

# 差分法による木材切削工具の温度分布解析<sup>\*1</sup>

奥島俊介<sup>\*2</sup>・杉原彦一<sup>\*3</sup>

## Temperature Distribution Analysis of Wood Cutting Tool with Differential Method

Shunsuke OKUSHIMA and Hikoichi SUGIHARA

### 目 次

要 旨 .....	328	4. 結 言 .....	333
1. 緒 言 .....	328	引用文献 .....	334
2. 温度分布計算の基礎理論 .....	329	Résumé.....	334
3. 温度分布計算例 .....	332		

### 要 旨

切削中の木材切削工具の温度分布を実測することには種々の困難があるので、理論的に温度分布を求める一方法を示した。すなわちいくつかの仮定を置いて作った温度分布に関する微分方程式を差分方程式に変換し、それをし緩法によって近似的に解いた。

その結果、たとえば切削速度が 40 m/sec の時、定常状態において刃先の温度は 500°C 近くになること等が導かれた。

### 1. 緒 言

木材加工機械の切削速度や送り速度が大きくなるにつれて工具温度が高くなり、この工具温度が工具寿命に影響を与えていると考えられる。実際切削工具の摩耗状態あるいは挽材面を観察すると切削中、特に刃先近くにおける温度がかなり高くなっていることが推察される。筆者らは先に赤外線顕微鏡を用いて測定した切削中のカッター刃先付近の温度が 300°C 近くになっていることを発表した。<sup>1)</sup> これらのことから切削中の切削工具の温度分布を知ることは、切削工具の摩耗機構解明に役立つものと考えられる。

金属切削工具の温度については早くから工具一被削材熱電対法を用いて、Shove<sup>2)</sup>, Gottwein<sup>3)</sup>, Herbert 等により測定されており、最近では赤外線輻射を写真撮影して工具の温度分布が測定されている<sup>13)</sup>。しかし木材切削工具については木材が絶縁体であるためにいまだに工具の温度分布あるいは切削温度についての報告は 1, 2<sup>4)5)</sup> を除いてみあたらない。

一方 1951 年に J. Trigger, B. T. Chao<sup>6)</sup> は金属切削工具の平均すくい面温度を解析的に求め、

\*1 本報は京都大学大学院在籍中における研究である。

\*2 王子製紙総合研究所, Oji Paper Co. Ltd., Tokyo.

\*3 京都大学農学部, Faculty of Agriculture, University of Kyoto, Kyoto.

その後 B. G. Loewen, M. C. Shaw<sup>7)</sup> は J. Trigger 等の方法を改良した。また 1943 年に H. W. Emmons<sup>8)</sup> は格子点を用いて iterative method (反復法) により物体の温度を求める方法を発表し、1955 に B. T. Chao, J. Trigger<sup>9)</sup> は反復法によりすくい面ならびに、にげ面の温度分布を理論的に求めた。

本報告においては木材切削工具を発熱領域等の数個の領域に分割し、さらに各領域をいくつかの格子に分割して各格子点についての差分方程式を作り、電子計算器 KDC-II を用いてし緩法によってこれらの方程式を解き、各格子点の温度を定めて工具の温度分布を解析的に求めた。

## 2. 温度分布計算の基礎理論

### 2.1 熱伝導微分方程式とその差分方程式への変換<sup>11)</sup>

工具温度分布の理論計算をするにあたり、次の仮定をおいた。

- 1) 工具に対する熱源としては切くずと被削母材のみとする。(固定面熱源とする)
- 2) 被削母材は十分大きくチップも十分長い。
- 3) 工具, 切くず, 被削材の熱的性質は温度によって変化しない。

以上のような仮定のもとに Fig. 1 に示す如く、工具を四つの領域(発熱領域, 表面領域, 境界領域, 領域内)と三つの特異点に分ける。工具の刃先角を 45° としすくい面方向に  $y$  軸を, それと直角方向に  $x$  軸をとり, 刃先を格子点 (1, 1) とし工具を 1275 個の格子点に分割した。すなわち格子点間隔を  $y$  軸方向,  $x$  軸方向とも 0.05 mm とし,  $y$  軸方向に 50 個の格子点をとった。次にそれぞれの領域について微分方程式を作成する。

#### 1) 領域内

熱源が固定している場合, かつ定常状態においては次の微分方程式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ただし  $\theta$  は温度

Fig. 2 における格子点 0, 1, 2, 3, 4 の温度をそれぞれ  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  とすると  $y$  軸方向について  $\Delta\theta_{y_1} = \theta_1 - \theta_0, \Delta\theta_{y_2} = \theta_0 - \theta_3$  よって

$$\Delta(\Delta\theta_y) = \Delta\theta_{y_1} - \Delta\theta_{y_2} = \theta_1 + \theta_3 - 2\theta_0 \quad (2)$$

$x$  軸方向について

$$\Delta(\Delta\theta_x) = \theta_2 + \theta_4 - 2\theta_0 \quad (3)$$

(1), (2), (3)式より, さらに  $\Delta x = \Delta y$  とすると

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 4\theta_0 = 0 \quad (4)$$

すなわち一つの格子点の温度は回りの四つの格子点温度より計算される。

#### 2) 境界領域

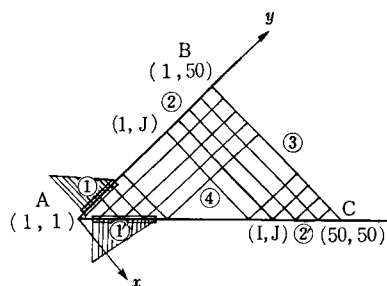


Fig. 1. ①, ① Heat source area  
②, ② Surface area  
③ Boundary area  
④ Inner area

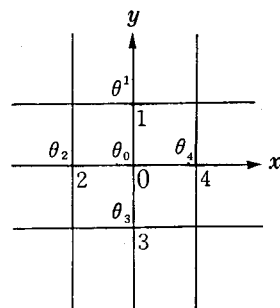


Fig. 2.

境界領域においては  $\partial\theta/\partial y=0$  であり,  $\theta_1=\theta_0$  となる。(4)式に  $\theta_1=\theta_0$  を代入し,  $\theta_1$  を消去すると次のようになる。

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 3\theta_0 = 0 \quad (5)$$

### 3) 表面領域

輻射により温度勾配が生じている表面領域において  $\theta_a$  を大気温度とすると次の微分方程式が成立する。

$$\frac{\partial\theta}{\partial p} = -h(\theta_0 - \theta_a) \quad (6)$$

ただし  $\Delta p$  は温度勾配の生じている二点間距離。  $h=\alpha/k$ ,  $\alpha$  は表面熱伝達率,  $k$  は熱伝導率

#### a) すくい面

(6) 式を差分方程式で示すと  $(\theta_2 - \theta_4)/2\Delta x = -h(\theta_0 - \theta_a)$  となり, この式を (4) 式に代入して  $\theta_2$  を消去すると次のようになる。

$$\frac{\theta_1 + \theta_3 + 2\theta_4 + 2h \cdot \Delta x \cdot \theta_a}{4\left(1 + \frac{h \cdot \Delta x}{2}\right)} - \theta_0 = 0 \quad (7)$$

格子点 (1, 50) は表面領域でありかつ境界領域であるために特別に差分方程式を求める必要がある。境界領域においては  $\theta_0 = \theta_1$  であるから (7) 式に代入して  $\theta_1$  を消去すると次のようになる。

$$\frac{\theta_3 + 2\theta_4 + 2h \cdot \Delta x \cdot \theta_a}{4\left(1 + \frac{h \cdot \Delta x}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{1}{4\left(1 + \frac{h \cdot \Delta x}{2}\right)} \right\} - \theta_0 = 0 \quad (8)$$

#### b) にげ面

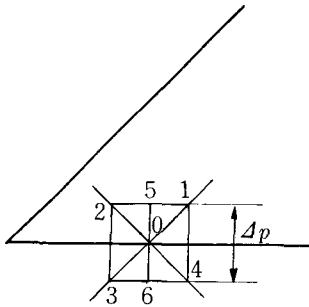


Fig. 3.

この領域においては Fig. 3 に示す如く領域内に入っている格子点は 1, 2 のみであるから  $\theta_0$  を  $\theta_1$  と  $\theta_2$  で表わす必要がある。そのため格子点 3, 4 の間に格子点 5, 6 を作り,  $\theta_5 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ ,  $\theta_6 = (\theta_3 + \theta_4)/2$  のように示されるとすると (6) 式は次のように変形される。

$$\frac{\theta_6 - \theta_5}{\Delta p} = \frac{\theta_3 + \theta_4 - \theta_1 - \theta_2}{2\Delta p} = -h(\theta_0 - \theta_a) \quad (9)$$

ただし  $\Delta p$  は格子点 5, 6 の間隔であり  $\Delta p = \sqrt{2} \cdot \Delta x$  となる (4), (9) 式より  $\theta_3, \theta_4$  を消去すると

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2 + h \cdot \Delta p} + \frac{h \cdot \Delta p \cdot \theta_a}{2 + h \cdot \Delta p} - \theta_0 = 0 \quad (10)$$

格子点 (50, 50) は表面領域かつ境界領域であるから,  $\theta_1 = \theta_0$  を (10) 式に代入すると

$$\frac{\theta_2 + h \cdot \Delta p \cdot \theta_a}{(2 + h \cdot \Delta p) \left(1 - \frac{1}{2 + h \cdot \Delta p}\right)} - \theta_0 = 0 \quad (11)$$

### 4) 発熱領域

#### a) すくい面

すくい面発熱領域についての微分方程式は次式のようになる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} \quad (12)$$

ただし  $\partial\theta_1/\partial t$  は単位時間あたりの発熱量,  $K$  は工具の熱伝導率,  $F_1$  は発熱面積である。

(12) 式を差分方程式に変換すると

$$\frac{\theta_2 - \theta_4}{2 \cdot \Delta x} = - \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} \quad (13)$$

(4), (13) 式より  $\theta_2$  を消去すると

$$0.25(\theta_1 + \theta_3) + 0.5\theta_4 - 0.5 \cdot \Delta x \cdot \partial\theta_1/\partial t \cdot 1/KF_1 - \theta_0 = 0 \quad (14)$$

b) にげ面

にげ面発熱領域についての微分方程式は次式のようにになる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial p} = - \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} \quad (15)$$

ただし  $\partial\theta_2/\partial t$  は単位時間あたりの発熱量,  $K$  は工具の熱伝導率,  $F_2$  は発熱面積である。

表面領域の項でのべた如く Fig. 3 に示される格子点 5, 6 を考えると (15) 式は次のように変換される。

$$\frac{\theta_6 - \theta_5}{\Delta p} = - \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} \quad (16)$$

$\theta_5 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ ,  $\theta_6 = (\theta_3 + \theta_4)/2$  を (16) 式に代入し, (4), (16) 式より

$$\theta_1 + \theta_2 - \Delta p \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} - 2\theta_0 = 0 \quad (17)$$

格子点 (1, 1) はすくい面とにげ面より熱が与えられる。

Fig. 4 における格子点 0 の温度  $\theta_0$  を  $\theta_1$  のみで表わす必要がある。

(16) 式より

$$\frac{\theta_4 - \theta_1}{\Delta p} = - \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} \quad (18)$$

(13) 式より

$$\frac{\theta_2 - \theta_4}{2 \Delta x} = - \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} \quad (19)$$

(18), (19) 式より

$$\theta_2 = \theta_1 - \Delta p \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} - 2 \Delta x \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} \quad (20)$$

$\theta_5 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ ,  $\theta_6 = (\theta_3 + \theta_4)/2$  ならびに (16) 式より

$$\theta_3 = \theta_1 - 2 \Delta x \cdot \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} - 2 \Delta p \cdot \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} \quad (21)$$

(4), (18), (20), (21) 式より  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  を消去すると

$$\theta_1 - \Delta x \cdot \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_1} - \Delta p \cdot \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \cdot \frac{1}{KF_2} - \theta_0 = 0 \quad (22)$$

## 2.2 計算法

上述したように工具を 1275 個の格子点に分割して, それらを発熱領域, 表面領域, 境界領域, 領域内, ならびに三つの特異点に分ける。次にそれぞれの領域について境界条件を定め, 各格子点について差分方程式を作成し, し緩法によってこれらの差分方程式を解いて各格子点の温度を

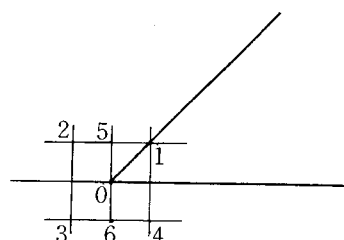


Fig. 4.

定め、工具の温度分布を求める。

領域内を例にとるとまず格子点温度  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  を任意に与え、この  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  と (4) 式により格子点 0 の新しい温度を計算して、先に任意に与えた  $\theta_0$  との差 (残差)  $R$  を計算する。すなわち

$$R = 0.25(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - \theta_0 \quad (23)$$

次にこの残差  $R$  を用いて格子点 0 の第一回修正値  $\theta_0^1$  を求める。

$$\theta_0^1 = \theta_0 + kR \quad (24)$$

ただし  $k$  は  $1 \leq k \leq 2$  なる定数。

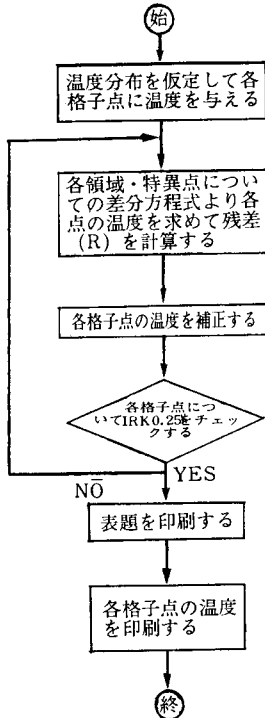


Fig. 5.

各格子点について上の操作をくり返して第一回目の温度分布の修正を行なう。以上のような修正操作を順次くり返して温度分布を修正する。たとえば  $n$  回目の修正において残差  $R$  は次のように示される。

$$R = 0.25(\theta_1^{n-1} + \theta_2^{n-1} + \theta_3^{n-1} + \theta_4^{n-1}) - \theta_0^{n-1} \quad (25)$$

$$\theta_0^n = \theta_0^{n-1} + k \cdot R \quad (26)$$

ただし  $\theta_0^{n-1}$  は第  $(n-1)$  回目の修正における格子点温度である。

このような計算をくり返すことにより、各格子点についての残差  $R$  がある値  $C$  以下に収束すれば ( $k \leq |C|$ ) その段階における温度分布が求める温度分布であり、 $|C|$  の値が零に近い程計算精度は高くなる。本計算においては、 $C = \pm 0.25^\circ\text{C}$   $k = 1.2$  として電子計算器 KDC II により計算した。プログラム作成のための流れ図は Fig. 5 に示されている。

### 3. 温度分布計算例

計算に用いるデータは次の如くである。切削条件 (切削幅 10 mm, 切り込み量 0.25 mm), 工具条件 (工具材質 SKS 4 すくい角  $30^\circ$ , 逃げ角  $15^\circ$ , 熱伝導率  $(K)$ : 31 kcal/mh $^\circ\text{C}$ , 工具比熱  $(C)$  0.11 kcal/kg $^\circ\text{C}$ , 工具密度  $(\rho)$  0.0078 gr/mm $^3$ ) 切削抵抗 (主分力 9kg, 背分力 1kg), 外気温  $(\theta_a)$   $20^\circ\text{C}$ , 格子間隔  $\Delta x = \Delta y = 0.05$  mm

発熱量は切削所要動力 (主分力  $\times$  速度) が全部熱に変わり、それが工具, 母材, 切屑にあたえられるものとし、夫々えの割合は文献 (7) の分割係数を用いた。

熱は Fig. 1 に示したように三角形分布をするものとした。

3.1 発生した熱をすくい面と逃げ面に分割し、熱が各面において三角形分布しており切くずが刃先から接触している場合。ただし切削速度 3 m/sec, 工具表面熱伝達率  $(\alpha)$  100 kcal/m $^2\text{h}^\circ\text{C}$ , 工具一切くず接触長さ 0.5 mm, 工具一被削材接触長さ 0.5 mm として熱の三角形分布は文献 (7) に従って計算した。結果は Fig. 6 に示されている。

3.2 (3.1) において切削速度を 40 m/sec, にした場合 (Fig. 7)

3.3 折れ型の切くずが発生し、刃先近くのすくい面では切くずと工具が接触していない場合。ただし切削速度 40 m/sec, 工具表面熱伝達率 100 kcal/m $^2\text{h}^\circ\text{C}$ , すくい面熱源長さ 0.75 mm, 逃げ面熱源長さ 1.00 mm, すくい面上刃先から切くず一工具接触点までの距離 0.2 mm, とする。(Fig. 8)

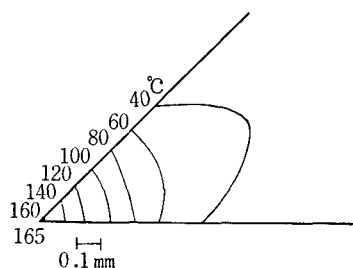


Fig. 6.  $V=3\text{m/sec}$ ,  $\alpha=100\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

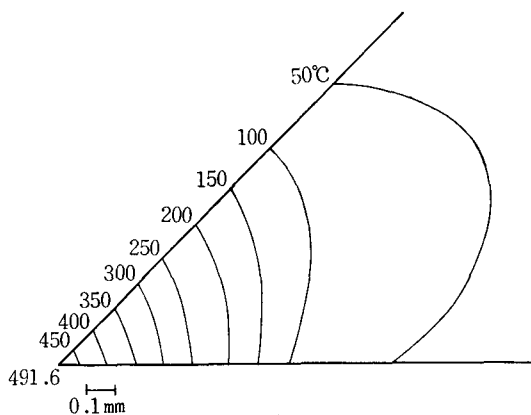


Fig. 7.  $V=40\text{m/sec}$ ,  $\alpha=100\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

3.4 (3.3) において、刃先付近のすくい面熱伝達率 ( $\alpha$ ) を  $30\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$  とした場合。(Fig. 9)

#### 4. 結 言

以上のように計算によって工具の温度分布を求めると、各因子の温度分布に与える影響を理論的に知ることが可能になり、本計算の結果によると、刃先における温度は  $500^\circ\text{C}$  近くになっている。

今後は実験的に温度分布を実測して理論値と比較し、計算に用いた種々の仮定を修正する必要がある。

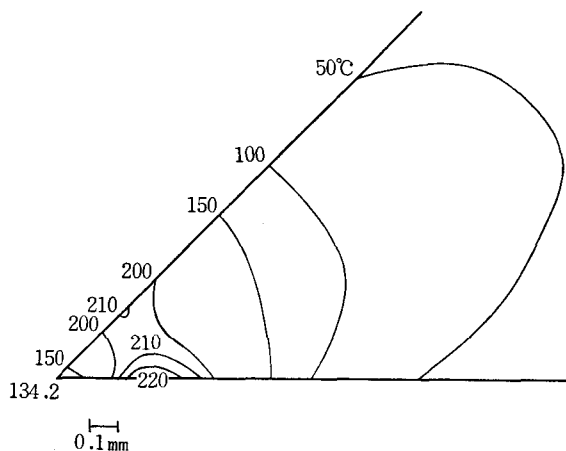


Fig. 8.  $V=40\text{m/sec}$   $\alpha=100\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

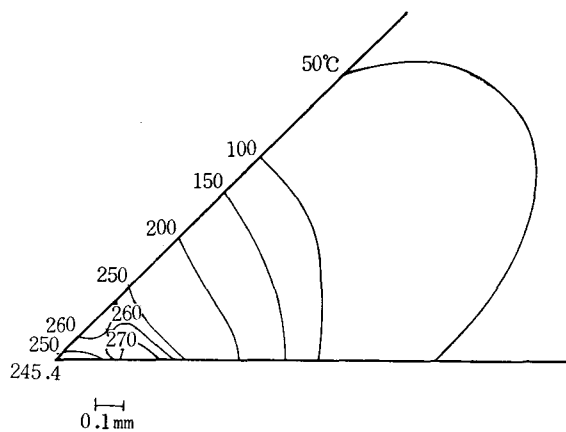


Fig. 9.  $V=40\text{m/sec}$   $\alpha=30\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

## 引用文献

- 1) 奥島俊介・杉原彦一：木材誌，**15**, 197, (1969)
- 2) Shore, H.: M. I. T. thesis, (1924)
- 3) Gottwein, K.: Maschinenbau, **4**, 1129, (1925)
- 4) Pahlitzsch, G. und Jostmeier, H.: Moderne Holzverarbeitung, **1**, 186, (1966)
- 5) Pahlitzsch, G. und Dziobek, K.: Holz als Roh-, **26**, 162, (1968)
- 6) Trigger, J. and Chao, B. T.: Trans. A. S. M. E. **73**, 57, (1951)
- 7) Loewen, E. G. and Shaw, M. C.: Trans. A. S. M. E. **76**, 217, (1954)
- 8) Emmons, H. W.: Trans. A. S. M. E. **64**, 607, (1943)
- 9) Chao, B. T. and Trigger, K. J.: Trans. A. S. M. E. **77**, 1107, (1955)
- 10) Chao, B. T. and Trigger, K. J.: Trans. A. S. M. E. **80**, 311, (1958)
- 11) 赤坂 隆：応用数学講座 7, コロナ社 (1967)
- 12) 甲藤好郎：応用力学講座 20, 共立出版, (1967)
- 13) Boothroyd, G.: British Jou. App. Physics, **12**, 238, (1961)

## Résumé

It is difficult to find the temperature distribution of wood-cutting tool under operation. Here, one method, by which the temperature distribution of cutting tool in stationary states can be calculated, is shown.

Namely, the differential equation is solved approximately by iterative method. For instance, it is noticed that the temperature of the tool-cusp in stationary states is to be about 500°C, when the cutting speed is 40 m/sec.