直応力による伸びと縮み

2—9図



2—9図において P_x は重心軸に沿つて作用する。棒 AB は曲ることもなく，捩れることもなく，且つ，軸方向の伸縮は微小であるから，そのために棒の断面積の変化を無視するものとする。

$$\left.\begin{aligned} & R_1 + R_2 = P_x \\ & \frac{R_1 f}{AE} = \frac{R_2\,(l-f)}{AE} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.33)$$

上式から

$$\left.\begin{aligned} & R_1 = \frac{l-f}{l} Px \\ & R_2 = \frac{f}{l} Px \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.34)$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x \leqq f \text{ において } \quad \sigma_1 = \frac{P_x}{A}\,\frac{l-f}{l} \\ &(2)\quad x \geqq f \text{ において } \quad \sigma_2 = -\frac{P_x}{A}\,\frac{f}{l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.35)$$

故に各点の伸縮は

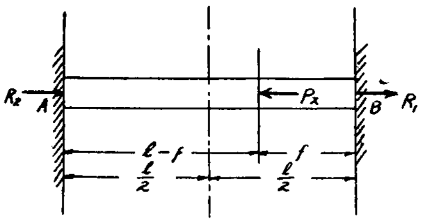
$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad du_1 = \frac{P_x}{EA}\,\frac{l-f}{l} \\ &(2)\quad du_2 = -\frac{P_x}{EA}\,\frac{f}{l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.36)$$

となり，各点の変位は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad u_1 = \frac{P_x}{EA}\,\frac{l-f}{l}\,x \\ &(2)\quad u_2 = \frac{P_x}{EA}\,\frac{f}{l}\,(l-x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.37)$$

次に両端から f なる距離に対称な直応力 P_x，$-P_x$ が作用する場合は 2—9図，2—10図を合せて考えたものであり，次式で表わされる。

2—10図



$$\left.\begin{array}{llll} (1) & x \leqq f & \text{において} & \sigma_1 = \dfrac{P_x}{A}\dfrac{l-2f}{l} \\ (2) & f \leqq x \leqq \dfrac{l}{2} & 〃 & \sigma_2 = -\dfrac{P_x}{A}\dfrac{2f}{l} \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.35)'$$

各点の伸縮は

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & du_1 = \dfrac{P_x}{EA}\dfrac{l-2f}{l} \\ (2) & du_2 = -\dfrac{P_x}{EA}\dfrac{2f}{l} \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.36)'$$

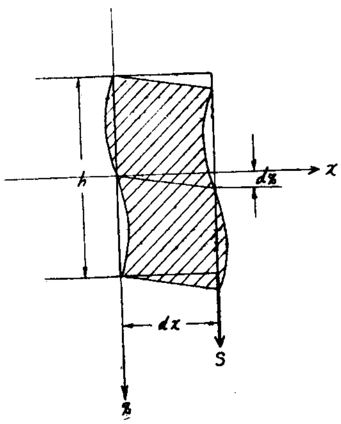
各点の変位は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{llll} (1) & x \leqq f & \text{において} & u_1 = \dfrac{P_x}{AE}\dfrac{l-2f}{l}x \\ (2) & f \leqq x \leqq \dfrac{l}{2} & 〃 & u_2 = \dfrac{P_x}{AE}\dfrac{l-2x}{l}f \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.38)$$

§ 4. 剪断力による y 方向，及び z 方向の撓み

i) 剪断力の影響

2—11図



長さ dx の微小部分を考えると，両端面が剪断力 S を受けて辷る場合，断面中の角変化は一様でなく，中立軸が最大で，それから距離を隔てるに従つて漸減する。そして上下端面で 0 である。剪断力 S によつて dz だけ移動するためになされる仕事は，応力 τ の仕事に等しいという条件から dx に対する変位 dz を求めると，

$$\frac{1}{2}Sdz = dx\int\frac{\tau^2}{2G}dF \cdots\cdots (2.39)$$

ここで G は剪断弾性係数であり，積分は全面積について行う。故に断面中の τ の分布が与えられると，変位は次式で求められる。

$$z = \frac{1}{G}\int\frac{dx}{S}\int\tau^2 dF \cdots\cdots (2.40)$$

ii）　梯形断面における τ の分布，及び τ^2 の積分

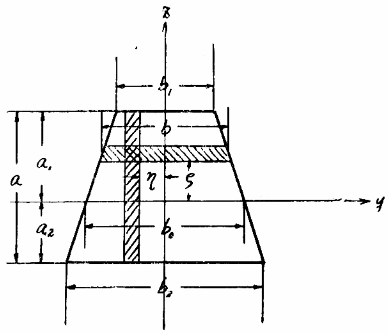
2—12図において z 方向の変位を考える場合，断面は z—軸に対し対称である。ζ = constant 即ち y—軸に平行な面上の τ_z の分布は一定とみなすと，次式が与えられる。

$$\tau_z = \frac{S}{b\cos\psi}\frac{Q}{I_y} \quad \cdots\cdots (2.41)$$

ここでは ψ は両側面と z—軸とのなす角，Q は ζ より外側の全断面の y—軸に対する力率である。しかるに

$$b = b_0 - 2\zeta\tan\psi$$

2—12図



$\zeta > 0$ なるとき

$$Q_1 = \int_{\zeta}^{a_1}(b_0 - 2\zeta\tan\psi)\zeta\, d\zeta = \frac{1}{24\tan\psi}\,(2b_1^3 - 3b_0b_1 - 2b^3 + 3b_0b^2)$$

$\zeta < 0$ なるとき

$$Q_2 = \int_{\zeta}^{a_2}(b_0 - 2\zeta\tan\psi)\zeta\, d\zeta = \frac{1}{24\tan\varphi}\,(2b_2^3 + 3b_0b_2 - 2b^3 - 3b_0b^2)$$

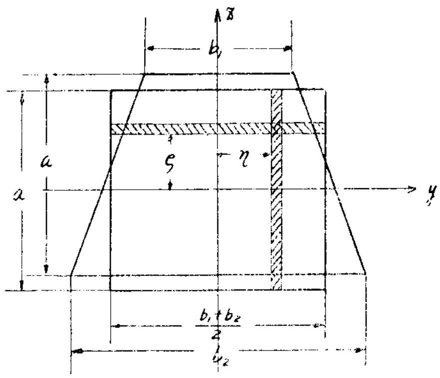
$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \tau_{+z} &= \frac{S}{I_y}\,\frac{2b_1^3 - 3b_0b_1 - 2b^3 + 3b_0b^2}{24\,b\sin\psi} \\ \tau_{-z} &= \frac{-S}{I_y}\,\frac{2b_2^3 + 3b_0b_2 - 2b^3 - 3b_0b^2}{24\,b\sin\psi} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.42)$$

$$\int_{-a_2}^{+a_1}\tau^2 dF = \frac{S}{24Iy}\left[\int_0^{b_1}\left(\frac{2b_1^3 - 3b_0b_1}{b} - 2b^2 + 3b_0b\right)db\right.$$
$$\left. + \int_0^{b_2}\left(\frac{2b_2^3 + 3b_0b_2}{b} - 2b^2 - 3b_0b\right)db\right] \quad \cdots\cdots (2.43)$$

(2.43) 式によつて τ^2 の積分が得られるが，実際問題として，今取扱う $\zeta\tan\psi$ は b_0 に比べて小さいから，このような計算は行わないで，z 方向の長さ a，y 方向に $\frac{1}{2}(b_1 + b_2) = b$ なる矩形断面に置き換えたものに対して計算しても，τ^2 の積分には殆んど差がない。

また，y 方向の τ_y の分布についても，断面が y—軸に対して非対称であるので，その分布は η のみの函数として表わされず，弾性学的に基礎方程式の積分から始めなければならない。そこで，この場合も，その誤差が微小であるという点から，便宜上，上述の如き矩形断面に置き換えた断面について考える。

2—13図



梯形断面を2—13図の如く y 方向に $b=\frac{1}{2}(b_1+b_2)$, z 方向に a なる矩形に置換える。

$$\psi = 0$$

$$I_z = \frac{1}{12}a^3b \qquad Iy = \frac{1}{12}ab^3$$

$$Q_y = \frac{b}{2}\left(\frac{a^2}{4}-\zeta^2\right)$$

$$Q_z = \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{2}-\eta^2\right)$$

故に

$$\left.\begin{aligned}\tau_y &= \frac{S}{a}\frac{Q_z}{I_z} = \frac{3}{2}\frac{S}{ab}\left\{1-\left(\frac{2\eta}{b}\right)^2\right\}\\ \tau_z &= \frac{S}{b}\frac{Q_y}{I_y} = \frac{3}{2}\frac{S}{ab}\left\{1-\left(\frac{2\zeta}{a}\right)^2\right\}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.44)$$

依つて，τ^2 の積分は

$$\left.\begin{aligned}\int\tau_y{}^2\,dF &= \frac{9}{4}\frac{S^2}{ab^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\left\{1-\left(\frac{2\eta}{b}\right)^2\right\}d\eta = \frac{6}{5}\frac{S^2}{ab}\\ \int\tau_z{}^2\,dF &= \frac{9}{4}\frac{S^2}{a^2b}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left\{1-\left(\frac{2\zeta}{a}\right)^2\right\}d\zeta = \frac{6}{5}\frac{S^2}{ab}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.45)$$

即ち，剪断力 S による変位の仕事は y, z 方向共に同じ値になる。

iii) 剪断力による撓み

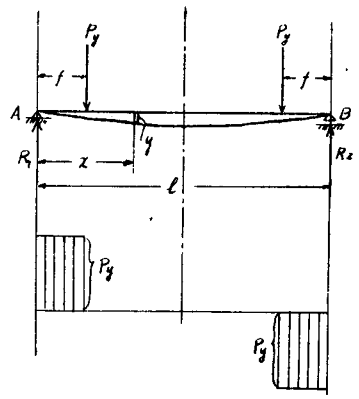
2—14図の如く，対称荷重を受ける場合の剪断力の分布は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x\leqq f \ \text{において}\quad S=P_y\\ &(2)\quad f<x\leqq\frac{l}{2}\ 〃\quad S=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.46)$$

故に

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x\leqq f \ \text{において}\quad \frac{dy_{1s}}{dx}=\frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{1}{ab}\\ &(2)\quad f<x\leqq\frac{l}{2}\ \text{において}\quad \frac{dy_{2s}}{dx}=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.47)$$

2—14図



(2.47) 式を積分し

$$
\left.\begin{aligned}
&(1) \quad y_{1S} = \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{1}{ab}x + c_1 \\
&(2) \quad y_{2S} = c_2
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.48)
$$

boundary condition から積分常数を定めると次の如くなる。

$$
\left.\begin{aligned}
&x = 0 \quad \text{において} \quad y_{1S} = 0 \quad \therefore \ c_1 = 0 \\
&x = f \quad \text{〃} \quad y_{1S} = y_{2S} \quad \therefore \ c_2 = \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{f}{ab}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.49)
$$

故に

$$
\left.\begin{aligned}
&(1) \quad y_{1S} = \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{x}{ab} \\
&(2) \quad y_{2S} = \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{f}{ab}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.50)
$$

即ち，撓み曲線は折線となり，荷重点において不連続である。

以上は y 方向の撓みであるが，z 方向も全く同じ形の式が与えられる。即ち次の如し。

$$
\left.\begin{aligned}
&(1) \quad z'_{1S} = \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{1}{ab} \\
&(2) \quad z'_{2S} = 0
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.51)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&(1) \quad z_{1S} = \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{x}{ab} \\
&(3) \quad z_{2S} = \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{f}{ab}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.52)
$$

§ 5. 捩りモーメントによる変位

i) 角柱の捩り

この場合，考える断面は梯形であるが，梯形断面の捩りに対する解は，基礎方程式を解くことが困難であるので，今計算に当つては § 4. において取つた方法と同様に矩形断面の柱と考える。

矩形断面の柱体の捩りについては，種々の解があるが，St. Venant の解が最も優れていると思われるので，今 St. Venant の解を用いる。断面の長辺を a，短辺を b とすれば，捩れ角 θ は

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{3M_t}{Gb^3(a-0.63b)}\\ \text{或は}\quad \theta &= \frac{1}{\beta}\frac{M_t}{Gb^3a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.53)$$

となる。ここで G は剪断弾性係数，M_t は重心軸に作用する捩り外力である。

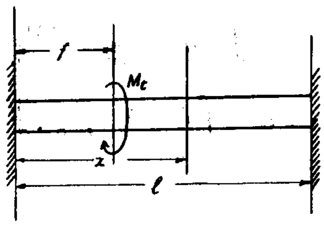
(2.53) 式は級数展開によつて求めた式である。その値を係数 β で表わしたものと，これを近似的に代数式で与えたものとがある。正確な計算から求めた β と代数式から求めた β' を比較すると次の如くなる。

a/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
β	.141	.196	.214	.229	.249	.263	.281	.299	.307	.313	.333
β'	.124	.193	.213	.228	.249	.263	.281	.298	.307	.312	.333

即ち，b と a の値が近い場合は，その差は大きいが，b，a の差が大きくなれば，前者の代数式を用いて充分によい近似値が得られる。よつて，この場合は便宜上代数式の形を用いることとする。

ii) 固定梁の捩り

2—15図



固定梁の一端から f の距離にトルク M_t が作用する場合の各点の捩り角を求める。

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x<f \text{ において}\quad M_{t1} = M_t\frac{l-f}{l}\\ &(2)\quad x>f \quad〃\quad M_{t2} = M_t\frac{f}{l}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.54)$$

よつて，各点の捩り角は

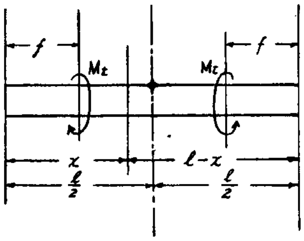
$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x<f \text{ において}\quad \theta_1 = \frac{3M_t}{Gb^3(a-0.63b)}\frac{l-f}{l}\\ &(2)\quad x>f \quad〃\quad \theta_2 = \frac{3M_t}{Gb^3(a-0.63b)}\frac{f}{l}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.55)$$

故に各点の角変位は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x<f \text{ において}\quad \alpha_1 = \int\theta_1\,dx = \frac{3M_t}{Gb^3(a-0.63b)}\frac{l-f}{l}x\\ &(2)\quad x>f \text{ において}\quad \alpha_2 = \int\theta_2\,dx = \frac{3M_t}{Gb^3(a-0.63b)}\frac{f}{l}(l-x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.56)$$

次に２—16図の如く対称な２点に同方向の振りトルクが２個作用する場合は，次の如くなる。

2—16図



$$\left.\begin{array}{llll}(1) & x<f & \text{において} & M_{t1}=M_t \\ (2) & f<x\leqq\dfrac{l}{2} & 〃 & M_{t2}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2.57)$$

各点の振り角は

$$\left.\begin{array}{llll}(1) & x<f & \text{において} & \theta_1=\dfrac{3M_t}{G\,b^3(a-0.63b)} \\ (2) & f<x\leqq\dfrac{l}{2} & 〃 & \theta_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2.58)$$

となり，各点の角変位は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{llll}(1) & x<f & \text{において} & \alpha_1=\displaystyle\int\theta_1\,dx=\frac{3M_t}{G\,b^3(a-0.63b)}\,x \\ (2) & f<x\leqq\dfrac{l}{2} & \text{において} & \alpha_2=\displaystyle\int\theta_2\,dx=\frac{3M_t}{G\,b_3(a-0.63b)}\,f\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2.59)$$

§ 6.　固定梁の変位（総括）

§ 1.～§ 5. において求めた変位成分を x，y，z 方向について，それぞれ総括すると，次の如くなる。

i)　x 方向の変位

(2.38) 式

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \mu_1=\dfrac{P_x}{AE}\,\dfrac{l-2f}{l}\,x \\ (2) & \mu_2=\dfrac{P_x}{AE}\,\dfrac{l-2x}{l}\,f\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$A=\frac{1}{2}a\,(b_1+b_2)=ab$$

ii)　y 方向の変位

(2.30)，(2.50) 式から

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y_1=\dfrac{1}{6EI_z}\left[P_y\left\{3\dfrac{f(l-f)}{l}x^2-x^3\right\}-3M_z\left(\dfrac{2f}{l}-1\right)x^2\right]+\dfrac{6}{5}\,\dfrac{P_y}{G}\,\dfrac{x}{ab} \\ (2) & y_2=\dfrac{1}{6EI_z}\left\{P_yf^2\left(3x-3\dfrac{x^2}{l}-f\right)-3M_zf\left(f-2x+\dfrac{2x^2}{l}\right)\right\}+\dfrac{6}{5}\,\dfrac{P_y}{G}\,\dfrac{f}{ab}\end{array}\right\}\cdots(\mathrm{II})$$

(2.29), (2.47) 式から

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad y_1' = \frac{1}{2EI_z}\left[P_y\left\{2\frac{f(l-f)}{l}x - x^2\right\} - 2M_z\left(\frac{2f}{l}-1\right)x\right] + \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{1}{ab}\\&(2)\quad y_2' = \frac{1}{2EI_z}f\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(P_yf + 2M_z\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

$$I_z = \frac{1}{48}(b_1^2 + b_2^2)(b_1 + b_2)a$$

iii)　z 方向の変位

(2.32), (2.52) 式から

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad z_1 = \frac{1}{6EI_y}\left[P_z\left\{3\frac{f(l-f)}{l}x^2 - x^3\right\} - 3M_y\left(\frac{2f}{l}-1\right)x^2\right] + \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{x}{ab}\\&(2)\quad z_2 = \frac{1}{6EI_y}\left\{P_zf^2\left(3x-3\frac{x^2}{l}-f\right) - 3M_y\left(f-2x+\frac{2x^2}{l}\right)f\right\} + \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{f}{ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(\text{IV})$$

(2.31), (2.51) 式から

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad z_1' = \frac{1}{2EI_y}\left[P_z\left\{2\frac{f(l-f)}{l}x - x^2\right\} - 2M_y\left(\frac{2f}{l}-1\right)x\right] + \frac{6}{5}\frac{P_z}{G}\frac{1}{ab}\\&(2)\quad z_2' = \frac{1}{2EI_y}f\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(P_yf + 2M_y\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{V})$$

$$I_y = \frac{1}{36}\frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}a^3$$

iv)　x—軸の廻りの捩り

(2.59) 式から

$b > a$ なるとき

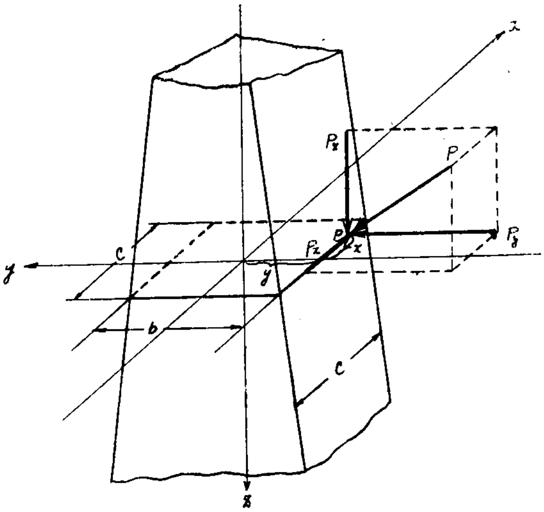
$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \alpha_1 = \frac{3M_x}{G\,a^3(b-0.63a)}x\\&(2)\quad \alpha_2 = \frac{3M_x}{G\,a^3(b-0.63a)}f\\&b < a \text{ なるとき}\\&(1)\quad \alpha_1 = \frac{3M_x}{G\,b^3(a-0.63b)}x\\&(2)\quad \alpha_2 = \frac{3M_x}{G\,b^3(a-0.63b)}f\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{VI})$$

以上（I）～（VI）式から固定梁に対する任意外力による変位のすべての成分が与えられる。

第 2 節　　片持梁の変位

x—軸を重心軸とし，x 方向の幅一定，y 方向の幅は z—軸に対し，対称にして，直線的に変化する矩形断面の片持梁の変位について，第 1 節と同様に考察する。

2―17図



§ 1.　任意荷重の各軸成分，及びモーメント

2―17図に示す如く，点 p (x, y, o) に作用する任意外力 P は3垂直力 P_x, P_y, P_z 及びモーメント M_x, M_y, M_z に分けられる。（P, M の添字は第1節 § 1. と同様である。）そこで，これ等外力と，それによつて生ずる変位の関係は次の如くである。

1.　x 方向の変位に関係する力は P_x, $M_y = P_z \times x$ であり，生ずる変位は x 方向の撓みである。

2.　y 方向の変位に関係する力は P_y, $M_x = P_z \times y$ であり，生ずる変位は y 方向の撓みである。

3.　z 方向の変位に関係する力は P_z であり，これによつて z 方向の伸び，或は縮みを生ずる。

4.　z―軸に直角な面内に捩りを生ずる力は $M_t = M_z = P_x \times y + P_y \times x$ である。

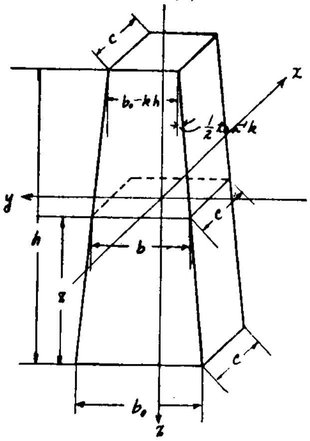
そこで，この分割された成分からなる変位について，各々の場合を考察する。

§ 2.　x, y 方向の直応力，及びモーメントによる撓み並に撓み角

i)　断面2次モーメント

断面は辺長 b, c を有する矩形であつて，b の値は z と共に直線的変化をする。よつて2―18図の如き高さ z なる断面における x―, y―軸に対する断面2次モーメントは次式で表わされる。y 方向の変位を考える場合は I_x を，x 方向の変位を考える場合は I_y をとり，これを外力 P_y, M_x 及び P_x, M_y をそれぞれ組合せて各々の場合について考えればよい。

2―18図

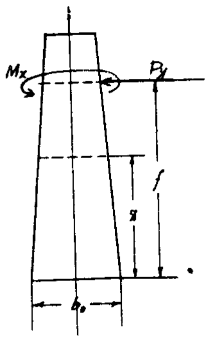


$$
\left.
\begin{aligned}
I_x &= \frac{b^3 c}{12} = \frac{(b_0 - kz)^3 c}{12} \\
I_y &= \frac{b c^3}{12} = \frac{(b_0 - kz) c^3}{12}
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.60)
$$

ii)　片持梁の y 方向の変位

重心軸に直角な荷重 P_y が固定端から f の点に作用する場合の撓み，及び撓み角は次の如くなる。

2 −19図



$$\left.\begin{array}{lll}(1) & z<f \text{ において } & M_{1P}=-P_y\,(f-z)\\ (2) & z>f \quad 〃 & M_{2P}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2.61)$$

故に

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{d^2y_{1P}}{dz^2}=\dfrac{12P_y}{Ec}\;\dfrac{f-z}{(b_0-kz)^3}\\ (2) & \dfrac{d^2y_{2P}}{dz^2}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (2.62)$$

これを逐次積分すれば

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dy_{1P}}{dz}=\dfrac{6P_y}{Eck^2}\left\{\dfrac{2}{b_0-kz}-\dfrac{b_0-kf}{(b_0-kz)^2}\right\}+c_1\\ (2) & \dfrac{dy_{2P}}{dz}=c_3\end{array}\right\}\cdots\cdots (2.63)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y_{1P}=\dfrac{6P_y}{Eck^3}\left\{-2\log_e\,(b_0-kz)-\dfrac{b_0-kf}{b_0-kz}\right\}+c_1z+c_2\\ (2) & y_{2P}=c_3\,(z-f)+c_4\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.64)$$

boundary condition から積分常数を決定すると，次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{l}z=0 \text{ において } y_{1P}'=0\\ \quad\therefore\; c_1=-\dfrac{6P_y}{Eck^2}\;\dfrac{b_0+kf}{b_0^2}\\ z=0 \text{ において } y_{1P}=0\\ \quad\therefore\; c_2=\dfrac{6P_y}{Eck^3}\left(2\log_e b_0+\dfrac{b_0-kf}{b_0}\right)\\ z=f \text{ において } y'_{1P}=y'_{2P}\\ \quad\therefore\; c_3=\dfrac{6P_y}{Ec}\;\dfrac{f^2}{(b_0-kf)\,b_0^2}\\ z=f \text{ において } y_{1P}=y_{2P}\\ \quad\therefore\; c_4=-\dfrac{6P}{Eck^3}\left\{2\log_e\dfrac{b_0-kf}{f}+\dfrac{kf\,(2b_0+kf)}{b_0^2}\right\}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.65)$$

よつて，(2.63)，(2.64) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dy_{1P}}{dz}=\dfrac{6P_y}{Eck^2}\left\{\dfrac{2}{b_0-kz}-\dfrac{b_0+kf}{b_0^2}-\dfrac{b_0-kf}{(b_0-kz)^2}\right\}\\ (2) & \dfrac{dy_{2P}}{dz}=\dfrac{6P_y}{Ec}\;\dfrac{f^2}{(b_0-kf)b_0^2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.66)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y_{1P}=\dfrac{6P_y}{Eck^3}\left\{-2\log_e\dfrac{b_0-kz}{b_0}-\dfrac{kz}{b_0}\left(\dfrac{b_0-kf}{b_0-kz}+\dfrac{b_0+kf}{b_0}\right)\right\}\\ (2) & y_{2P}=\dfrac{6P_y}{Eck^3}\left\{\dfrac{k^3f^2}{b_0^2(b_0-kf)}(z-f)-\dfrac{kf}{b_0^2}(2b_0+kf)\right.\\ & \qquad\qquad\left.-2\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0}\right\}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.67)$$

次に zー軸方向の直力 P_z によつて生ずるモーメント M_x による撓み，及び撓み角は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & z<f \text{ なるとき } M_1=+M_x \\ (2) & z>f \text{ なるとき } M_2=0\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.68)$$

故に

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{d^2y_{1M}}{dz^2}=-\dfrac{12M_x}{Ec}\dfrac{1}{(b_0-kz)^3} \\ (2) & \dfrac{d^2y_{2M}}{dz^2}=0\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.69)$$

これを逐次積分して

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dy_{1M}}{dz}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{1}{k(b_0-kz)^2}+c_1 \\ (2) & \dfrac{dy_{2M}}{dz}=c_3\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.70)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y_{1M}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{1}{k^2(b_0-kz)}+c_1z+c_2 \\ (2) & y_{2M}=c_3z+c_4\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.71)$$

boundary condition から積分常数を決めれば，次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{llll}z=0 & \text{において} & y'_{1M}=0 & \therefore\ c_1=\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{1}{k^2b_0{}^2} \\ 〃 & 〃 & y_{1M}=0 & \therefore\ c_2=\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{1}{k^2b_0} \\ z=f & 〃 & y'_{1M}=y'_{2M} & \therefore\ c_3=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{f(2b_0-kf)}{b_0{}^2(b_0-kf)^2} \\ 〃 & 〃 & y_{1M}=y_{2M} & \therefore\ c_4=\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{f^2}{b_0(b_0-kf)^2}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.72)$$

よつて，(2.70)，(2.71) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dy_{1M}}{dz}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{(2b_0-kz)z}{(b_0-kz)^2b_0{}^2} \\ (2) & \dfrac{dy_{2M}}{dz}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{(2b_0-kf)f}{(b_0-kf)^2b_0{}^2}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.73)$$

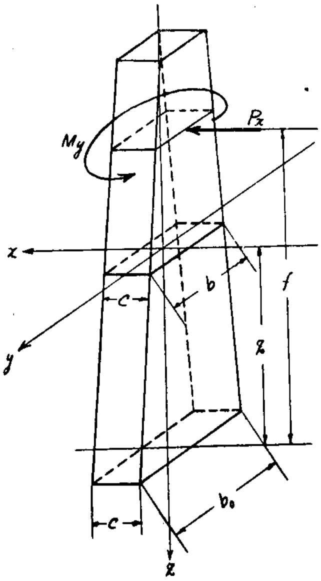
$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y_{1M}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{z^2}{b_0{}^2(b_0-kz)} \\ (2) & y_{2M}=-\dfrac{6M_x}{Ec}\dfrac{f}{b_0{}^2(b_0-kf)^2}\left\{(2b_0-kf)z-b_0f\right\}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.74)$$

iii) 片持梁の x 方向の変位

重心軸に直角な荷重 P_x が，固定端から高さ f の点に作用する場合の撓み，及び撓み角は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & z<f \text{ において} & M_{1P}=-P_x(f-z) \\ (2) & z>f \text{ において} & M_{2P}=0\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.75)$$

2—20図



故に

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{d^2x_{1P}}{dz^2} = \frac{12P_x}{Ec^3}\,\frac{f-z}{b_0-kz} \\
&(2)\quad \frac{d^2x_{2P}}{dz^2} = 0
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.76)
$$

これを逐次積分して

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{dx_{1P}}{dz} = \frac{12P_x}{Ec^3k^2}\left\{(b_0-kf)\log_e(b_0-kz)+kz\right\}+c_1 \\
&(2)\quad \frac{dx_{2P}}{dz} = c_3
\end{aligned}
\right\} (2.77)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1)\quad x_{1P} = \frac{12P_x}{Ec^3k^3}\Big[\frac{1}{2}k^2z^2-(b_0-kf)\Big\{(b_0-kz) \\
&\qquad\qquad \log_e(b_0-kz)-(b_0-kz)\Big\}\Big]+c_1x+c_2 \\
&(2)\quad x_{2P} = c_3\ (z-f)\ +c_4
\end{aligned}
\right\}\cdots (2.78)
$$

boundary condition から積分常数を求めると，次の如くなる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&z=0 \quad \text{において} \quad x'_{1P}=0 \\
&\therefore \quad c_1 = -\frac{12P_x}{Ec^3k^2}\ (b_0-kf)\ \log_e b_0 \\
&z=0 \quad \text{において} \quad x_{1P}=0 \\
&\therefore \quad c_2 = \frac{12P_x}{Ec^3k^3}\ (b_0-kf)\ (b_0\log_e b_0-b_0) \\
&z=f \quad \text{において} \\
&x'_{1P}=x'_{2P} \quad \therefore \quad c_3 = \frac{12P_x}{Ec^3k^2}\left\{kf+(b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\right\} \\
&x_{1P}=x_{2P} \quad \therefore \quad c_4 = \frac{12P_x}{Ec^3k^3}\Big\{\Big(\frac{3}{2}kf-b_0\Big)kf \\
&\qquad\qquad -(b_0-kf^2)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\Big\}
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.79)
$$

よつて，(2.77)，(2.78) 式は次の如くなる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{dx_{1P}}{dz} = \frac{12P_x}{Ec^3k^2}\left\{kz+(b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\right\} \\
&(2)\quad \frac{dx_{2P}}{dz} = \frac{12P_x}{Ec^3k^2}\left\{kf+(b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\right\}
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.80)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1)\quad x_{1P} = \frac{12P_x}{Ec^3k^3}\left\{\left(\frac{1}{2}kz-b_0+kf\right)kz-(b_0-kf)(b_0-kz)\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\right\} \\
&(2)\quad x_{2P} = \frac{12P_x}{Ec^3k^3}\left[\frac{1}{2}k^2f^2-(b_0-kz)\left\{(b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}+kf\right\}\right]
\end{aligned}
\right\}\cdots (2.81)
$$

これと同じ点に作用する z 方向の力 P_z によつて生ずるモーメント M_y による撓み，及び撓み角は次

の如くなる。

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & z<f \text{ において} & M_{1M}=M_y \\ (2) & z>f \quad 〃 & M_{2M}=0\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.82)$$

よつて

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{d^2x_{1M}}{dz^2}=-\dfrac{12M_y}{Ec^3}\dfrac{1}{b_0-kz} \\ (2) & \dfrac{d^2x_{2M}}{dz^2}=0\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.83)$$

これを遂次積分して

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dx_{1M}}{dz}=\dfrac{12M_y}{Ec^3k}\log_e(b_0-kz)+c_1 \\ (2) & \dfrac{dx_{2M}}{dz}=c_3\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.84)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x_{1M}=-\dfrac{12M_y}{Ec^3k^2}(b_0-kz)\left\{\log_e(b_0-kz)-1\right\}+c_1z+c_2 \\ (2) & x_{2M}=c_3(z-f)+c_4\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.85)$$

次の boundary condition から積分常数を決定する。

$$\left.\begin{array}{lll} z=0 \text{ において} & & \\ x'_{1M}=0 & \therefore & c_1=-\dfrac{12M_y}{Ec_3k}\log_e b_0 \\ x_{1M}=0 & \therefore & c_2=\dfrac{12M_y}{Ec^3k^2}b_0(\log_e b_0-1) \\ z=f \text{ において} & & \\ x'_{1M}=x'_{2M} & \therefore & c_3=\dfrac{12M_y}{Ec^3k}\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0} \\ x_{1M}=x_{2M} & \therefore & c_4=-\dfrac{12M_y}{Ec^3k^2}\left\{(b_0-kf)\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0}+kf\right\}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.86)$$

よつて (2.84), (2.85) 式は次の如くなる。

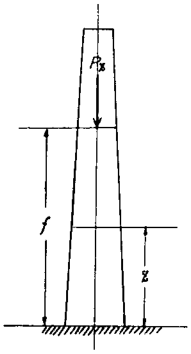
$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{dx_{1M}}{dz}=\dfrac{12M_y}{Ec^3k}\log_e\dfrac{b_0-kz}{b_0} \\ (2) & \dfrac{dx_{2M}}{dz}=\dfrac{12M_y}{Ec^3k}\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.87)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x_{1M}=-\dfrac{12M_y}{Ec^3k^2}\left\{(b_0-kz)\log_e\dfrac{b_0-kz}{b_0}+kz\right\} \\ (2) & x_{2M}=-\dfrac{12M_y}{Ec^3k^2}\left\{(b_0-kz)\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0}+kf\right\}\end{array}\right\} \cdots\cdots (2.88)$$

§ 3. z—軸方向の直力による伸び，及び縮み

P_z が重心軸に沿つて作用し，捩れ，及び彎曲することなく，且つ伸び及び縮みは微小であるとすれば

2—21図



らば，そのための断面積の変化は無視することが出来る。

$$\left.\begin{array}{lll}(1)\ z<f & において & \sigma_1=\dfrac{P_z}{A}\\ (2)\ z>f & において & \sigma_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots (2.89)$$

よつて，各点の伸縮は

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & d\omega_1=-\dfrac{P_z}{E}\dfrac{1}{c(b_0-kz)}\\ (2) & d\omega_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots (2.90)$$

各点の変位を求めると，次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \omega_1=\dfrac{P_z}{Eck}\log_e(b_0-kz)+c_1\\ (2) & \omega_2=c_2\end{array}\right\}\cdots\cdots (2.91)$$

boundary condition から積分常数を決定すれば

$$\left.\begin{array}{lll}z=0 & において & \omega_1=0\\ & \therefore\ c_1=-\dfrac{P_z}{Eck}\log_e b_0 & \\ z=f & 〃 & \omega_1=\omega_2\\ & \therefore\ c_2=\dfrac{P_z}{Eck}\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0} & \end{array}\right\}\cdots\cdots (2.92)$$

となり，(2.91) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \omega_1=\dfrac{P_z}{Eck}\log_e\dfrac{b_0-kz}{b_0}\\ (2) & \omega_2=\dfrac{P_z}{Eck}\log_e\dfrac{b_0-kf}{b_0}\end{array}\right\}\cdots\cdots (2.93)$$

§ 4. 剪断力による x, y 方向の変位

剪断力の影響については第1節 § 4. で述べた如く，次式で与えられる。

$$x=y=\frac{1}{G}\int\frac{dz}{S}\int\tau^2\,dF \cdots\cdots (2.40)'$$

断面は矩形であるから，τ^2 の積分は第1節 § 4. ii) で述べた如く

$$\int\tau^2\,dF=\frac{6}{5}\,\frac{S^2}{bc} \cdots\cdots (2.45)'$$

この場合，x 及び y は断面積 $b\times c$ の函数であり，これを置換えても全く同じ形で τ^2 の積分が与えられるから，変位についても何れか一方を求めれば，他方も同じ形の式で求められる。よつて § 2. における外力による剪断力の影響は次の如くなる。

$$\begin{array}{lll}(1)\ z<f & において & S_1=P_y\\ (2)\ z>f & において & S_2=0\end{array}$$

故に

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & \frac{dy_{1s}}{dz}=\frac{6}{5}\,\frac{P_y}{G}\,\frac{1}{c\,(b_0-kz)}\\ (2)\quad & \frac{dy_{2s}}{dz}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.94)$$

これを積分し

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & y_{1s}=-\frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}+c_1\\ (2)\quad & y_{2s}=c_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.95)$$

boundary condition から積分常数は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}& z=0 \quad \text{において} \quad y_{1s}=0 \quad \therefore\ c_1=0\\ & z=f \quad \text{〃} \quad y_{1s}=y_{2s} \quad \therefore\ c_2=-\frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.96)$$

故に (2.95) 式は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & y_{1s}=-\frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\\ (2)\quad & y_{2s}=-\frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.97)$$

撓み曲線は固定梁の場合と同様，荷重点において不連続な析線となる。x 方向の撓みも全く同様である。

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & x_{1s}=-\frac{6P_x}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\\ (2)\quad & x_{2s}=-\frac{6P_x}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.97)'$$

§ 5. 振りモーメントによる変位

角柱の振りに対する St. Venant の解から，振り角は次式で与えられる。

$$\theta=\frac{3M_t}{Gb^3\,(c-0.63b)} \qquad (\text{但し}\quad c>b)\cdots\cdots(2.53)'$$

ここで角柱は断面の2辺が一定であり，他の2辺は高さと共に直線変化するものである。上の St. Venant の式は等断面の角柱に対する式である。そして (2,53) 式の誘導において行われた種々の仮定や，計算上の省略の項が，そのまま適用されないから，(2.53)′式をそのまま利用することは正確ではない。しかしながら漸変断面の角柱の振りについては一般にはその厳密解は困難であり，ただ円柱の解が与えられているに過ぎない。

そこで，今考えている漸変断面矩形柱の振りについては，次の如き仮定のもとに近似的に取扱うこととする。

1. 各断面における振りモーメントは常に重心軸において M_t の大きさを有する。
2. 任意断面の振れ角は，その断面に等しい矩形柱に対する振れ角に等しい。

以上の仮定のもとに，各断面における微小長さ dz に対する振れ角を求めると，(2.53)′ 式がそのまま適用される。これを z 方向について積分すればよい。しかして (2.53)′ 式の b, c の値は $b>c$ または $b<c$ によつて変つてくるので，この積分も $b=c$ において不連続となり，これを境界として2

つに分けて積分しなければならない。

今，$b=c$ なる如き高さ z_0 を求めると

$$z_0=\frac{b_0-c}{k}$$

振りモーメントの働く点の高さを f とすれば次の如くなる。

(i) $f\leqq z_0$ の場合

$$\left.\begin{array}{llll}(1). & z<f & において & \theta_1=\dfrac{3M_t}{G}\dfrac{1}{c^3(b-0.63c)}\\ (2) & z>f & 〃 & \theta_2{}^*=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.98)$$

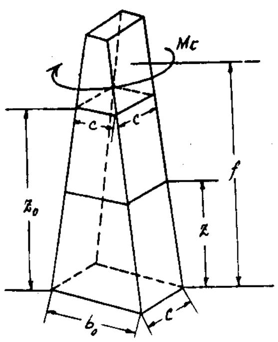
故に，これを z につき積分すれば

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \alpha_1=-\dfrac{3M_t}{Gc^3}\log_e\dfrac{b_0-0.63c-kz}{b_0-0.63c}\\ (2) & \alpha_2=-\dfrac{3M_t}{Gc^3}\log_e\dfrac{b_0-0.63c-kf}{b_0-0.63c}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.99)$$

但し　$b=b_0-kz$

(ii) $f>z_0$ の場合

2—22図



$$\left.\begin{array}{llll}(1) & z<z_0 & において & \theta_1=\dfrac{3M_t}{G}\dfrac{1}{c^3(b-0.63c)}\\ (2) & z_0<z<f & において & \theta_2=\dfrac{3M_t}{G}\dfrac{1}{b^3(c-0.63b)}\\ (3) & z>f & において & \theta_3=0\end{array}\right\}\cdots(2.100)$$

これを z について積分し，boundary condition

$$\begin{array}{lll}z=0 & において & \alpha_1=0\\ z=z_0 & 〃 & \alpha_1=\alpha_2\\ z=f & 〃 & \alpha_2=\alpha_3\end{array}$$

によつて積分常数を決定すれば

$$(1)\qquad \alpha_1=\frac{3M_t}{Gc^3}\log_e\frac{b_0-0.63c-kz}{b_0-0.63c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.101)_1$$

$$(2)\qquad \alpha_2=\frac{3M_t}{G}\int\frac{1}{b^3\,(c-0.63b)}dz=\frac{3M_t}{G}\left\{C+\int\frac{1}{b^3\,(c-0.63b)}dz_a\right\}$$

ここで

$$\left.\begin{array}{l}z_a=z-z_0,\qquad b=c-kz_a\\ C=-\dfrac{3M_t}{Gc^3}\log_e\dfrac{0.37c}{b_0-0.63c}\end{array}\right\}\ である。$$

これを積分し，上記の boundary condition から

$$\alpha_2=-\frac{M_t}{Gc^3}\frac{3}{k}\left\{\frac{1}{k}\log_e\frac{0.37c}{b_0-0.63c}+0.63^2\log_e\frac{b}{c}-0.63\frac{c}{b}\right.$$
$$\left.+1.13-0.5\frac{c^2}{b}-0.63^2\frac{c-0.63b}{0.37c}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.101)_2$$

(3) $$\alpha_3 = -\frac{3M_t}{Gc^3k}\left\{\frac{1}{k}\log_e\frac{0.37c}{b_0-0.63c} + 0.63^2\log_e\frac{b_f}{c} - 0.63\frac{c}{b_f} + 1.13 - 0.5\frac{c^2}{b_f} - 0.63\frac{c-0.63b_f}{0.37c}\right\} \quad \cdots\cdots (2.101)_3$$

但し　$b = b_0 - kz,\quad b_f = b_0 - kf$　である。

§ 6.　片持梁の変位（総括）

（i）　x 方向の変位

(2.80)，(2.81)，(2.87)，(2.88)，(2.94)，(2.97)′ 式から次式が得られる。

$$x_1 = \frac{12}{Ec^3k^3}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}kz - b_0 + kf\right)kz - (b_0-kf)(b_0-kz)\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\right\}P_x - \left\{(b_0-kz)\log_e\frac{b_0-kz}{b_0} + kz\right\}kM_y\right] - \frac{6P_x}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kz}{b_0} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})_1$$

$$x_2 = \frac{12}{Ec^3k^3}\left[\left\{\frac{1}{2}k^2f^2 - (b_0-kz)\left(\overline{b_0-kf}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0} + kf\right)\right\}P_x - \left\{(b_0-kz)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0} + kf\right\}kM_y\right] - \frac{6P_x}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})_2$$

$$x_1' = \frac{12}{Ec^3k^2}\left[\left\{kz + (b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\right\}P_x + M_y k\log_e\frac{b_0-kz}{b_0}\right] + \frac{6P_x}{5G}\frac{1}{c(b_0-kz)} \quad \cdots\cdots (\mathrm{II})_1$$

$$x_2' = \frac{12}{Ec^3k^2}\left[\left\{kf + (b_0-kf)\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\right\}P_x + M_y k\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\right] \quad \cdots\cdots (\mathrm{II})_2$$

（ii）　y 方向の変位

(2.66)，(2.67)，(2.73)，(2.74)，(2.94)，(2.97) 式から，次式が得られる。

$$y_1 = \frac{6}{Ec}\left[\frac{P_y}{k^3}\left\{-2\log_e\frac{b_0-kz}{b_0} - \frac{kz}{b_0}\left(\frac{b_0-kf}{b_0-kz} + \frac{b_0+kf}{b_0}\right)\right\} - M_x\frac{z^2}{b_0^2(b_1-kz)}\right] - \frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kz}{b_0} \quad \cdots\cdots (\mathrm{III})_1$$

$$y_2 = \frac{6}{Ec}\left[\frac{P_y}{k^3}\left\{\frac{k^3f^2}{b_0^2(b_0-kf)}(z-f) - \frac{kf}{b_0^2}(2b_0+kf) - 2\log_e\frac{b_0-kf}{b_0}\right\} - M_x\left\{(2b_0-kf)z - b_0f\right\}\frac{f}{b_0^2(b_0-kf)^2}\right] - \frac{6P_y}{5Gck}\log_e\frac{b_0-kf}{b_0} \quad \cdots\cdots (\mathrm{III})_2$$

$$y_1' = \frac{6}{Ec}\left[\frac{P_y}{k^2}\left\{\frac{2}{b_0-kz} - \frac{b_0+kf}{b_0^2} - \frac{b_0-kf}{(b_0-kz)^2}\right\} - M_x\frac{(2b_0-kz)z}{(b_0-kz)^2b_0^2}\right] + \frac{6}{5}\frac{P_y}{G}\frac{1}{c(b_0-kz)} \quad \cdots\cdots (\mathrm{IV})_1$$

$$y_2' = \frac{6}{Ec}\left\{P_y\frac{f^2}{(b_0-kf)b_0^2} - M_x\frac{(2b_0-kf)f}{(b_0-kf)^2b_0^2}\right\} \quad \cdots\cdots (\mathrm{IV})_2$$

iii) z 方向の変位

(2.93) 式

$$w_1 = \frac{P_z}{Eck} \log_e \frac{b_0 - kz}{b_0} \quad \cdots\cdots \quad (\text{V})_1$$

$$w_2 = \frac{P_z}{Eck} \log_e \frac{b_0 - kf}{b_0} \quad \cdots\cdots \quad (\text{V})_2$$

iv) zー軸の廻りの捩り

(2.99), (2.101) 式

$f \leqq z_0$ の場合　但し　$z_0 = \dfrac{b_0 - c}{k}$

$$\alpha_1 = -\frac{3M_t}{Gc^3} \log_e \frac{b_0 - 0.63c - kz}{b_0 - 0.63c} \quad \cdots\cdots \quad (\text{VI})_1$$

$$\alpha_2 = -\frac{3M_t}{Gc^3} \log_e \frac{b_0 - 0.63c - kf}{b_0 - 0.63c} \quad \cdots\cdots \quad (\text{VI})_2$$

$f > z_0$ の場合

$$\alpha_1 = \frac{3M_t}{Gc^3} \log_e \frac{b_0 - 0.63c - kz}{b_0 - 0.63c} \quad \cdots\cdots \quad (\text{VI})_3$$

$$\alpha_2 = -\frac{3M_t}{Gc^3k} \left\{ \frac{1}{k} \log_e \frac{0.37c}{b_0 - 0.63c} + 0.63^2 \log_e \frac{b}{c} - 0.63 \frac{c}{b} + 1.13 - 0.5 \frac{c^2}{b} - 0.63^2 \frac{c - 0.63b}{0.37c} \right\} \quad \cdots\cdots \quad (\text{VI})_4$$

$$\alpha_3 = -\frac{3M_t}{Gc_3k} \left\{ \frac{1}{k} \log_e \frac{0.37c}{b_0 - 0.63c} + 0.63^2 \log_e \frac{b_f}{c} - 0.63 \frac{c}{b_f} + 1.13 - 0.5 \frac{c^2}{b_f} - 0.63^2 \frac{c - 0.63b_f}{0.37c} \right\} \quad \cdots\cdots \quad (\text{VI})_5$$

但し　$b = b_0 - kz,\quad b_f = b_0 - kf$

第 3 節　荷 重 の 分 割

§ 1.　荷重の分割

以上述べた結果に従い，荷重の分割を行うのであるが，この場合堤体を垂直及び，水平方向にそれぞれ n, m 等分し，n 個の片持梁，及び m 個の固定梁から構成されるものと仮定する。

これ等の両梁の交点における片持梁の撓みと，固定梁の撓みが相等しくなるように，また片持梁の撓み角と固定梁の捩り角，並に片持梁の捩り角と固定梁の撓み角が，それぞれ相等しくなるように，堰堤にかかる荷重を分割負担させればよい訳である。荷重は勿論ある分布を有するものであるが，これは分割区間の全荷重を集中荷重に置換えて考える。

交点の数は $m \times n$ 個であり，未知数は各交点において重心軸に垂直な荷重と，重心面内の2直交軸に対するモーメントの計3個が片持梁及び固定梁にそれぞれ存在する。よつて総計 $3 \times m \times n \times 2$ 個の未知量がある。

一方，これを解く条件は任意集中荷重による，撓み，撓み角，捩り角は作用点が変らない限り，荷重の大さに比例することとなり，上述の各点に対し，それぞれ3個の未知量に対する方程式が与えられる。即ち，この条件式は $3 \times m \times n$ 個である。また各集中荷重の各点の合力は外力の条件として既に与えられているから，各点の荷重につき3個，即ち $3 \times m \times n$ 個の条件式が得られる。

即ち，未知数 $6mn$ 個に対し，$6mn$ 個の条件式が1次式として与えられるから，この1次方程式を解くことによつて分割荷重が決定する。

これ等の説明は堤体の重心面に垂直な方向の場合であるが，一方重心面内の諸力についても，同様に片持梁の撓みと固定梁の伸縮，片持梁の伸縮と固定梁の撓み，片持梁及固定梁の撓み角の3条件から，2方向の垂直力と1個のモーメントが求められる。

以上の全条件を考えるならば，それぞれの集中荷重は，すべて3方向の垂直力及び3軸の廻りのモーメントとして，片持梁及び固定梁に分割負担させた結果が求められる。

この場合に，固定梁が垂直荷重によつて撓みを生ずることによつて発生する2次応力としての引張りは考慮されない。また，すべての重ね合された外力による変位は，本来の直線上の原位置において作用した場合の変位を考えるのであつて，2次以上の高次応力は無視し，すべての変位は勿論極めて微小な変位であるとするものである。

§ 2.　各断面の応力分布

§ 1. によつて求められた分割荷重はそれぞれ，片持梁及び固定梁に単独に負荷するものと考える。しかるときは，これ等荷重によつて各断面に生ずる曲げモーメント，及び軸方向の垂直力をそれぞれ計算することが出来る。モーメントは重心軸を中立軸とする3角形分布とし，垂直力は均等分布（矩形分布）をなすものと考えるならば，各断面において，それぞれ梯形分布をなす応力が求められる。

第 Ⅲ 章　捩り応力を考慮した場合における3次元応力の実験

第 1 節　ゴ ム 模 型

第Ⅰ章で述べた如き，寒天模型では製作が困難であるのと，均質性を欠く欠点があり，且つ完全弾性体として取扱うことが出来ないことが明かになつた。よつて，ここではゴム模型を用いた。しかしゴムは，いわゆるゴム弾性を示すものであるから，完全弾性体と考えられる範囲内で実験をすることに留意した。

§ 1.　形状，寸法

高 さ	530mm	長 さ	750mm
上 幅	20mm	底 幅	126mm

これを，左右両端において各 25mm，底辺において 30mm を固定して，圧力を受ける部分は

高 さ	500mm	長 さ	700mm
上 幅	20mm	底 幅	120mm

であつて，上流法は 1：0.2 で，下流法は鉛直とした。

この模型において，下流法面に 80mm 間隔に横6本，縦9本の測線を取り，測線の交点において，水平方向の撓みをマイクロメーター及びダイヤルゲージを用いて，その変位の測定をした。

この模型は木製水槽内に設置し，荷重はナイロン製袋を装置し，この内部に清水を堰堤の天端まで満水して荷載した。

この形状は３—１図a 及び３—２図に示す。写真は３—１図b〜d に示す。

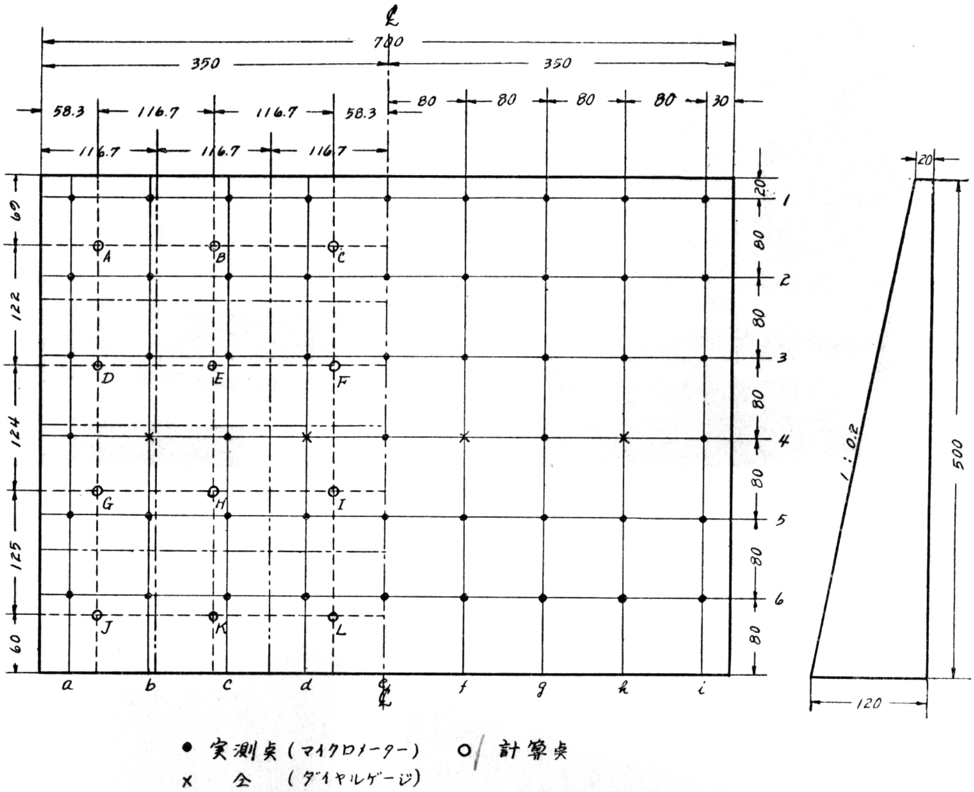
§2. 材料の力学的性質

堰堤ゴム模型と同一の材料で３—３図に示す如き，円形断面の試験片を切削り作製したもので，弾性係数及び比重の測定を行つた。この試験片に載荷試験を行い，最小自乗法により決定した結果は

弾性係数　引張り弾性　36.95 kg/cm²

　　　　　圧縮弾性　40.27　〃

３—１図 *a*



ポアソン比　0.54　　　　比　重　1.57

であつた。圧縮弾性は圧縮によつて試験片が滑り出す傾向を示すために確かでないので，引張り試験による 36.95 ≒ 37 kg/cm² をとることとする。

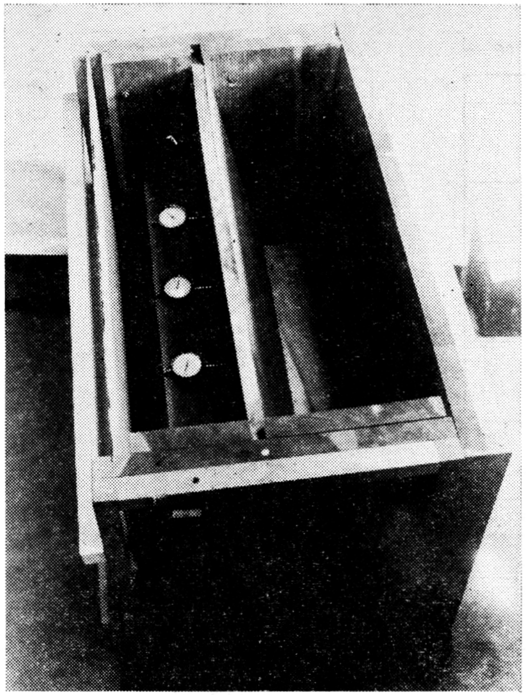
これ等の試験のデーターは３—１表，３—２表に示す。

§3. 理論値計算点

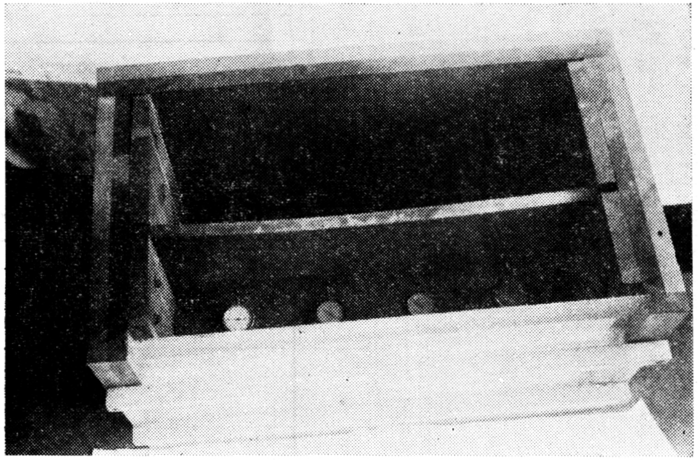
理論値計算点には３—１図*a*，３—２図に示す如く，長さの方向に６等分，高さの方向に４等分した片持梁，及び固定梁に分割し，各分割ブロックの重心点における撓みを取つた。

また，第Ⅱ章に述べた如く，片持梁の *z* 方向の２辺の交角の２等分線を取り，断面形状をこれと直交する上，下端を有する対称形の梯形に改変し，この重心軸に直交する平面にて荷重分割を行う。これ等の分割線の位置及び重心位置を３—２図に示す。

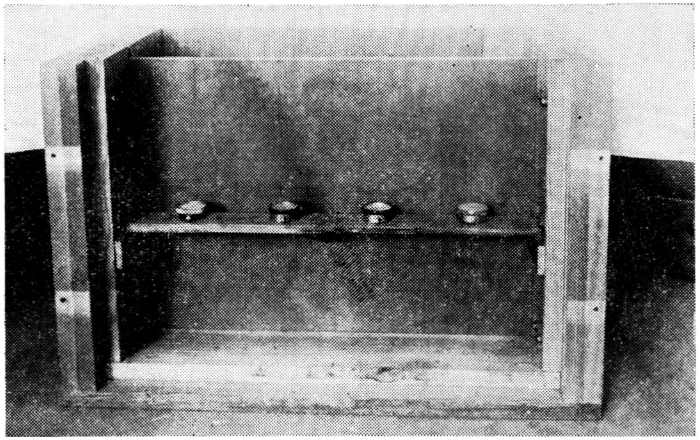
3—1図 *c*



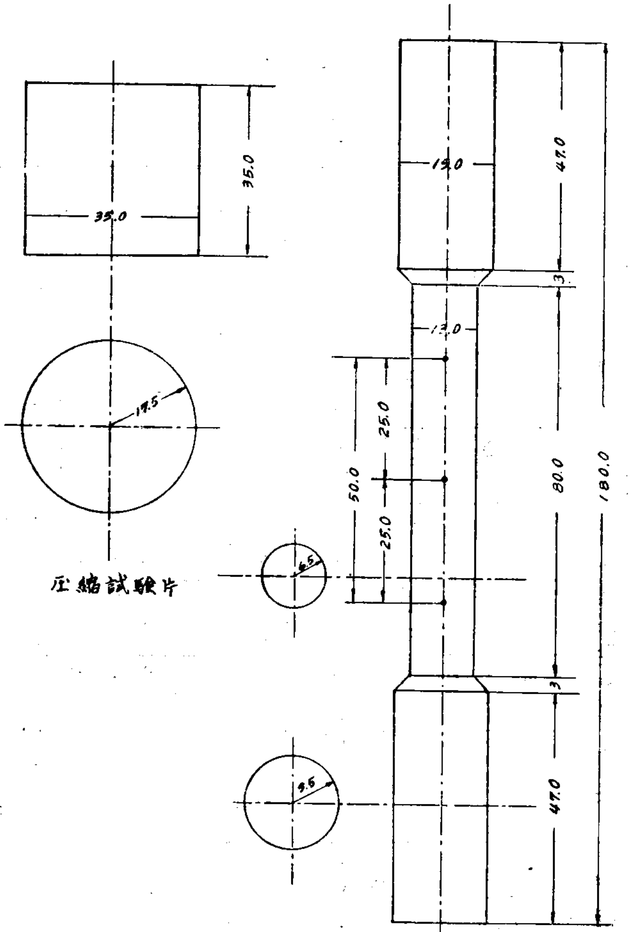
3—1図 *b*



3—1図 *d*

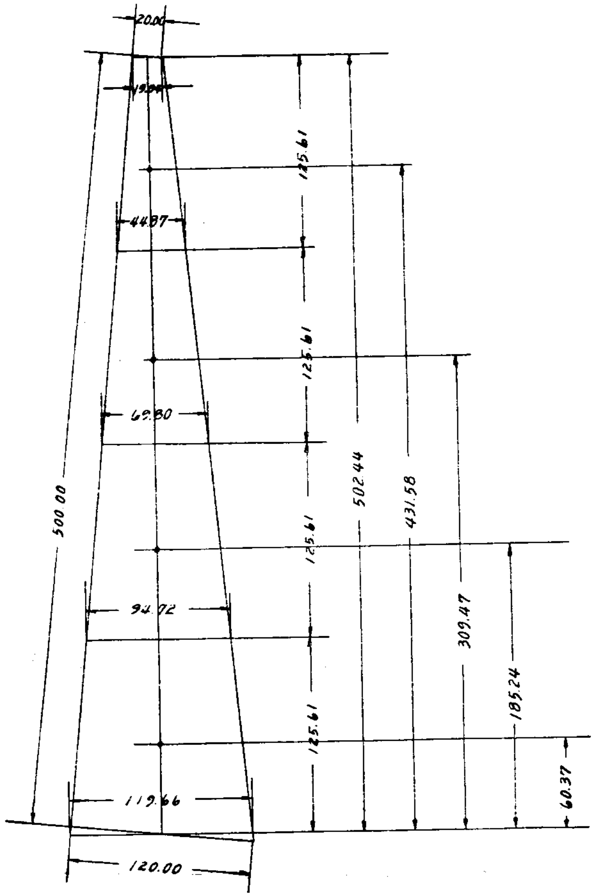


3—3図

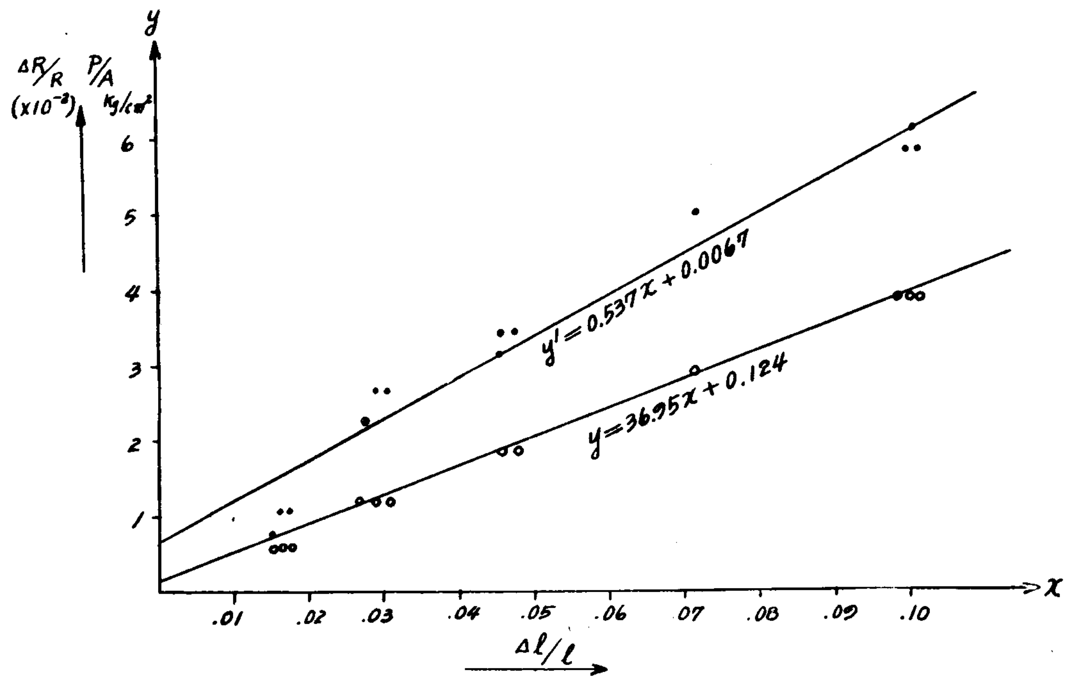


引張試験片

3—2図



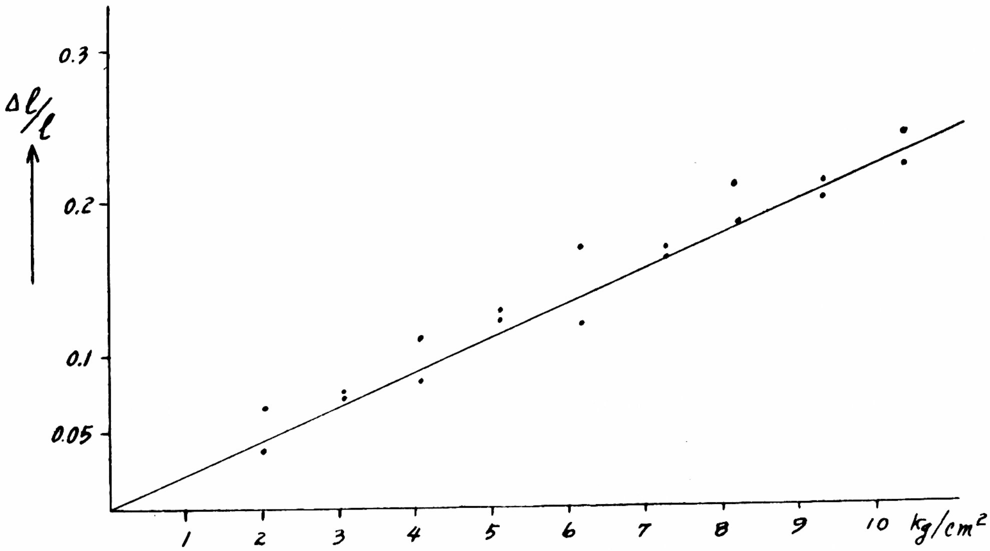
引 張 試 験　3—1表



	荷重 Kg	仝 y Kg/cm²	標点間距離 l mm			Δl mm			Δl/l x		
			I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	0	0	50.40	50.30	50.40						
2	0.820	0.61305	51.25	51.20	51.20	0.85	0.90	0.80	0.01687	0.01789	0.01587
3	1.670	1.24854	51.95	51.75	51.75	1.55	1.45	1.35	0.03075	0.02882	0.02678
4	2.530	1.89150	52.80	52.60	52.70	2.40	2.30	2.30	0.04762	0.04572	0.04563
5	3.830	2.86343	54.00	54.00	53.90	3.60	3.60	3.55	0.07143	0.07157	0.07043
6	5.180	3.87273	55.60	55.70	55.50	5.20	5.40	5.10	0.10317	0.10735	0.10119

	直径2R mm			ΔR mm			ΔR/R y'		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	13.05	13.05	13.05						
2	12.95	12.90	12.90	0.050	0.075	0.075	0.00766	0.01149	0.01149
3	12.70	12.70	12.75	0.175	0.175	0.150	0.02681	0.02681	0.02298
4	12.60	12.60	12.65	0.225	0.225	0.200	0.03448	0.03448	0.03065
5	12.40	12.40	12.40	0.325	0.325	0.325	0.04980	0.04980	0.04980
6	12.30	12.30	12.25	0.375	0.375	0.400	0.05747	0.05747	0.06130

圧 縮 試 験　3—2表



荷重		Δℓ/ℓ			
Kg	kg/cm²	I	II	III	IV
10	1.039				
20	2.079	0.0373	0.0644		
30	3.118			0.0743	0.0719
40	4.157	0.0825	0.1119		
50	5.197			0.1241	0.1218
60	6.236	0.1190	0.1684		
70	7.276			0.1670	0.1602
80	8.315	0.1820	0.2091		
90	9.354			0.2100	0.1986
100	10.394	0.2216	0.2431		

$\ell = 35.0$ mm　dia. $= 35.0$ mm

なお，対称形の梯形断面に改変したものを3—4図に示す。

第2節　外力の計算

理論値計算に用いる，各ブロックに作用する外力を，それぞれ集中荷重に換算した結果は3—3表の通りである。

3—3表

外力	作用点	水圧 gr	自重 gr	合計 gr
P_y	A, B, C	915.933	73.601	989.50
	D, E, F	2,747.798	130.268	2,880.50
	G, H, I	4,579.663	186.882	4,766.54
	J, K, L	6,411.527	243.520	6,655.05
P_z	A, B, C	90.884	741.757	832.67
	D, E, F	272.651	1,312.844	1,585.49
	G, H, I	454.419	1,883.941	2,338.36
	J, K, L	636.188	2,454.198	3,090.39
M_x	A, B, C	− 13,624.89 gr-mm		− 13,624.89 gr-mm
	D, E, F	− 15,011.87		− 15,011.87
	G, H, I	− 23.861.02		− 23,861.02
	J, K, L	− 38,040.07		− 38,040.07
$M_y = 0$ $M_z = 0$ $P_x = 0$				

水圧は比重1の水の静水圧が上流面に直角に作用するものとし，また自重は重心点から鉛直に作用するものとして分割ブロック毎に計算した。また水圧を集中荷重に代えた場合，この集中荷重は自重の重心点を通らないため，x—軸の廻りのモーメントを生ずる。

第3節　荷重の分割，及び撓みの計算

第Ⅱ章において誘導した変位の方程式に従つて，荷重の分割を行い，また撓みの計算を行うものである。この場合の片持梁，及び固定梁は第1節 § 3. に述べた如く，長さの方向に6等分，高さの方向に4等分したものを考える。その両梁の断面形状は3—2図に示す如きものである。

計算点を上部固定端から A, B, ………… L と名ずけ，各点に作用する外力を

$$
\begin{array}{llll}
P_{yA}, & P_{yB}, & \cdots\cdots, & P_{yL} \\
M_{xA}, & M_{xB}, & \cdots\cdots, & M_{xL} \\
P_{zA}, & P_{zB}, & \cdots\cdots, & P_{zL} \\
P_{xA}, & P_{xB}, & \cdots\cdots, & P_{xL}
\end{array}
$$

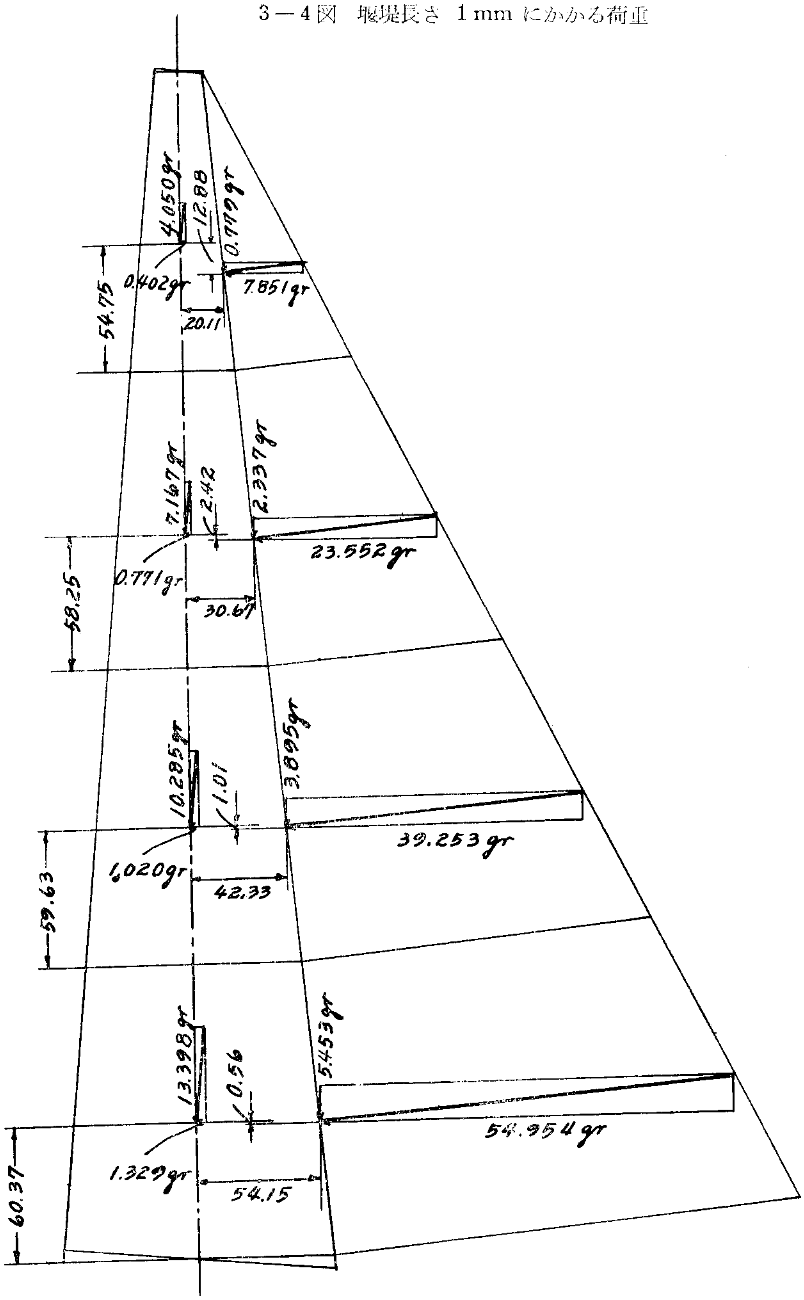
の如き符号をつけ，また変位は y_A, y_B, …………, y_L, y'_{xA}, y'_{xB}, …………, y'_{xL} とする。
この場合，固定梁は P_{yA}, M_{xA}, …………の如き大文字の添字をつけ，片持梁は P_{ya}, M_{xa}, …………の如き小文字の添字を以て表わす。
P_y, M_x, y, y_z'…………などは第Ⅱ章と同じ符号を使用する。

§ 1.　単位荷重に対する片持梁，及び固定梁の変位

A, B, …………L, の各点に単位荷重が作用した場合の変位は次表の如くなる。

i)　片持梁

3－4図　堰堤長さ 1 mm にかかる荷重



(i)　P_y による撓み

計算点＼作用点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	3. 7 1 0 9 2 6	1. 7 6 2 4 1 9	0. 5 8 2 4 5 9	0. 0 6 6 5 2 5
D, E, F	1. 7 6 2 4 1 9	1. 0 5 8 2 0 4	0. 4 0 4 0 6 7	0. 0 5 1 7 5 5
G, H, I	0. 5 8 2 4 5 9	0. 4 0 4 0 6 7	0. 2 1 2 4 8 2	0. 0 3 6 7 2 3
J, K, L	0. 0 6 6 5 2 5	0. 0 5 1 7 5 5	0. 0 3 6 7 2 3	0. 0 1 3 2 1 4

(ii) M_x による撓み

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.017764	0.012267	0.006149	0.001688
D, E, F	0.005652	0.005652	0.003824	0.001172
G, H, I	0.001459	0.001459	0.001459	0.000648
J, K, L	0.000121	0.000121	0.000121	0.000121

(iii) P_y による撓み角

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.018184	0.005652	0.001459	0.000121
D, E, F	0.012787	0.005912	0.001459	0.000121
G, H, I	0.006524	0.004199	0.001646	0.000121
J, K, L	0.001988	0.001465	0.000941	0.000121

(iv) M_x による撓み角

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.0001719	0.0000542	0.0000190	0.0000042
D, E, F	0.0000542	0.0000542	0.0000190	0.0000042
G, H, I	0.0000190	0.0000190	0.0000190	0.0000042
J, K, L	0.0000042	0.0000042	0.0000042	0.0000042

(v) M_z による振り角

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.0001957	0.0000741	0.0000302	0.0000067
D, E, F	0.0000741	0.0000741	0.0000302	0.0000067
G, H, I	0.0000302	0.0000302	0.0000302	0.0000067
J, K, L	0.0000067	0.0000067	0.0000067	0.0000067

(vi) P_x による撓み

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	2.300835	1.284707	0.501553	0.065406
D, E, F	1.284707	0.833525	0.353425	0.050625
G, H, I	0.501553	0.353425	0.203358	0.035594
J, K, L	0.065406	0.050625	0.035594	0.020481

(vii) M_y による撓み

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.008051	0.006978	0.004621	0.001609
D, E, F	0.003695	0.003695	0.002929	0.001119
G, H, I	0.001208	0.001208	0.001208	0.000622
J, K, L	0.000121	0.000121	0.000121	0.000121

(viii) P_x による撓み角

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.0088923	0.0036950	0.0012082	0.0001210
D, E, F	0.0074986	0.0042155	0.0012082	0.0001210
G, H, I	0.0049959	0.0033042	0.0015833	0.0001210
J, K, L	0.0019015	0.0014122	0.0009044	0.0004139

(ix) M_y による撓み角

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.0000460	0.0000269	0.0000139	0.0000040
D, E, F	0.0000269	0.0000269	0.0000139	0.0000040
G, H, I	0.0000139	0.0000139	0.0000139	0.0000040
J, K, L	0.0000040	0.0000040	0.0000040	0.0000040

(x) P_z による圧縮

作用点 / 計算点	A, B, C	D, E, F	G, H, I	J, K, L
A, B, C	0.052151	0.030499	0.015716	0.004546
D, E, F	0.030499	0.030499	0.015716	0.004546
G, H, I	0.015716	0.015716	0.015716	0.004546
J, K, L	0.004546	0.004546	0.004546	0.004546

(ii) 固 定 梁

(i) P_y 及び M_z による撓み

	P_y			M_z		
作用点 / 計算点	A	B	C	A	B	C
A	0.167816	0.517645	0.679285	0.003464	0.002078	0.000692
B	0.517645	2.862845	4.345771	0.014556	0.018723	0.006237
C	0.679285	4.345771	2.823922	0.020101	0.035366	0.017330

計算点 \ 作用点	D	E	F	D	E	F
D	0. 042932	0. 121889	0. 153880	0. 000686	0. 000411	0. 000137
E	0. 121889	0. 615221	0. 918460	0. 002881	0. 003706	0. 001234
F	0. 153880	0. 918460	1. 636036	0. 003978	0. 007000	0. 003430
計算点 \ 作用点	G	H	I	G	H	I
G	0. 020124	0. 052737	0. 063827	0. 000238	0. 000143	0. 000048
H	0. 052737	0. 239494	0. 349855	0. 000999	0. 001285	0. 000428
I	0. 063827	0. 349855	0. 614282	0. 001379	0. 002426	0. 001189
計算点 \ 作用点	J	K	L	J	K	L
J	0. 012426	0. 030548	0. 035607	0. 000108	0. 000065	0. 000022
K	0. 030548	0. 125486	0. 179080	0. 000456	0. 000586	0. 000195
L	0. 035607	0. 179080	0. 309466	0. 000629	0. 001107	0. 000542

(ii) P_y 又び M_z による撓み角

	P_y			M_z		
計算点 \ 作用点	A	B	C	A	B	C
A	0. 003918	0. 015464	0. 021009	0. 0001189	0. 0000713	0. 0000238
B	0. 002078	0. 019177	0. 036277	0. 0000713	0. 0002140	0. 0000713
C	0. 000692	0. 006237	0. 017784	0. 0000238	0. 0000713	0. 0001189
計算点 \ 作用点	D	E	F	D	E	F
D	0. 000943	0. 003394	0. 004491	0. 0000235	0. 0000141	0. 0000047
E	0. 000411	0. 003963	0. 007513	0. 0000141	0. 0000423	0. 0000141
F	0. 000137	0. 001234	0. 003687	0. 0000047	0. 0000141	0. 0000235
計算点 \ 作用点	G	H	J	G	H	I
G	0. 000417	0. 001357	0. 001737	0. 0000082	0. 0000049	0. 0000016
H	0. 000143	0. 001464	0. 002784	0. 0000049	0. 0000147	0. 0000049
I	0. 000048	0. 000428	0. 001368	0. 0000016	0. 0000049	0. 0000082

作用点／計算点	J	K	L	J	K	L
J	0.000245	0.000731	0.000904	0.0000037	0.0000022	0.0000007
K	0.000065	0.000723	0.001382	0.0000022	0.0000067	0.0000022
L	0.000022	0.000195	0.000679	0.0000007	0.0000022	0.0000037

(iii) P_z 及び M_x による撓み

	P_z			M_x		
作用点／計算点	A	B	C	A	B	C
A	0.064312	0.090302	0.103295	0.000298	0.000167	0.000056
B	0.090302	0.378408	0.495475	0.001170	0.001505	0.000481
C	0.103295	0.495475	0.874647	0.001616	0.002843	0.001373
作用点／計算点	D	E	F	D	E	F
D	0.036117	0.050299	0.057390	0.000152	0.000091	0.000030
E	0.050299	0.209562	0.273445	0.000638	0.000821	0.000273
F	0.057390	0.273445	0.482399	0.000882	0.001551	0.000760
作用点／計算点	G	H	I	G	H	I
G	0.025141	0.034948	0.039850	0.000105	0.000063	0.000021
H	0.034948	0.145408	0.189580	0.000441	0.000568	0.000189
I	0.039850	0.189580	0.334403	0.000610	0.001073	0.000526
作用点／計算点	J	K	L	J	K	L
J	0.019283	0.026786	0.030536	0.000080	0.000048	0.000016
K	0.026786	0.111391	0.145183	0.000338	0.000435	0.000145
L	0.030536	0.145183	0.256057	0.000466	0.000820	0.000402

(iv) M_x による捩り角

作用点／計算点	A	B	C
A	0.0000498	0.0000498	0.0000498
B	0.0000498	0.0001494	0.0001494
C	0.0000498	0.0001494	0.0002491

計算点＼作用点	D	E	F
D	0. 00001064	0. 00001064	0. 00001064
E	0. 00001064	0. 00003195	0. 00003195
F	0. 00001064	0. 00003195	0. 00005325

計算点＼作用点	G	H	I
G	0. 00000437	0. 00000437	0. 00000437
H	0. 00000437	0. 00001312	0. 00001312
I	0. 00000437	0. 00001312	0. 00002187

計算点＼作用点	J	K	L
J	0. 00000251	0. 00000251	0. 00000251
K	0. 00000251	0. 00000754	0. 00000754
L	0. 00000251	0. 00000754	0. 00001256

(v) P_z 及び M_x による撓み角

	P_z			M_x		
計算点＼作用点	A	B	C	A	B	C
A	0. 0011866	0. 0020780	0. 0025236	0. 0000096	0. 0000057	0. 0000019
B	0. 0001670	0. 0024129	0. 0037506	0. 0000057	0. 0000172	0. 0000057
C	0. 0000556	0. 0004842	0. 0023009	0. 0000019	0. 0000057	0. 0000096
計算点＼作用点	D	E	F	D	E	F
D	0. 0006651	0. 0011517	0. 0013948	0. 0000052	0. 0000031	0. 0000010
E	0. 0000911	0. 0013344	0 0020645	0. 0000031	0. 0000094	0. 0000031
F	0. 0000304	0. 0002642	0. 0012733	0. 0000010	0. 0000031	0. 0000052
計算点＼作用点	G	H	I	G	H	I
G	0. 0004627	0. 0007992	0. 0009673	0. 0000036	0. 0000022	0. 0000007
H	0. 0000630	0. 0009255	0. 0014307	0. 0000022	0. 0000065	0. 0000022
I	0. 0000021	0. 0001827	0. 0008833	0. 0000007	0. 0000022	0. 0000036

作用点 ＼ 計算点	J	K	L	J	K	L
J	0.0003549	0.0006122	0.0007409	0.0000028	0.0000017	0.0000005
K	0.0000482	0.0007089	0.0010951	0.0000017	0.0000050	0.0000017
L	0.0000161	0.0001398	0.0006766	0.0000005	0.0000017	0.0000028

(vi) P_x による圧縮

作用点 ＼ 計算点	A	B	C
A	0.011940	0.007163	0.002386
B	0.007163	0.021502	0.007163
C	0.002386	0.007163	0.011940

作用点 ＼ 計算点	D	E	F
D	0.006746	0.004047	0.001348
E	0.004047	0.012149	0.004047
F	0.001348	0.004047	0.006746

作用点 ＼ 計算点	G	H	I
G	0.004702	0.002821	0.000939
H	0.002821	0.008468	0.002821
I	0.000939	0.002821	0.004702

作用点 ＼ 計算点	J	K	L
J	0.003609	0.002165	0.000721
K	0.002165	0.006499	0.002165
L	0.000721	0.002165	0.003609

2. 変位の方程式（y 方向の場合）

i) 片持梁の変位

(i) 撓み量　y_a, y_b, …………y_l

$$Ey_a = 3.710926\ P_{ya} + 1.762419\ P_{yd} + 0.582459\ P_{yg} + 0.066525\ P_{yj} + 0.017764\ M_{xa} + 0.012267\ M_{xd} + 0.0006149\ M_{xg} + 0.001688\ M_{xj}$$

$$Ey_b = 3.710926\ P_{yb} + 1.762419\ P_{ye} + 0.582459\ P_{yh} + 0.066525\ P_{yk} + 0.017764\ M_{xb} + 0.012267\ M_{xe} + 0.006149\ M_{xh} + 0.001688\ M_{xk}$$

$$Ey_c = 3.710926\ P_{yc} + 1.762419\ P_{yf} + 0.582459\ P_{yi} + 0.066525\ P_{yl} + 0.017764\ M_{xc} + 0.012267\ M_{xf} + 0.006149\ M_{xi} + 0.001688\ M_{xl}$$

$$Ey_d = 1.762419\ P_{ya} + 1.058204\ P_{yd} + 0.404067\ P_{yg} + 0.051755\ P_{yj} + 0.005652\ M_{xa} + 0.005652\ M_{xd} + 0.003824\ M_{xg} + 0.001172\ M_{xj}$$

$$Ey_e = 1.762419\ P_{yb} + 1.058204\ P_{ye} + 0.404067\ P_{yh} + 0.051755\ P_{yk} + 0.005652\ M_{xb} + 0.005652\ M_{xe} + 0.003824\ M_{xh} + 0.001172\ M_{xk}$$

$$Ey_f = 1.762419\ P_{yc} + 1.058204\ P_{yf} + 0.404067\ P_{yi} + 0.051755\ P_{yl} + 0.005652\ \mathrm{M}_{xc} + 0.005652\ M_{xf} + 0.003824\ M_{xi} + 0.001172\ M_{xl}$$

$$Ey_g = 0.582459\ P_{ya} + 0.404067\ P_{yd} + 0.212482\ P_{yg} + 0.036723\ P_{yj} + 0.001459\ M_{xa} + 0.001459\ M_{xd} + 0.001459\ M_{xg} + 0.000648\ M_{xj}$$

$$Ey_h = 0.582459\ P_{yb} + 0.404067\ P_{ye} + 0.212482\ P_{yh} + 0.036723\ P_{yk} + 0.001459\ M_{xb} + 0.001459\ M_{xe} + 0.001459\ M_{xh} + 0.000648\ M_{xk}$$

$$Ey_i = 0.582459\ P_{yc} + 0.404067\ P_{yf} + 0.212482\ P_{yi} + 0.036723\ P_{yl} + 0.001459\ M_{xc} + 0.001459\ M_{xf} + 0.001459\ M_{xi} + 0.000648\ M_{xl}$$

$$Ey_j = 0.066525\ P_{ya} + 0.051755\ P_{yd} + 0.036723\ P_{yg} + 0.013214\ P_{yj} + 0.000121\ M_{xa} + 0.000121\ M_{xd} + 0.000121\ M_{xg} + 0.000121\ M_{xj}$$

$$Ey_k = 0.066525\ P_{yb} + 0.051755\ P_{ye} + 0.036723\ P_{yh} + 0.013214\ P_{yk} + 0.000121\ M_{xb} + 0.000121\ M_{xe} + 0.000121\ M_{xh} + 0.000121\ M_{xk}$$

$$Ey_l = 0.066525\ P_{xc} + 0.0517755\ P_{yf} + 0.036723\ P_{yi} + 0.013214\ P_{yl} + 0.000121\ M_{xc} + 0.000121\ M_{xf} + 0.00121\ M_{xi} + 0.000121\ M_{xl}$$

(ii) 撓み角 y_{za}, y'_{zb}, ……………, y'_{zl}

$$10Ey'_{za} = 0.18184\ P_{ya} + 0.05652\ P_{yd} + 0.01459\ P_{yg} + 0.00121\ P_{yj} + 0.001719\ M_{xa} + 0.000542\ M_{xd} + 0.000190\ M_{xg} + 0.000042\ M_{xj}$$

$$10Ey'_{zb} = 0.18184\ P_{yb} + 0.05652\ P_{ye} + 0.01459\ P_{yh} + 0.00121\ P_{yk} + 0.001719\ M_{xb} + 0.000542\ M_{xe} + 0.000190\ M_{xh} + 0.000042\ M_{xk}$$

$$10Ey'_{zc} = 0.18184\ P_{yc} + 0.05652\ P_{yf} + 0.01459\ P_{yi} + 0.00121\ P_{yl} + 0.001719\ M_{xc} + 0.000542\ M_{xf} + 0.000190\ M_{xi} + 0.000042\ M_{xl}$$

$$10Ey'_{zd} = 0.12787\ P_{ya} + 0.05912\ P_{yd} + 0.01459\ P_{yg} + 0.00121\ P_{yj} + 0.000542\ M_{xa} + 0.000542\ M_{xd} + 0.000190\ M_{xg} + 0.000042\ M_{xj}$$

$$10Ey'_{ze} = 0.12787\ P_{yb} + 0.05912\ P_{ye} + 0.01459\ P_{yh} + 0.00121\ P_{yk} + 0.000542\ M_{xb} + 0.000542\ M_{xe} + 0.000190\ M_{xh} + 0.000042\ M_{xk}$$

$$10Ey'_{zf} = 0.12787\ P_{yc} + 0.05912\ P_{yf} + 0.01459\ P_{yi} + 0.00121\ P_{yl} + 0.000542\ M_{xc} + 0.000542\ M_{xf} + 0.000190\ M_{xi} + 0.000042\ M_{xl}$$

$$10Ey'_{zg} = 0.06524\ P_{ya} + 0.04199\ P_{yd} + 0.01614\ P_{yg} + 0.00121\ P_{yj} + 0.000190\ M_{xa} + 0.00019\ M_{xd} + 0.000190\ M_{xg} + 0.000042\ M_{xj}$$

$$10Ey'_{zh} = 0.06524\ P_{yb} + 0.04199\ P_{ye} + 0.01614\ P_{yh} + 0.00121\ P_{yk} + 0.000190\ M_{xb} + 0.000190\ M_{xe} + 0.000190\ M_{xh} + 0.000042\ M_{xk}$$

$$10Ey'_{zi} = 0.06524\ P_{yc} + 0.04199\ P_{yf} + 0.01614\ P_{yi} + 0.00121\ P_{yl} + 0.000190\ M_{xc} + 0.000190\ M_{xf} + 0.000190\ M_{xi} + 0.000042\ M_{xl}$$

$$10Ey'_{zj} = 0.01988 \ P_{ya} + 0.01465 \ P_{yd} + 0.00941 \ P_{yg} + 0.00121 \ P_{yj} + 0.000042 \ M_{xa} + 0.000042 \ M_{xd} + 0.000042 \ M_{xg} + 0.000042 \ M_{xj}$$

$$10Ey'_{zk} = 0.01988 \ P_{yb} + 0.01465 \ P_{ye} + 0.00941 \ P_{yh} + 0.00121 \ P_{yk} + 0.000042 \ M_{xb} + 0.000042 \ M_{xe} + 0.000042 \ M_{xh} + 0.000042 \ M_{xk}$$

$$10Ey'_{zl} = 0.01988 \ P_{yc} + 0.01465 \ P_{yf} + 0.00941 \ P_{yi} + 0.00121 \ P_{yl} + 0.000042 \ M_{xc} + 0.000042 \ M_{xf} + 0.000042 \ M_{xi} + 0.000042 \ M_{xl}$$

(iii) 捩 り 角 y'_{za}, y'_{xb}, …………, y'_{xl}

$$10Ey'_{xa} = 0.001957 \ M_{za} + 0.000741 \ M_{zd} + 0.000302 \ M_{zg} + 0.000067 \ M_{zj}$$

$$10Ey'_{xb} = 0.001957 \ M_{zb} + 0.000741 \ M_{ze} + 0.000302 \ M_{zh} + 0.000067 \ M_{zk}$$

$$10Ey'_{xc} = 0.001957 \ M_{zc} + 0.000741 \ M_{zf} + 0.000302 \ M_{zi} + 0.000067 \ M_{zl}$$

$$10Ey'_{xd} = 0.000741 \ M_{za} + 0.000741 \ M_{zd} + 0.000302 \ M_{zg} + 0.000067 \ M_{zj}$$

$$10Ey'_{xe} = 0.000741 \ M_{zb} + 0.000741 \ M_{ze} + 0.000302 \ M_{zh} + 0.000067 \ M_{zk}$$

$$10Ey'_{xf} = 0.000741 \ M_{zc} + 0.000741 \ M_{zf} + 0.000302 \ M_{zi} + 0.000067 \ M_{zl}$$

$$10Ey'_{xg} = 0.000302 \ M_{za} + 0.000302 \ M_{zd} + 0.000302 \ M_{zg} + 0.000067 \ M_{zj}$$

$$10Ey'_{xh} = 0.000302 \ M_{zb} + 0.000302 \ M_{ze} + 0.000302 \ M_{zh} + 0.000067 \ M_{zk}$$

$$10Ey'_{xi} = 0.000302 \ M_{zc} + 0.000302 \ M_{zf} + 0.000302 \ M_{zi} + 0.000067 \ M_{zl}$$

$$10Ey'_{xj} = 0.000067 \ M_{za} + 0.000067 \ M_{zd} + 0.000067 \ M_{zg} + 0.000067 \ M_{zj}$$

$$10Ey'_{xk} = 0.000067 \ M_{zb} + 0.000067 \ M_{ze} + 0.000067 \ M_{zh} + 0.000067 \ M_{zk}$$

$$10Ey'_{xl} = 0.000067 \ M_{zc} + 0.000067 \ M_{zf} + 0.000067 \ M_{zi} + 0.000067 \ M_{zl}$$

ii) 固定梁の変位

(i) 撓 み 量 y_A, y_B, …………, y_L

$$Ey_A = 0.167816 \ P_{yA} + 0.517645 \ P_{yB} + 0.679285 \ P_{yC} + 0.003464 \ M_{zA} + 0.002078 \ M_{zB} + 0.000692 \ M_{zC}$$

$$Ey_B = 0.517645 \ P_{yA} + 2.862845 \ P_{yB} + 4.345771 \ P_{yC} + 0.014556 \ M_{zA} + 0.018723 \ M_{zB} + 0.006237 \ M_{zC}$$

$$Ey_C = 0.679285 \ P_{yA} + 4.345771 \ P_{yB} + 7.823922 \ P_{yC} + 0.020101 \ M_{zA} + 0.035366 \ M_{zB} + 0.017330 \ M_{zC}$$

$$Ey_D = 0.042932 \ P_{yD} + 0.121889 \ P_{yE} + 0.153880 \ P_{yF} + 0.000686 \ M_{zD} + 0.000411 \ M_{zE} + 0.000137 \ M_{zF}$$

$$Ey_E = 0.121889 \ P_{yD} + 0.615221 \ P_{yE} + 0.918460 \ P_{yF} + 0.002881 \ M_{zD} + 0.003706 \ M_{zE} + 0.001234 \ M_{zF}$$

$$Ey_F = 0.153880 \ P_{yD} + 0.918460 \ P_{yE} + 1.636036 \ P_{yF} + 0.003978 \ M_{zD} + 0.007000 \ M_{zE} + 0.003430 \ M_{zF}$$

$$Ey_G = 0.020124 \ P_{yG} + 0.052737 \ P_{yH} + 0.063827 \ P_{yI} + 0.000238 \ M_{zG} + 0.000143 \ M_{zH} + 0.000048 \ M_{zI}$$

$$Ey_H = 0.052737 \ P_{yG} + 0.239494 \ P_{yH} + 0.349855 \ P_{yI} + 0.000999 \ M_{zG} + 0.001285 \ M_{yH} + 0.000428 \ M_{zI}$$

$$Ey_I = 0.063827 \ P_{yG} + 0.349855 \ P_{yH} + 0.614282 \ P_{yI} + 0.001379 \ M_{zG} + 0.002426 \ M_{zH} + 0.001189 \ M_{zI}$$

$$Ey_J = 0.012426\ P_{yJ} + 0.030548\ P_{yK} + 0.035607\ P_{yL} + 0.000108\ M_{zJ} + 0.000065\ M_{zK} + 0.000022\ M_{zL}$$

$$Ey_K = 0.030548\ P_{yJ} + 0.125486\ P_{yK} + 0.179080\ P_{yL} + 0.000456\ M_{zJ} + 0.000586\ M_{zK} + 0.000195\ M_{zL}$$

$$Ey_L = 0.035607\ P_{yJ} + 0.179080\ P_{yK} + 0.309466\ P_{yL} + 0.000629\ M_{zJ} + 0.001107\ M_{zK} + 0.000542\ M_{zL}$$

(ii) 撓み角 y'_{xA}, y'_{xB}, …………, y'_{xL}

$$10Ey'_{xA} = 0.03918\ P_{yA} + 0.15464\ P_{yB} + 0.21009\ P_{yC} + 0.001189\ M_{zA} + 0.000713\ M_{zB} + 0.000238\ M_{zC}$$

$$10Ey'_{xB} = 0.02078\ P_{yA} + 0.19177\ P_{yB} + 0.36277\ P_{yC} + 0.000713\ M_{zA} + 0.002140\ M_{zB} + 0.000713\ M_{zC}$$

$$10Ey'_{xC} = 0.00692\ P_{yA} + 0.06237\ P_{yB} + 0.17784\ P_{yC} + 0.000238\ M_{zA} + 0.000713\ M_{zB} + 0.001189\ M_{zC}$$

$$10Ey'_{xD} = 0.00943\ P_{yD} + 0.03394\ P_{yE} + 0.04491\ P_{yF} + 0.000235\ M_{zD} + 0.000141\ M_{zE} + 0.000047\ M_{zF}$$

$$10Ey'_{xE} = 0.00411\ P_{yD} + 0.03963\ P_{yE} + 0.07513\ P_{yF} + 0.000141\ M_{zD} + 0.000432\ M_{zE} + 0.000141\ M_{zF}$$

$$10Ey'_{xF} = 0.00137\ P_{yD} + 0.01234\ P_{yE} + 0.03687\ P_{yF} + 0.000047\ M_{zD} + 0.000141\ M_{zE} + 0.000235\ M_{zF}$$

$$10Ey'_{xG} = 0.00417\ P_{yG} + 0.01357\ P_{yH} + 0.01737\ P_{yI} + 0.000082\ M_{zG} + 0.000049\ M_{zH} + 0.000016\ M_{zI}$$

$$10Ey'_{xH} = 0.00143\ P_{yG} + 0.01464\ P_{yH} + 0.02784\ P_{yI} + 0.000049\ M_{zG} + 0.000147\ M_{zH} + 0.000049\ M_{zI}$$

$$10Ey'_{xI} = 0.00048\ P_{yG} + 0.00428\ P_{yH} + 0.01368\ P_{yI} + 0.000016\ M_{zG} + 0.000049\ M_{zH} + 0.000082\ M_{zI}$$

$$10Ey'_{xJ} = 0.00245\ P_{yJ} + 0.00731\ P_{yK} + 0.00904\ P_{yL} + 0.000037\ M_{zJ} + 0.000022\ M_{zK} + 0.000007\ M_{zL}$$

$$10Ey'_{xK} = 0.00065\ P_{yJ} + 0.00723\ P_{yK} + 0.01382\ P_{yL} + 0.000022\ M_{zJ} + 0.000067\ M_{zK} + 0.000022\ M_{zL}$$

$$10Ey'_{xL} = 0.00022\ P_{yJ} + 0.00195\ P_{yK} + 0.00679\ P_{yL} + 0.000007\ M_{zJ} + 0.000022\ M_{zK} + 0.000037\ M_{zL}$$

(iii) 捩り角 y'_{zA}, y'_{zB}, …………, y'_{zL}

$$10Ey'_{zA} = 0.000498\ M_{xA} + 0.000498\ M_{xB} + 0.000498\ M_{xC}$$

$$10Ey'_{zB} = 0.000498\ M_{xA} + 0.001494\ M_{xB} + 0.001494\ M_{xC}$$

$$10Ey'_{zC} = 0.000498\ M_{xA} + 0.001494\ M_{xB} + 0.002491\ M_{xC}$$

$$10Ey'_{zD} = 0.0001064\ M_{xD} + 0.0001064\ M_{xE} + 0.0001064\ M_{xF}$$

$$10Ey'_{zE} = 0.0001064\ M_{xD} + 0.0003195\ M_{xE} + 0.0003195\ M_{xF}$$

$$10Ey'_{zF} = 0.0001064\ M_{xD} + 0.0003195\ M_{xE} + 0.0005325\ M_{xF}$$

$$10Ey'_{zG} = 0.0000437\ M_{xG} + 0.0000437\ M_{xH} + 0.0000437\ M_{xI}$$

$$10Ey'_{zH} = 0.0000437\ M_{xG} + 0.0001312\ M_{xH} + 0.0001312\ M_{xI}$$

$$10Ey'_{zI} = 0.0000437\ M_{xG} + 0.0001312\ M_{xH} + 0.0002187\ M_{xI}$$
$$10Ey'_{zJ} = 0.0000251\ M_{xJ} + 0.0000251\ M_{xK} + 0.0000251\ M_{xL}$$
$$10Ey'_{zK} = 0.0000251\ M_{xJ} + 0.0000754\ M_{xK} + 0.0000754\ M_{xL}$$
$$10Ey'_{zL} = 0.0000251\ M_{xJ} + 0.0000754\ M_{xK} + 0.0001256\ M_{xL}$$

iii） 外力の方程式

$$P_{yA} + P_{ya} = P_{yB} + P_{yb} = P_{yC} + P_{yc} = 989.50$$
$$P_{yD} + P_{yd} = P_{yE} + P_{ye} = P_{yF} + P_{yf} = 2,880.50$$
$$P_{yG} + P_{yg} = P_{yH} + P_{yh} = P_{yI} + P_{yi} = 4,766.54$$
$$P_{yJ} + P_{yj} = P_{yK} + P_{yk} = P_{yL} + P_{yl} = 6,655.05$$

$$M_{xA} + M_{xa} = M_{xB} + M_{xb} = M_{xC} + M_{xc} = -13,624.89$$
$$M_{xD} + M_{xd} = M_{xE} + M_{xe} = M_{xF} + M_{xf} = -15,011.87$$
$$M_{xG} + M_{xg} = M_{xH} + M_{xh} = M_{xI} + M_{xi} = -23,861.02$$
$$M_{xJ} + M_{xj} = M_{xK} + M_{xk} = M_{xL} + M_{xl} = -38,040.07$$

$$M_{zA} + M_{za} = M_{zB} + M_{zb} = M_{zC} + M_{zc} = M_{zD} + M_{zd} = M_{zE} + M_{ze} = M_{zF} + M_{zf} = M_{zG} + M_{zg} = M_{zH} + M_{zh} = M_{zI} + M_{zi} = M_{zJ} + M_{zj} = M_{zK} + M_{zk} = M_{zL} + M_{zl} = 0$$

§ 3. 片持梁並に固定梁の分割荷重及び撓み（y 方向の場合）

§ 2. に示した変位の方程式において

$$y_a = y_A,\ y_b = y_B,\ \cdots\cdots,\ y_l = y_L$$
$$y'_{za} = y'_{zA},\ y'_{zb} = y'_{zB},\ \cdots\cdots,\ y'_{zl} = y'_{zL}$$
$$y'_{xa} = y'_{zA},\ y'_{xb} = y'_{zB},\ \cdots\cdots,\ y'_{xl} = y'_{zL}$$

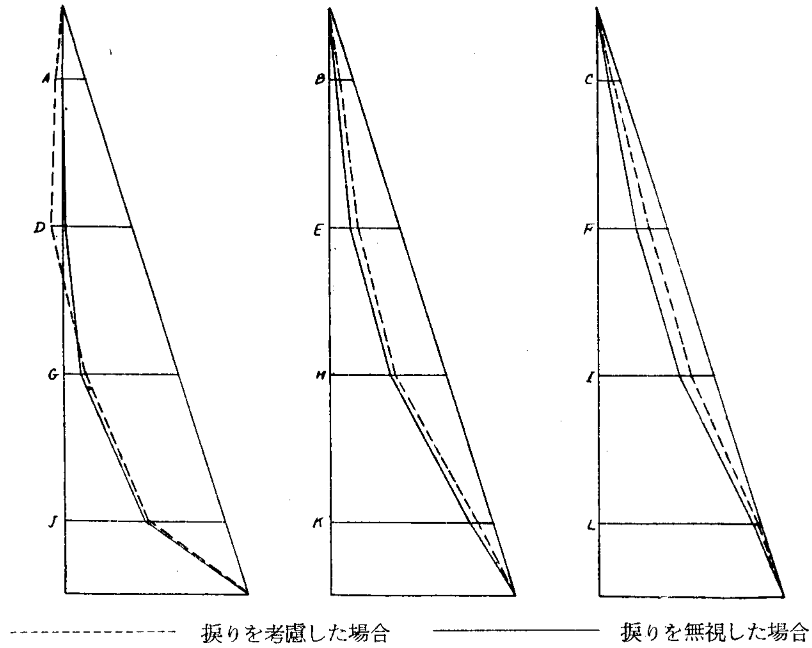
とおき，§ 2. iii）の外力の方程式とを併せ考えると36元の１次方程式が36与えられる。これを解くと，次の分割荷重が得られる。

i ） 分割荷重

荷重 \ 作用点	P (gr) 片持梁 $P_a, P_b, \cdots\cdots, P_l$	P (gr) 固定梁 $P_A, P_B, \cdots\cdots, P_L$	M_z (gr-mm) 片持梁 $M_{za}, M_{zb}, \cdots\cdots, M_{zl}$	M_z (gr-mm) 固定梁 $M_{zA}, M_{zB}, \cdots\cdots, M_{zL}$	M_x (gr-mm) 片持梁 $M_{xa}, M_{xb}, \cdots\cdots, M_{xl}$	M_x (gr-mm) 固定梁 $M_{xA}, M_{xB}, \cdots\cdots, M_{xL}$
A	− 271.61	1261.11	26.258	− 26.258	8.246	− 21.871
B	434.04	555.46	33.025	− 33.025	− 27.332	13.707
C	683.58	295.93	31.222	− 31.222	− 42.394	28.790
D	− 548.26	3428.76	67.966	− 67.966	68.014	− 83.026
E	1206.07	1674.43	81.585	− 81.585	− 80.962	77.383
F	2112.50	768.00	13.411	− 13.411	− 173.935	154.841
G	900.49	3766.05	61.493	− 61.493	103.011	− 128.205
H	2723.46	2043.08	62.531	− 62.531	− 209.724	176.546
I	3838.53	928.01	17.257	− 17.257	− 331.196	303.299
J	3371.15	3283.90	31.207	− 31.207	67.206	− 105.246
K	6036.30	618.75	− 22.054	22.054	− 346.850	308.810
L	6552.41	102.64	− 10.762	10.762	− 347.564	309.524

P の分割荷量は３—５図に示す。

3－5図



ii) 撓み量

§ 3. i) の分割荷重によつて生ずる y 方向の撓み量は次の如くなり，片持梁と固定梁の誤差は僅少であるから，数値計算に大きな誤りがなかつたと思われる。

計算点	片持梁 (mm)	固定梁 (mm)	誤差 ± (%)
A	1. 390	1. 406	0. 572
B	6. 404	6. 326	0. 609
C	9. 243	9. 083	0. 870
D	1. 038	1. 050	0. 600
E	4. 422	4. 441	0. 330
F	6. 588	6. 598	0. 076
G	0. 651	0. 537	1. 044
H	2. 305	2. 339	0. 727
I	3. 475	3. 435	0. 572
J	0. 165	0. 170	1. 471
K	0. 516	0. 534	1. 648
L	0. 741	0. 731	0. 676

§ 4. 捩り応力を無視した場合の荷重分割及び撓み

i) 撓み方程式（y 方向の場合）

(i) 片持梁の撓み量 y_a, y_b, …………y_l,

$$
\begin{aligned}
Ey_a &= 3.710926\ P_{ya} + 1.762419\ P_{yd} + 0.582459\ P_{yg} + 0.066525\ P_{yj}\\
Ey_b &= 3.710926\ P_{yb} + 1.762419\ P_{ye} + 0.582459\ P_{yh} + 0.066525\ P_{yk}\\
Ey_c &= 3.710926\ P_{yc} + 1.762419\ P_{yf} + 0.582459\ P_{yi} + 0.066525\ P_{yl}\\
Ey_d &= 1.762419\ P_{ya} + 1.058204\ P_{yd} + 0.404067\ P_{yg} + 0.051755\ P_{yj}\\
Ey_e &= 1.762419\ P_{yb} + 1.058204\ P_{ye} + 0.404067\ P_{yh} + 0.051755\ P_{yk}\\
Ey_f &= 1.762419\ P_{yc} + 1.058204\ P_{yf} + 0.404067\ P_{yi} + 0.051755\ P_{yl}\\
Ey_g &= 0.582459\ P_{ya} + 0.404067\ P_{yd} + 0.212482\ P_{yg} + 0.036723\ P_{yj}\\
Ey_h &= 0.582459\ P_{yb} + 0.404067\ P_{ye} + 0.212482\ P_{yh} + 0.036723\ P_{yk}\\
Ey_i &= 0.582459\ P_{yc} + 0.404067\ P_{yf} + 0.212482\ P_{yi} + 0.036723\ P_{yl}\\
Ey_j &= 0.066525\ P_{ya} + 0.051755\ P_{yd} + 0.036723\ P_{yg} + 0.013214\ P_{yj}\\
Ey_k &= 0.066525\ P_{yb} + 0.051755\ P_{ye} + 0.036723\ P_{yh} + 0.013214\ P_{yk}\\
Ey_l &= 0.066525\ P_{yc} + 0.051755\ P_{yf} + 0.036723\ P_{yi} + 0.013214\ P_{yl}
\end{aligned}
$$

(ii) 固定梁の撓み量 y_A, y_B, …………, y_L

$$
\begin{aligned}
Ey_A &= 0.167816\ P_{yA} + 0.517645\ P_{yB} + 0.679285\ P_{yC}\\
Ey_B &= 0.517645\ P_{yA} + 2.862845\ P_{yB} + 4.345771\ P_{yC}\\
Ey_C &= 0.679285\ P_{yA} + 4.345771\ P_{yB} + 7.823922\ P_{yC}\\
Ey_D &= 0.042932\ P_{yD} + 0.121889\ P_{yE} + 0.153880\ P_{yF}\\
Ey_E &= 0.121889\ P_{yD} + 0.615221\ P_{yE} + 0.918460\ P_{yF}\\
Ey_F &= 0.153880\ P_{yD} + 0.918460\ P_{yE} + 1.636036\ P_{yF}\\
Ey_G &= 0.020124\ P_{yG} + 0.052737\ P_{yH} + 0.063827\ P_{yI}\\
Ey_H &= 0.052737\ P_{yG} + 0.239494\ P_{yH} + 0.349855\ P_{yI}\\
Ey_I &= 0.063827\ P_{yG} + 0.349855\ P_{yH} + 0.614282\ P_{yI}\\
Ey_J &= 0.012426\ P_{yJ} + 0.030548\ P_{yK} + 0.035607\ P_{yL}\\
Ey_K &= 0.030548\ P_{yJ} + 0.125486\ P_{yK} + 0.179080\ P_{yL}\\
Ey_L &= 0.035607\ P_{yJ} + 0.179080\ P_{yK} + 0.309466\ P_{yL}
\end{aligned}
$$

(iii) 荷重分割及び撓み

計算点	分割荷重 (gr)		撓み (mm)
	片持梁 P_{ya}, P_{yb}, ………, P_{yl}	固定梁 P_{yA}, P_{yB}, ……, P_{yL}	
A	− 2.348	991.848	2.263
B	291.392	698.108	12.087
C	541.774	447.726	19.537
D	121.184	2759.316	1.547

E	908.225	1972.275	7.420
F	1595.0'49	1285.451	11.756
G	735.777	4030.763	0.840
H	2417.050	2349.490	3.279
I	3378.474	1388.066	5.206
J	3360.846	3294.204	0.214
K	5710.239	944.811	0.680
L	6360.104	294.946	0.954

分割荷重は3—5図に捩りを考慮したものとの比較を示す。

第4節　撓みの実験値と理論値の比較

第3節によつて各分割荷重に対応する。y 方向の撓みの理論値が計算された。

実験値は3—4表に示す通りである。本実験は水深50cm で行つたものであり，撓み量の単位は mm で，マイクロメーターを用いて測定したものである。括弧内の数値はダイヤルゲージによる測定値である。

実験値の測点と，理論値の計算点は一致していない。そのため実験値の撓みは直線変化するものとみなし，計算によつて，それぞれ同一点における撓みを求め，実験値と理論値を比較し3—6図，3—7図に示す。

3—4表　　単位mm

I 1952. 12. 10 測定

垂直方向＼水平方向	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1.70	8.92	16.88	22.77	25.11	23.15	17.70	9.16	1.86
2	1.31	6.97	12.75	16.67	18.35	16.14	13.10	7.43	1.70
3	1.17	5.17	9.23	12.17	13.43	12.45	9.84	5.79	1.30
4	0.83	(3.33) 3.58	6.33	(7.38) 8.02	8.79	(7.59) 8.42	6.80	(3.59) 3.99	1.27
5	0.54	2.13	3.58	4.64	4.96	4.59	4.00	2.14	0.74
6	0.19	0.78	1.44	1.94	2.13	2.09	1.63	1.15	0.08

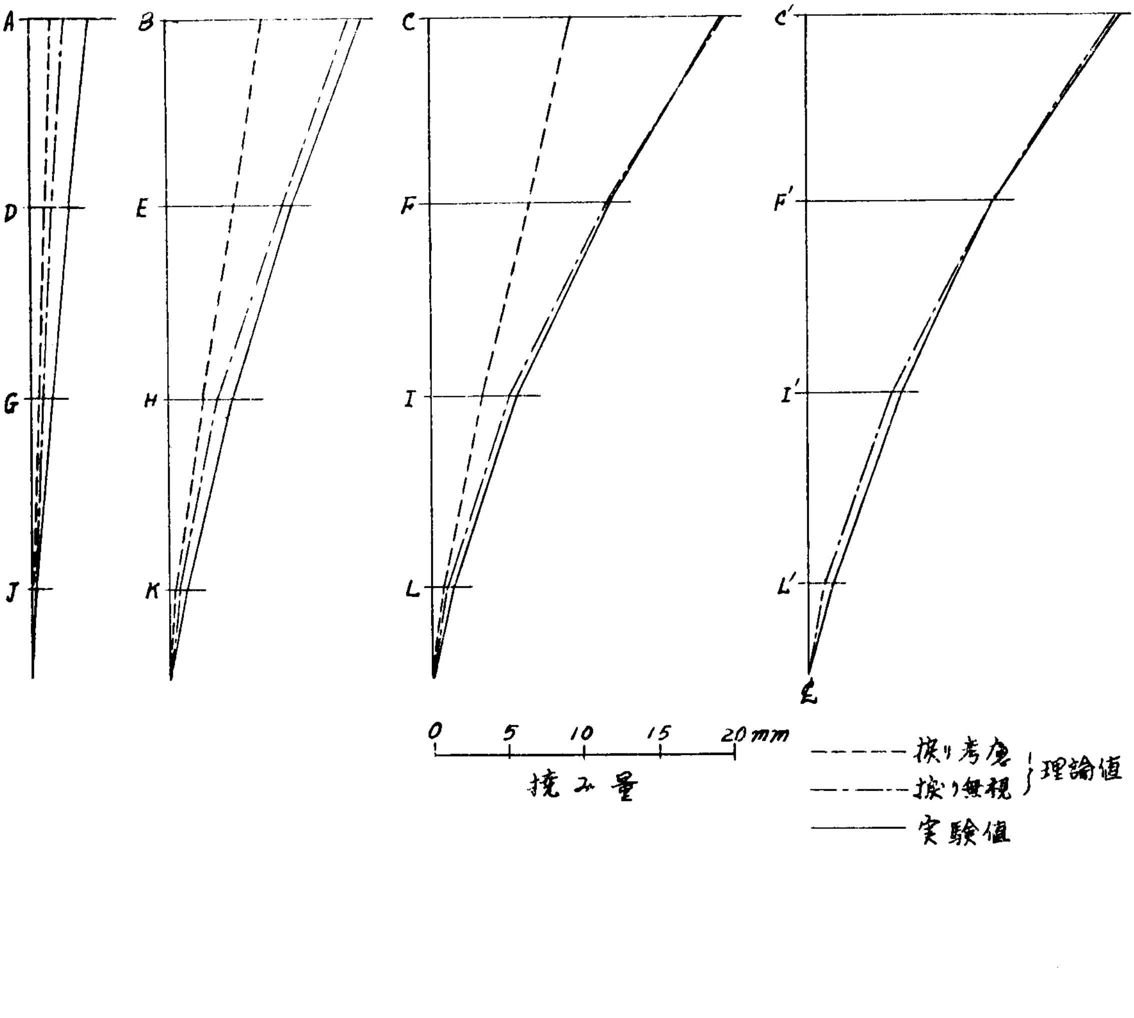
II 1952. 12. 12 測定

垂直方向＼水平方向	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1.21	8.06	16.01	22.23	23.92	23.27	15.78	7.64	1.65
2	1.55	6.45	11.83	16.42	19.07	16.31	12.17	6.62	1.30
3	1.23	5.04	9.16	11.81	13.17	12.43	9.30	5.16	1.44
4	1.04	(3.77) 3.74	6.33	(7.21) 8.25	8.48	(7.43) 8.36	6.56	(3.43) 3.54	0.95
5	0.74	1.95	3.82	4.47	5.28	4.80	3.90	2.53	0.61
6	0.05	0.82	1.44	1.80	2.30	2.00	1.53	0.75	0.36

この結果は，振り応力を無視した場合は固定梁の中央点附近において極めてよい近似性を示し，固定梁両端附近においては理論値の方が，実験値よりも過小な値を示す。

振り応力を考慮したものの理論値は一般に過小であり，実験値の½程度の値を示す。また，撓みの傾向においても，振り応力を無視した場合の方が実験値とよく一致する。

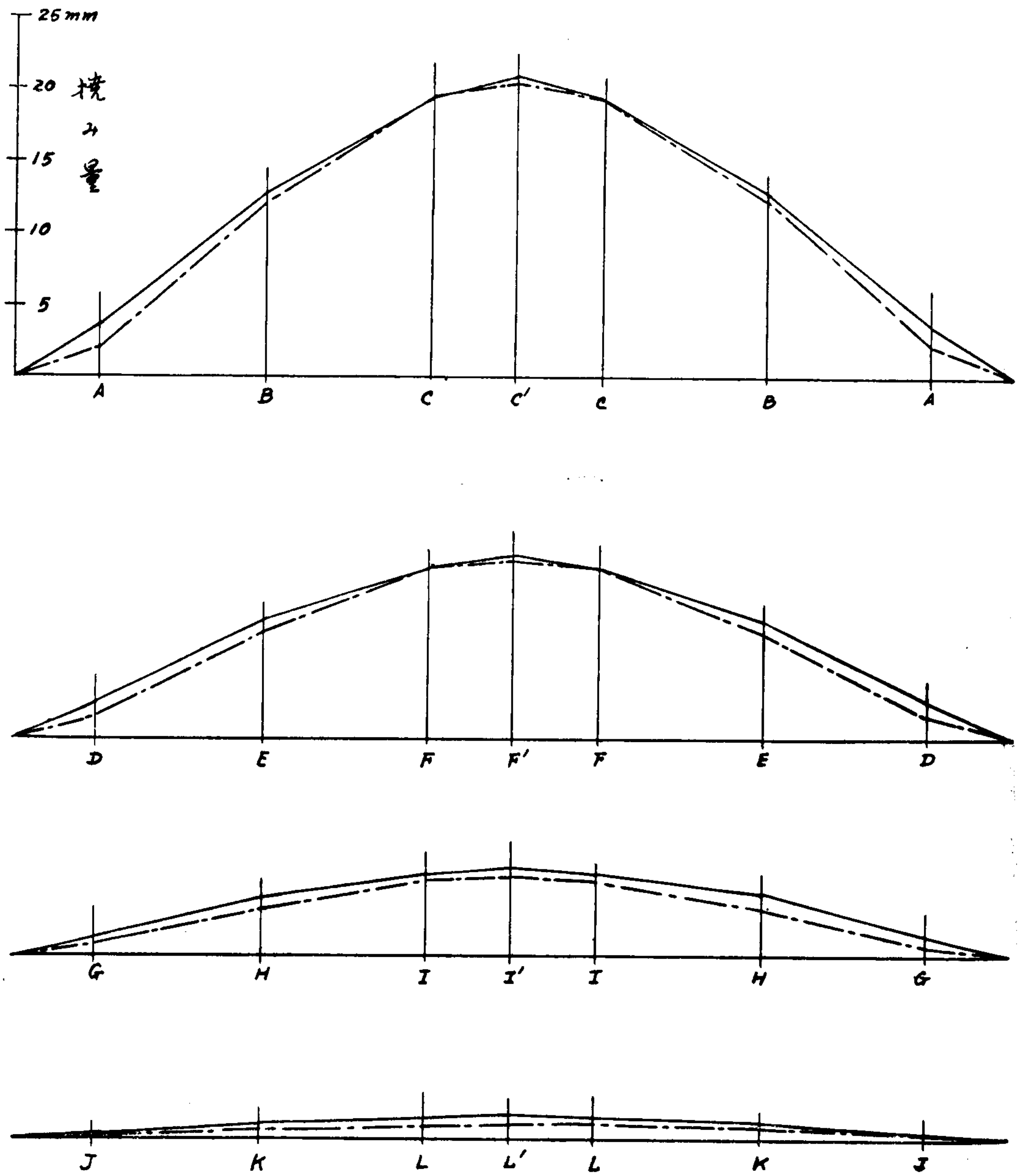
3—6図



以上の結果から一応，振りの項を無視することが出来るから以下の計算は振りなしとする。なお，この結果は第1章の理論を裏付けするものであり，また，砂防ダムの内部応力の検討は非常に簡単になり，しかも実験値とよく合致する。

y 方向の荷重の分割に当り，実測値は求め得なかつたが，固定梁の引張り，及び圧縮による応力は無視した。これは作用方向が互に反対であるためと，固定梁の撓みによる2次応力の項も当然考えなければならなく，かくすると非常に複雑となるから，実際上，無視されるものとみなした。

3－7図



以上によつて，36個の方程式を解く必要がなく，最初から12個の撓み方程式を解くことによつて，分割荷重が与えられる。

第 5 節　撓み及び圧縮量の方程式（z 方向の場合）

（i）片持梁の縮み　z_a，z_b，…………，z_l

$$Ez_a = 0.052151\ P_{za} + 0.030499\ P_{zd} + 0.015716\ P_{zg} + 0.004546\ P_{zj}$$

$$Ez_b = 0.052151\ P_{zb} + 0.030499\ P_{ze} + 0.015716\ P_{zh} + 0.004546\ P_{zk}$$
$$Ez_c = 0.052151\ P_{zc} + 0.030499\ P_{zf} + 0.015716\ P_{zi} + 0.004546\ P_{zl}$$
$$Ez_d = 0.030499\ P_{za} + 0.030499\ P_{zd} + 0.015716\ P_{zg} + 0.004546\ P_{zj}$$
$$Ez_e = 0.030499\ P_{zb} + 0.030499\ P_{ze} + 0.015716\ P_{zh} + 0.004546\ P_{zk}$$
$$Ez_f = 0.030499\ P_{zc} + 0.030490\ P_{zf} + 0.015716\ P_{zi} + 0.004546\ P_{zl}$$
$$Ez_g = 0.015716\ P_{za} + 0.015716\ P_{zd} + 0.015716\ P_{zg} + 0.004546\ P_{zj}$$
$$Ez_h = 0.015716\ P_{zb} + 0.015716\ P_{ze} + 0.015716\ P_{zh} + 0.004546\ P_{zk}$$
$$Ez_i = 0.015716\ P_{zc} + 0.015716\ P_{zf} + 0.015716\ P_{zi} + 0.004546\ P_{zl}$$
$$Ez_j = 0.004546\ P_{za} + 0.004546\ P_{zd} + 0.004546\ P_{zg} + 0.004546\ P_{zj}$$
$$Ez_k = 0.004546\ P_{zb} + 0.004546\ P_{ze} + 0.004546\ P_{zh} + 0.004546\ P_{zk}$$
$$Ez_l = 0.004546\ P_{zc} + 0.004546\ P_{zf} + 0.004546\ P_{zi} + 0.004546\ P_{zl}$$

(ii) 固定梁の撓み z_A, z_B, …………, z_L

$$Ez_A = 0.064312\ P_{zA} + 0.090302\ P_{zB} + 0.103295\ P_{zC}$$
$$Ez_B = 0.090302\ P_{zA} + 0.378408\ P_{zB} + 0.495475\ P_{zC}$$
$$Ez_C = 0.103295\ P_{zA} + 0.495475\ P_{zB} + 0.874647\ P_{zC}$$
$$Ez_D = 0.036117\ P_{zD} + 0.050299\ P_{zE} + 0.057390\ P_{zF}$$
$$Ez_E = 0.050299\ P_{zD} + 0.209562\ P_{zE} + 0.273445\ P_{zF}$$
$$Ez_F = 0.057390\ P_{zD} + 0.273445\ P_{zE} + 0.482399\ P_{zF}$$
$$Ez_G = 0.025141\ P_{zG} + 0.034948\ P_{zH} + 0.039850\ P_{zI}$$
$$Ez_H = 0.034948\ P_{zG} + 0.145408\ P_{zH} + 0.189580\ P_{zI}$$
$$Ez_I = 0.039850\ P_{zG} + 0.189580\ P_{zH} + 0.334403\ P_{zI}$$
$$Ez_J = 0.019283\ P_{zJ} + 0.026786\ P_{zK} + 0.030536\ P_{zL}$$
$$Ez_K = 0.026786\ P_{zJ} + 0.111391\ P_{zK} + 0.145183\ P_{zL}$$
$$Ez_L = 0.030536\ P_{zJ} + 0.145183\ P_{zK} + 0.256075\ P_{zL}$$

(iii) 外力の方程式

$$P_{zA} + P_{za} = P_{zB} + P_{zb} = P_{zC} + P_{zc} = 832.67$$
$$P_{zD} + P_{zd} = P_{zE} + P_{ze} = P_{zF} + P_{zf} = 1585.49$$
$$P_{zG} + P_{zg} = P_{zH} + P_{zh} = P_{zI} + P_{zi} = 2338.36$$
$$P_{zJ} + P_{zj} = P_{zK} + P_{zk} = P_{zL} + P_{zl} = 3090.39$$

(iv) 分割荷重と撓み

計算点	分割荷重 (gr)		撓み (縮み) (mm)
	片持梁 P_{za}, P_{zb}, ……, P_{zl}	固定梁 P_{zA}, P_{zB}, ……, P_{zL}	
A	293.70	592.97	1.525
B	641.61	191.06	3.218
C	845.70	− 13.03	3.918
D	531.14	1054.35	1.385

E	1284.35	301.14	2.474
F	1619.38	— 33.90	3.424
G	1112.16	1266.30	1.076
H	2078.52	259.74	2.072
I	2367.17	— 28.81	2.437
J	2237.13	853.36	0.507
K	2995.67	94.72	0.861
L	3104.95	— 14.56	0.977

第 6 節　各断面における応力分布

以上の計算から求めた片持梁負荷荷重を用い，その各断面における応力分布を計算し，これを２次元応力として計算した場合と比較すると３—５表となる。

なお，従来の擁壁理論からすれば，完全に転倒することになり，内部応力の比較は出来ない。

3—5表

	H cm	曲げモーメント gr cm	垂直力 gr	上流端応力 gr/cm²	下流端応力 gr/cm²
片持梁 ADGJ	0	37,575.40	4,120.13	— 105.454	164.480
	12.561	6,543.69	1,883.00	— 20.468	54.548
	25.122	663.55	770.84	2.460	16.470
	37.683	— 12.86	239.70	4.907	4.251
片持梁 BEHK	0	85,449.81	7,000.15	— 256.775	357.077
	12.561	40,027.22	4,004.48	— 193.196	265.670
	25.122	10,545.96	1,925.96	— 87.671	134.973
	37.683	1,595.37	641.61	— 28.483	53.005
片持梁 CFIL	0	135,419.08	7,937.72	— 429.551	543.269
	12.561	66.049.07	4,832.25	— 334.861	422.317
	25.122	19,062.60	2.465.08	— 170.953	231.495
	37.683	2,966.21	845.70	— 59.608	91.918
2次元応力	0	260,311.10	7,846.91	— 878.84	991.26
	12.561	111,659.50	4,756.52	— 596.97	683.05
	25.122	34,625.50	2,418.16	— 335.82	395.20
	37.683	5,417.50	832.67	— 122.48	154.28

２次元応力は外力（水圧及自重）がすべて片持梁に負荷されたものとしての計算である。

結　　言

第Ⅰ章においては水平外力のみを考えた理論を述べたのであるが，2種類の横断面を取つて行つた実験結果からすると，共に水平方向の撓みは理論値よりも小さく出ている。このことは本文中に述べた如く，実験材料の寒天か均質性を欠ぐ点と，弾性係数測定実験の不備によるものゝ外，固定条件が適切でなかつたものと考えられるが一般的傾向を知るには充分であつたと考察される。

第Ⅱ章の実験は第Ⅱ章の理論に基いて行つたものであるが，この結果を考察すると，捩り応力を考慮に入れた，より正確であるべき筈の理論値よりも，捩り応力を無視した簡易法の方が，実験値と非常によく合致し，しかも曲線の形も簡易法の方が，実験値とよく相似している。

この理由を考察すると，先ず剪断力の項の取り方と，周辺固定の条件が考えられる。

剪断力による撓み角を，曲げによる撓み角に加えたものを以て，捩り角に等しくおいている。しかるに角柱の捩りは，近接角柱によつて，原位置に引戻される傾向がある。これは固定端近くで，大きく現われる。また逆に，固定端から遠くにある角柱は，近くにある角柱に捩りを加える傾向がある。これ等は相殺されるものとは考えられない。

次に，周辺部固定の条件であるが，撓みは中央部で捩りを無視した，いわゆる簡易法とよく合致するが，固定端に近くなると，その差が大きくなる。実験では固定端を木片で単に挟んでおいた程度で，ゴム模型が引出される傾向にあつた。そのため固定梁の固定端は幾らか単純支承に近ずいたことに起因するものと考えられる。

しかしながら，簡易法は充分安全側にあり，実用的に支障ないものと考えられる。これによつて各断面の応力を算出した結果を見ると，底辺近くにあつては，堰堤中央部においてすら，2次元応力計算によるものと比べ，応力は約½であり，砂防堰堤断面の縮少に大いに意味があると信ずる。

また第Ⅰ章に述べた如く，これをコンクリート堰堤に応用すると僅少な引張り応力が生ずるだけで，これを補足するために鉄筋を僅か配置することによつて，断面を著しく節減出来る結果，砂防工学の進歩に，いささか寄与することが出来れば幸である。

なお，本研究にあたり，実験及数値計算に終始協力して下さつた下記の諸氏に深く感謝する次第である。

京大講師　郷原有恒君，　京大助手　栃木省二君
大学院学生　福井　正君
学　　生　本田昭郎君，　大林義臣君，　釣谷義範君，　大石道夫君

更に本研究は建設省建設技術研究補助による研究課題「砂防堰堤にかかる応力分布の研究」の一部であることを附記する。

本研究に使用した，主要な参考文献は次の通りである。

鷹部屋福平：— 高級桁梁論，1929
　同　：— 不静定応力理論，1931
高橋　逸夫：— 応用力学　上巻，1935
John Prescott　原著，山岡包郎訳：— 応用弾性学，1935
S. Timoshenko　原著，北畠顕正，片山健次郎共訳：— 材料力学　上巻，1950　下巻，1951
小西一郎，横尾義貫，成岡昌夫共著：— 構造力学　第1巻，1951
中原益次郎：— 弾性工学，1949
L. v. Tetmajer : — Die angewandte Elastizität- und Festigkeitslehre, 1904
Max Fischer : — Statik und Festigkeitslehre Bd. 1., 1923
A. Nádai : — Elastische Platten, 1925
O. Pichler : — Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, 1928
U. S. Department of the Interior : — Dams and Control Works, 1938
William P. Creager, J. D. Justin and J. Hinds : — Engineering for Dams　Vol. Ⅱ
Concrete Dams, 1950

U. S. Department of the Interior : — Treatise on Dams
Chapter 9. Gravity Dams, 1950
Chapter 10. Arch Dams, 1950

Résumé

The "sabō"-dam may be considered the twisting and crossing structures, divided into many members of the vertical and horizontal elements.

The deflection of the vertical cantilever is equal to the deflection of the same crossing point of the fixed horizontal beam, the twisting angle of the cantilever is equal to the deflectional angle of the fixed beam, and the deflectional angle of the cantilever is equal to the twisting angle of the fixed beam.

Analising 1 st order equations, the divided external forces of the fixed beams and cantilevers are given.

By this analyzis, the sectional area of the "sabō"-dam is determined more economically than that is analysed by the gravity method.