

A. C. Best の式の定量的林分解析への適用について (I)

山倉 拓夫・四手井 綱英

On the Application of the BEST's Function to Quantitative Analysis
of Forest Ecosystem (I)

Takuo YAMAKURA and Tsunahide SHIDEI

目 次

要 旨	124	4. 母数の性質	135
はじめに	125	5. おわりに	136
1. Best の式の紹介と問題点	125	引用文献	137
2. Best の関数の変形と森林における 適用	127	Résumé	137
3. Best の変形式の諸性質と問題点	132	表-2; Best の変形式の計算法	138

要 旨

1. A. C. Bestの式^{1),2)} —(1)を紹介し, $x \rightarrow x_{\max}$ の時点で生ずる欠点を指摘した。

$$1 - F = \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^n \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$F = \frac{\sum_{x=\min}^x w_x}{\sum_{x=\min}^{\max} w_x}$$

x ; 空气中を浮遊する水滴粒子の直径。次元は [L]

x_{\min} ; x の下限値。次元は [L]

x_{\max} ; x の上限値。次元は [L]

w_x ; x が x である大きさの水滴の個体重

2. Best の式の森林における展開を試み, 次の Best 関数の変形式が森林に適用されることを確認した。

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n + \beta \dots\dots\dots (3)$$

$(y/\bar{H})_{\max}$: 平均的な意味における森林の y/\bar{H} の上限値。次元は $[ML^{-3}]$ 。ここではその値を $20 \text{ ton/ha}\cdot\text{m}$ と仮定

y ; 森林の現存量。次元は $[ML^{-2}]$

y_D ; 胸高直径が $D \text{ cm}$ 以下の個体によって構成される部分現存量。次元は $[ML^{-2}]$

\bar{H} ; 森林の上層木の平均樹高。次元は $[L]$

D ; 樹木個体の胸高直径。次元は $[L]$

a, n ; 定数

3. (2), (3) 式の諸性質について検討した。
4. 母数 a, n, β について簡単な検討を試みた。
5. 今後の諸問題と Best の式の有効性を指摘した。

はじめに

森林はそれを構成する個々の立木の集合として把握される。この立木個体の集合としての森林の現状を定量的に記述し、類形化することを目的とした場合、その目的にかなう方法としては色々な視点にもとづく色々な方法が考えられるであろう。たとえば「林業的施業形態からの解析」、
「森林を構成する生物の種類組成の解析」、
「平面空間における個体の分布様式の解析」、
「胸高直径、樹高など連続量の分布の解析」などはその一例である。

近年、IBP を中心にして、物質生産をはじめとした森林の定量的解析が盛んに行なわれている。この種の物質生産の立場に立った諸研究の中で上記の目的と関連のある特筆すべき業績としては、穂積・篠崎^{3),4),5)}による「林分状態をなす樹木個体重の頻度分布」に関する一連の研究、小川⁶⁾による「樹高・胸高直径関係による林型区分の試み」の研究などを枚挙することができる。ここでは、このような先行する諸研究と類似するものではあるが、森林の連続量の現状記述として非常に簡単でしかも便利であると思われる A. C. Best (1949) の提案した定量的表示の方法について紹介し、その適用に際しての Best の式の変形と、その諸問題について森林生態学的立場からの検討を試みる。

1. Best の式の紹介と問題点

気象学の領域において、雨滴や霧滴をめぐる諸問題は古くから重要な問題として論議されてきた。A. C. Best は雨滴、霧滴および雲を構成している微細な水の粒子の動態を考察した結果、空气中に浮遊している水の粒子の直径の分布の概略をあらわす式として次の (1) 式の関数形を持つ実験式が広く一般的に成立することを確認した^{1),2)}。

$$1 - F = \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^n \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$F = \frac{\sum_{x=\text{min}}^x w_x}{\sum_{x=\text{min}}^{\text{max}} w_x}$$

w_x ; 空气中に浮遊している水滴で直径が x である水滴粒子の重さ。次元は $[M]$

x ; 空气中に浮遊している水滴粒子の直径。次元は $[L]$

x_{\max} ; x の上限値。次元は $[L]$

x_{\min} ; x の下限値。次元は $[L]$

F ; 空気中に浮遊している水滴粒子で直径が x 以下のものの合計重量が、全体の水滴重量中に占める割合、すなわち重量をもとにした分布関数。次元は $[ML^{-3}/ML^{-3}]$

a ; 空気中に浮遊している水滴粒子の状態によって定まる定数

n ; 空気中に浮遊している水滴粒子の状態によって定まる定数

(1)式より

$$\log \log_{10} \left(\frac{1}{1-F} \right) = n \log_{10} x - n \log_{10} a - 0.3622 \dots \dots \dots (2)$$

(2)式は両対数グラフを用いて縦軸に $\log_{10} \{1/(1-F)\}$ 横軸に x を取ると両者の間に直線関係の成立することを示している。この場合母数 n, a はそれぞれ、回帰直線の傾きとたちあがりの値によって決定される。しかしながら現実的には(2)式のような $\log_{10} \{1/(1-F)\} \sim x$ 関係の両対数グラフ上における直線回帰は上限値から下限値にいたる x の全域に渡って考慮した場合には明らかに成立しない。なぜならば x が次第に x の上限値 x_{max} に近づくにつれて $\log_{10} \{1/(1-F)\}$ の値は次第に大きくなり系統的に直線回帰から分離する傾向を示し、 $\{x=x_{max}\}$ の所では $\log_{10} \{1/(1-F)\}$ の値は無限大になり、両対数グラフ上でその位置を定めることは不可能になる。すなわち

$x \rightarrow x_{max}$. すなわち $F \rightarrow 1$ の時

$$\log_{10} \{1/(1-F)\} \rightarrow \infty \dots \dots \dots (3)$$

(3)のように F が次第に 1 に近づき、その結果(2)式によって表示される両対数グラフ上における $\log_{10} \{1/(1-F)\} \sim x$ 関係の直線回帰が乱れてくる現象は、Best の資料によれば $F \approx 0.95$ 付近から生じてくる。そして Best はその論文の中では $F \leq 0.95$ 位までの領域内の値をグラフ上にプロットしているが、 $F > 0.95$ の領域においてはプロットをせずに資料を無視し、直線回帰を決定し、

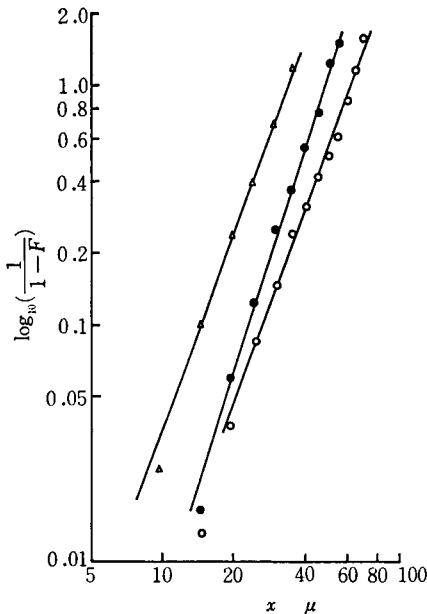


Fig. 1. BEST's diagram for size distribution of fog drops. (Redrawn after Kozima⁷⁾ et al.)

母数 n, a を求めている。図-1は K, Kozima⁷⁾ の論文中的のグラフを写真によって拡大した後に引用したものであるが、この図-1においても Best の場合と同様なことがいえるであろう。したがって Best の式の2つの母数の決定に際し、厳密な意味において n, a の妥当な値を、両対数グラフ上の操作によって x の全域 $[x_{min} \sim x_{max}]$ をおおうように求めることは不可能となることが理解されよう。このことは実験式としての(1)式の値を低くするものである。また分布関数としても、計量値の全域をおおうように母数を定めるための簡便な方法がないことは不利な現象である。このようなことに注目するならば、何らかの方法で(1)式の変形を行なうことにより $x \rightarrow x_{max}$ の際に生ずる不利な点を除去する必要があることが理解される。その変形の方法としては(1)式の左辺を操作する道と、(1)式の右辺を操作する道が考えられる。その際、(1)式の左辺を変形することは、厳密な意味における分布関数としての Best の式の本来の意味を消失させてしまうものであることを理解しておかなければならない。

森林における Best の式の適用にあたり、ここでは(1)式の左辺を操作する道を採用し、 $x \rightarrow x_{\max}$ の際に生ずる(3)式の現象を避けることを考えることにする。なおそれに際し留意したことは、物質生産関係の仕事では両対数グラフが広く用いられていることを考えて、両対数グラフによって母数を決定する Best の式の簡便さを失なわないようにすることである。

2. Best の函数の変形と森林における適用

われわれは一般に森林を林木と林地を含めたものと解している。林木とは多年生の本木植物が集合している状態を示す。林木は地上の高い部分に芽を持ち、生育の不適期においても幹、枝、葉、根などは枯死することなく、毎年新しい幹や枝葉が伸びて長い間生き続ける。すなわち森林は水平的には一定の土地面積を、垂直的には一定の高さを長期間に渡って支配し続ける。したがって森林は一定の高さと一定の土地面積によって決定される一定の立体空間を支配することになる。

ここで Best の式の森林における適用にあたり次の(4)、(5)式であらわされる、 $y_x, y_x/\bar{H}$ を定義する。

$$y_x = \sum_{x=\min}^x w_x \dots\dots\dots(4)$$

x ; 樹木の任意部分の大きさ。次元は任意

w_x ; 樹木の任意部分の大きさ x がある個体の個体重。次元は $[M]$

y_x ; 樹木の任意部分の大きさが x より小さい個体によって構成される森林の部分現存量。次元は $[M \cdot L^{-2}]$

$$\frac{y_x}{\bar{H}} [ML^{-3}] \dots\dots\dots(5)$$

\bar{H} : 森林において上層を占める樹木の平均樹高。次元は $[L]$

(5)式の量はその次元より明らかであるように、上述の森林の支配している立体空間あたりの樹木の現存量を示している。すなわち(5)式は樹木の任意部分の大きさが x より小さい個体によって構成されている一種の森林の部分物質密度を示している。

ここで森林における y/\bar{H} の上限を仮定し、その値を $(y/\bar{H})_{\max} [ML^{-3}]$ と置くと(4)、(5)式の定義を用いて、(1)式の左辺 $(1-F)$ のアナロジーとして、次の(6)式を考えることができる。すなわち

$$\frac{(y/\bar{H})_{\max} - y_x/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{次元は } \frac{[ML^{-3}]}{[ML^{-3}]}$$

(1)式において $(1-F)$ は水滴の直径が x 以上のものが水滴全体の合計重中で占める確率を示している。この表示は穂積・篠崎による MNY 法^{3),4),5)}の展開過程で定義された概念とまったく同形である。しかし分布関数としての意義は消滅するが、新らしく定義された(6)式において、 $\{(y/\bar{H})_{\max} - y_x/\bar{H}\} / \{(y/\bar{H})_{\max}\}$ は樹木の任意部分の大きさが x より小さいものによって構成される y_x/\bar{H} (一種の物質密度) が $(y/\bar{H})_{\max}$ に対して、どれくらい差を持つかということを示したものと見えよう。すなわちこのことを拡張して解釈すれば(6)式は、任意部分の大きさが x より小さい個体の空間の利用の程度をあらわしていると考えられるであろう。

ところで森林の y/\bar{H} の上限値 $(y/\bar{H})_{\max}$ の値はいったいどれくらいの大きさであろうか。生態学的に森林と認められるためには、木本植物集団を構成している樹木がある高さ以上の樹高を持たなければならない。四手井によれば、一般的にこの高さを明確に決めることはできないが、平均樹高を用いた場合にその大きさを約 5m 前後としている。これは顔や手を林冠に触れることなく、人が自由に林内を歩ることができるといえるような高さである。森林の高さに上層木の平均樹高を取って y/\bar{H} の値を求めると、その値は平均樹高 \bar{H} が増大するにつれて、はじめは急激に減少するが、ある大きさの平均樹高を過ぎると、ほぼ一定の値をとるようになる。この時の \bar{H} の値は約 5m 前後で、前述の視覚的な意味で森林といわれるような木本植物の集団の高さの下限値と一致する。すなわち森林といわれるような木本植物の集団の物質密度 y/\bar{H} (ここで使われている y は(4)式で使われている表示に従えば $y = \sum_{x=\min}^{\max} w$) は \bar{H} の大きさにかかわらず非常に安定した値をとるようである。KIRA, SHIDEI⁹⁾によれば、この安定した y/\bar{H} の値は平均 13 ton/ha・m になるとしている。また菅⁹⁾は森林の蓄積の度合を示す指数として、幹現存量 (y_s ; ton/ha) を \bar{H} で除した値 (y_s/\bar{H} ; ton/ha・m) を考えた。そして y_s/\bar{H} の値の上限を各樹種について推定しているが、その結果は表-1 のようになる。それによれば我国で普通にみられる森林のうち、最大の

Table 1. Maximum value of stem density (y_s/\bar{H} ; ton/ha m) in several forests ecosystems. (From Kan,⁹⁾ M.)

Tree species	y_s/\bar{H} ton/ha m
<i>Cryptomeria japonica</i> D. Don	14
<i>Chamaecypharis obtusa</i> Sieb. et Zucc.	14.9
<i>Pinus densiflora</i> Sieb. et Zucc.	11.0
<i>Larix leptolepis</i> Gordon	6.4
<i>Castanopsis cuspidata</i> Schottky	13-14
<i>Quercus phyllinaeoides</i> A Gray etc.	14-15
<i>Camellia japonica</i> L. etc.	12-14
<i>Fugus crenata</i> Blume	14-16
<i>Quercus crispula</i> Blume	9-14
<i>Fraxinus mandshurica</i> Rupr. var.	5.6-8.6

y_s/\bar{H} の値はブナ林の 14~16 ton/ha・m である。森林の y/\bar{H} を考える時、幹のみならず、枝や葉、場合によっては下層の植生なども含めなければならない。したがって y/\bar{H} の値は表-1 の菅の推定値 y_s/\bar{H} の値よりはすこし大きくなるであろう。しかしながら幹の蓄積が増大するほど枝や葉の量は少なくなるという現象が今までの研究において判明しているから第一次近似と

しては菅の y_s/\bar{H} の推定値をそのまま y/\bar{H} の上限値としても良いかも知れない。しかしながら、かなりの余裕をみて、ここでは y/\bar{H} すなわち、みかけの森林の物質密度、の上限を便宜的に 20 ton/ha・m と仮定する。すなわち

$$(y/\bar{H})_{\max} \simeq 20 \text{ ton/ha}\cdot\text{m} \dots\dots\dots(7)$$

$(y/\bar{H})_{\max}$; 従来の経験より推測され得る、有占樹木の平均樹高あたりの森林の現存量の上限値。次元は $[ML^{-3}]$ である。なおこの量はみかけの森林の物質密度を示している定数と考えられる。

y ; (4) 式の表示によれば $\sum_{x=\min}^{\max} y_x$ の意味を持つ。すなわち森林の現存量で次元は $[M\cdot L^{-2}]$ ここで(6), (7)式の定義より(6)式は次のように書き変えられる。

$$\frac{20 - y_x/\bar{H}}{20} \dots\dots\dots(8)$$

しかるに、今 x として胸高直径 (D ; cm) をとると、本報告の最後にかかげる表-2 の計算例のように、 D の順序統計において、おのおのの大きさの D に対応する(8)式の値を決定することができる。そして両対数グラフを用いて、(8)式の逆数の常用対数、 $\log_{10} [20/(20 - y_D/\bar{H})]$ を縦軸に、胸高直径 D を横軸にとると、図-2~図-6 にみられるようになる。なおグラフ上で D を n 乗し

であるのは点のバラツキを大きくして回帰の状態を良く知るためである。

図-2は北海道のミズナラ林の資料によるものである。この資料は $10 \times 10 \text{ m}^2$ の調査地の中に生存している全個体を伐倒することによって得られたものである。この林分の平均樹高は11.58m, 最大胸高直径は16.4 cm, 最小胸高直径は3.8 cm となっている。また $y_{D=\max}/\bar{H}$ の値は8.4 ton/ha・m となる。図から明らかなように D の小さい所において、点のバラツキが大きい、 D が大きい値に近づくに従ってかなり良い直線回帰が成立する。

図-3は四大学合同調査の人吉地方のコジイ林6林班と小班の状態を示している。この林分の上層木(コジイ, カシ類, タブ)の、 $D-H$ 関係により推定した $D=2 \text{ cm}$ から $D=21 \text{ cm}$ までの平均樹高は9.35 m, $y_{D=\max}/\bar{H}$ の値は18.79 ton/ha・m となっている。かなり良い直線回帰が成立するもようである。

図-4は四大学合同調査の長野県和田地方137林班のカラマツ林(全伐Plot)の状態を示している。平均樹高の値は8.71m, の $y_{D=\max}/\bar{H}$ 値は6.70 ton/ha・m となっている。この図においては、点のバラツキが大きい、大雑把にみれば直線回帰が成立すると考えられる。

図-5は滋賀県日野地方30年生ヒノキ人工林の状態を示している。この林分の平均樹高は10.42 m, $y_{D=\max}/\bar{H}$ の値は13.37 ton/ha・m となっている。なおこの林分についてのみ、計算例としてその資料の細目を本報告の終りに掲げる。前の図-1から図-4においては直線回帰が成立していたが、この図-5においては、図-1～図-4の場合と異なり、 $\log_{10}\{20/(20-y_D/\bar{H})\}$ と D の間で逆数式で近似される関係の成立していることがわかる。

図-6は滋賀県日野地方の40年生ヒノキ人工林の状態を示している。この林分の平均樹高は15.94 m, $y_{D=\max}/\bar{H}$ の値は16.45 ton/ha・m となっている。この林分についても、回帰は直線とはならずR-G Ruleで近似される曲線回帰が成立している。

図-2～図-6において明らかなように、両対数グラフ上における $\log_{10}\{20/(20-y_D/\bar{H})\} \sim D$ 関

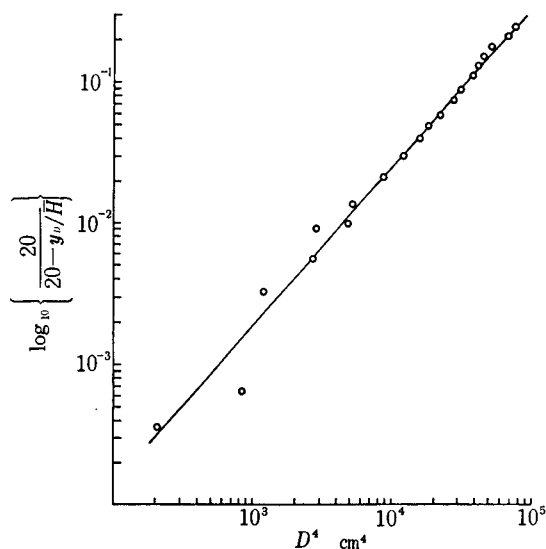


Fig. 2. BEST's diagram showing relation between (y_D/\bar{H}) and tree diameter at breast height in *Quercus mongolica* Fish stand.

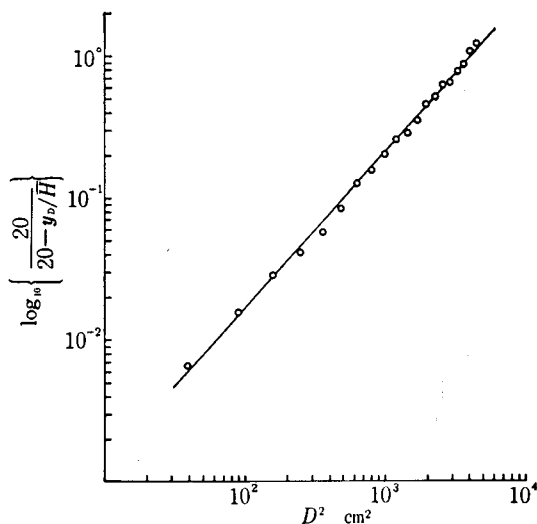


Fig. 3. BEST's diagram showing simple relation between (y_D/\bar{H}) and tree diameter at 1.3m above ground in *Castanopsis cuspidata* Schottky stand.

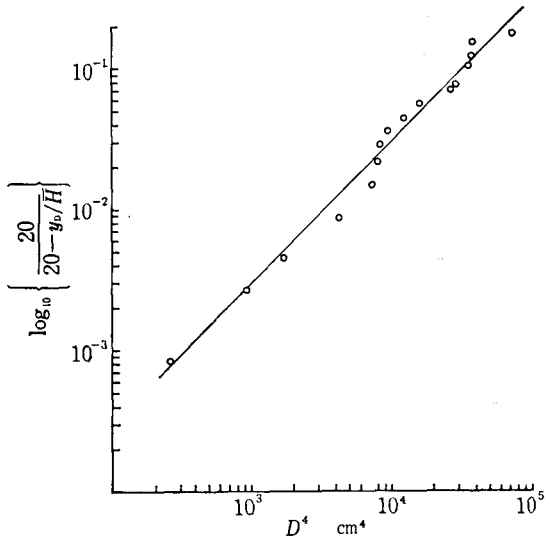


Fig. 4. BEST's diagram indicating relation between (y_D/H) and tree diameter at 1.3 m above ground level in *Castanopsis cuspidata* Schottky stand.

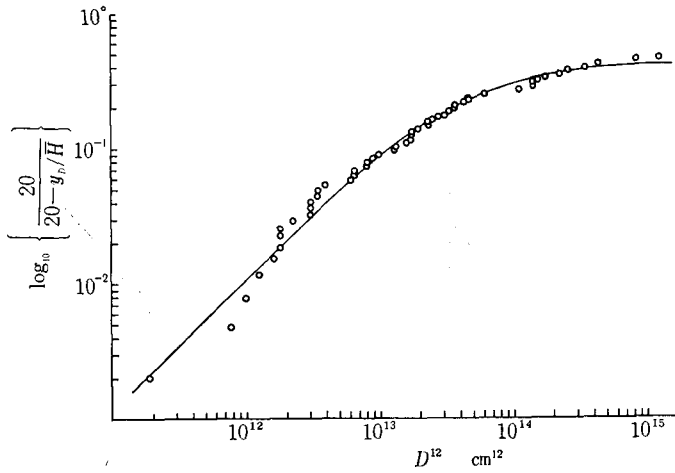


Fig. 5. BEST's diagram showing hyperbolic relation between (y_D/H) and tree diameter at breast height in *Chamaecyparis obtusa* stand of 30-years-old.

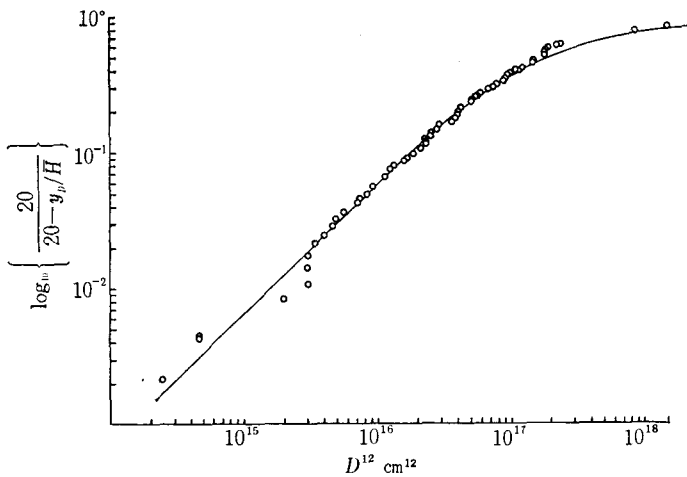


Fig. 6. BEST's diagram indicating asymptotic relation between integral equation— (y_D/H) and tree diameter at 1.3 m above ground in *Chamaecyparis obtusa* stand of 40-years old.

係には2つの型の回帰関係が成立する。その一つは図-2～図-4にみられるような直線回帰であり、他の一つは図-5と図-6にみられるようなR-G定規で近似される曲線回帰である。このうちR-G定規で近似されるものはBestが空气中に浮遊する水滴の粒子の資料で確認した現象と異なっている。しかしこの曲線回帰現象は(6)式の分母に $(y/\bar{H})_{\max}$ をとり、しかもその値を(7)式のように20 ton/ha・mと仮定したために生じた現象であって、Best函数の範疇をはみ出る現象ではない。この逆数式によるBest関数の近似は、数学的には十分に予測される回帰現象である。図にみられるように、回帰の程度としては、回帰線上に良く資料がのらないものもあるが、第一次近似としては、たいていの森林においてかなりの良い回帰が成立するようである。今、この二つの型の回帰式を次のような(9)、(10)式の関数形で表現することができる。すなわち

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n + \beta \dots\dots\dots(10)$$

D ; 森林を構成する樹木の胸高直径。単位は cm

y_D ; x として D を用いた時の y_x の値で胸高直径が D cm以下の個体によって構成される部分現存量。単位は ton/ha

$(y/\bar{H})_{\max}$; ここでは 20 ton/ha・m と仮定

α ; 森林の状態によって定まる定数

β ; 森林の状態によって定まる定数

n ; 森林の状態によって定まる定数

ここで $(y/\bar{H})_{\max} = 20 \text{ ton/ha} \cdot \text{m}$ と仮定した時の、図2から図-6における回帰を求めると次のようになる。

北海道ミズナラ林 (図-2)

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{20}{20 - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{22.94}{D} \right)^{4.4996}$$

人吉地方コジイ林 (図-3)

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{20}{20 - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{20.20}{D} \right)^{2.2252}$$

和田カラマツ林 (図-4)

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{20}{20 - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{26.60}{D} \right)^{4.0000}$$

日野地方30年生ヒノキ林 (図-5)

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{20}{20 - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{14.60}{D} \right)^{12.0} + 2.4600$$

日野地方40年生ヒノキ林 (図-6)

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{20}{20 - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{27.18}{D} \right)^{12.0} + 1.1628$$

3. Best の変形式の諸性質と問題点

上述の、森林において適用された Best の式、すなわち (9)、(10) 式を以後 Best の変形式と呼ぶことにする。ここでは前項の 2 で述べたことについて弱干の検討を加えながら、Best の変形式について検討する。

(9)、(10) 式より

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = \exp \left[-2.303 \left(\frac{D}{\alpha} \right)^n \right] \dots\dots\dots (11)$$

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = \exp \left[-2.303 \left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n} \right) \right] \dots\dots\dots (12)$$

ここで定義より (11)、(12) 両式の左辺は次のようになる。すなわち

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = 1 - \frac{\sum_{D=\min}^D w_D}{\bar{H} \cdot (y/\bar{H})_{\max}} \dots\dots\dots (13)$$

ここで $(y/\bar{H})_{\max}$ は定数であり、 \bar{H} も森林が定まれば一意的に定まるから (14) 式の分母、 $\bar{H} \cdot (y/\bar{H})_{\max}$ はその森林において物質の蓄積が最高度に達した段階を仮定した場合の森林の現存量の意味を持つ一種の定数と考えることができる。そこで次の δ を定義する。

$$\delta = \bar{H} \cdot (y/\bar{H})_{\max} - \sum_{D=\min}^{\max} w_D \dots\dots\dots (14)$$

(13)、(14) 式より

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = 1 - \frac{\sum_{D=\min}^D w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta} = 1 - \frac{\sum_{D=\min}^D w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \left(1 + \frac{\delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \right)^{-1} \dots\dots (15)$$

ここで次の二項展開を考える

$$\left(1 + \frac{\delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \right)^{-1} = 1 - \frac{\delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} + \left(\frac{\delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \right)^3 \dots\dots (16)$$

(16) 式を (15) 式に代入して

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = 1 - \frac{\sum_{D=\min}^D w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} + \frac{\delta \sum_{D=\min}^D w_D}{\left(\sum_{D=\min}^{\max} w_D \right)^2} - \frac{\delta^2 \sum_{D=\min}^D w_D}{\left(\sum_{D=\min}^{\max} w_D \right)^3} + \frac{\delta^3 \sum_{D=\min}^D w_D}{\left(\sum_{D=\min}^{\max} w_D \right)^4} \dots\dots (17)$$

しかるに、ここで一般に分布関数の求め方について考察すると

今、個体重の大きさが $[w, w+dw]$ の区間にある個体数の全個体数に対する割合を $f(w)dw$ と

する。すなわち

$$\frac{\sum_{w_i=w}^{w+dw} Nw_i}{\sum_{w_i=0}^{\infty} Nw_i} = f(w)dw$$

また $[w, w+dw]$ の区間の個体重の全個体重に対する割合を $g(w)dw$ とする。すなわち

$$\frac{\sum_{w_i=w}^{w+dw} w_i}{\sum_{w_i=0}^{\infty} w_i} = g(w)dw$$

上の $f(w)dw, g(w)dw$ はその定義よりいずれも分布密度関数であるから

$$\int_0^{\infty} f(w)dw = 1$$

$$\int_0^{\infty} g(w)dw = 1$$

累積関数 $F(w), G(w)$ をそれぞれ

$$F_a(w) = \int_w^{\infty} f(w)dw$$

$$F_b(w) = \int_0^w f(w)dw$$

$$G_a(w) = \int_w^{\infty} g(w)dw$$

$$G_b(w) = \int_0^w g(w)dw$$

とおけば

$$F_a(w) + F_b(w) = G_a(w) + G_b(w) = 1$$

ここで $f(w)dw, g(w)dw, F(w), G(w)$ にどのような関数が最適であるかということが分布関数の決定の際には重要なこととなる。そこで母数を簡単に決定できる Best の変形式を分布関数の立場から考えてみる。Best の変形式が分布関数となるためには、上に述べた分布関数の定義からわかるように (17) 式において δ が非常に小さいという条件が必要である。すなわち

$$\delta \ll \sum_{D=\min}^{\max} w_D \text{ の時}$$

$$\frac{\delta^k}{\left(\sum_{D=\min}^{\max} w_D\right)^{k+1}} \simeq 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(18)$$

(18) 式を (17) 式に代入して

$$1 - \frac{y_D/\bar{H}}{(y/\bar{H})_{\max}} = 1 - \frac{\sum_{D=\min}^D w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D} \dots\dots\dots(19)$$

したがって (19) 式は明らかに $\{y_D/\bar{H}\}/(y/\bar{H})_{\max}$ が分布関数であることを示している。しかしながら $\delta \ll \sum_{D=\min}^{\max} w_D$ の時には、Best が水滴の直径分布にあてはめた際に生じた $D \rightarrow D_{\max}$ の時点でグラフ上のプロットが不可能となる現象が再現するので、 δ はかなり大きな値でなければならない事情を考えれば (9), (10), (11), (12) 式を厳密な意味で分布関数として考えることには無理が

ある。すなわち(9)～(12)式において Best の式の分布関数の意義は厳密な意味において失なわれている。したがって、この意味で Best の変形式は分布方程式としては不完全分布関数であるといえる。

今まで不完全分布方程式としての Best の変形式について検討してきたが、次に母数 n, α^n, β を決定する際にグラフ上で $\log \log_{10}\{(y/\bar{H})_{\max}\}/\{(y/\bar{H})_{\max}-y_D/\bar{H}\} \sim \log_{10} D$ 関係が δ の値によってどの程度変化するかを考察する。 $\log_{10} D$ の値は δ の大きさに無関係であるから、問題となるのは δ の値によって影響される $\log \log_{10}\{(y/\bar{H})_{\max}\}/\{(y/\bar{H})_{\max}-y_D/\bar{H}\}$ の変化だけである。そこで次の h を考える。すなわち

$$h = \log \log_{10} \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} = \log \log_{10} \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta - \sum_{D=\min}^D w_D} \dots (20)$$

h を δ で微分して

$$\frac{\partial h}{\partial \delta} = \frac{1}{\log_{10} \left(\frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta - \sum_{D=\min}^D w_D} \right)} \cdot \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta - \sum_{D=\min}^D w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta} \cdot \frac{-\sum w_D}{\left(\sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta - \sum_{D=\min}^D w_D \right)^2} \dots (21)$$

ここで次の条件を考える。すなわち

$$0 \leq \sum_{D=\min}^D w_D \leq \sum_{D=\min}^{\max} w_D + \delta \dots (22)$$

(21)式において(22)式の条件を考慮すると

$$\frac{\partial h}{\partial \delta} < 0 \dots (23)$$

従って h は δ 方向で単調に減少するが、その減少の仕方は(21)式の示すように非常に複雑である。 δ が増大するにつれて h が減少することは、グラフ上で回帰線が δ の増大にともなって下方に垂直に移動することを示している。

また繰り返していうようであるが、 $\delta \rightarrow 0$ で $D \rightarrow 0$ または $D \rightarrow D_{\max}$ の時 $\partial h / \partial \delta$ の値はそれぞれ、不能あるいは $-\infty$ となり、(1)、(2)式とそのグラフ上のプロットに際し同様な現象に陥入る。この点を修正するために、何らかの根拠のある方法があれば良いが、 δ に関する数学的な根拠を持つ情報は何も無い。したがって前項の1で述べた Best の式の欠点は δ の値を問題にした時(9)～(12)式の Best の変形式から、数学的には、完全に取除かれたわけではない。

最後に積分方程式 y_D/\bar{H} について考える。(11)、(12)式より

$$\frac{y_D}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}} \right)_{\max} \left\{ 1 - \exp \left[-2.303 \left(\frac{D}{\alpha} \right)^n \right] \right\} \dots (24)$$

$$\frac{y_D}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}} \right)_{\max} \left\{ 1 - \exp \left[-2.303 \left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n} \right) \right] \right\} \dots (25)$$

この(24)(25)式は、 y_D/\bar{H} の D 方向の積分値を D を変数にとってあらわしたものである。したがって y_D/\bar{H} の D 方向での微分形は、太さ D なる胸高直径を持つ樹木によって構成されて

いる y_D/\bar{H} の大きさを示す。

(24)式を D で微分して

$$\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD} = 2.303 \cdot \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \cdot \frac{n}{\alpha^n} \cdot D^{n-1} \cdot \exp\left[-2.303\left(\frac{D}{\alpha}\right)^n\right] \dots\dots\dots(26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2(y_D/\bar{H})}{dD^2} &= 2.303 \cdot \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \cdot \frac{n}{\alpha^n} \cdot D^{n-2} \cdot \left\{(n-1) - 2.303 \frac{n}{\alpha^n} D^n\right\} \\ &\times \exp\left[-2.303\left(\frac{D}{\alpha}\right)^n\right] \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

ここで $\frac{d^2(y_D/\bar{H})}{dD^2} = 0$ とおいて $D > 0$ の区

$$\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD}$$

間で(26)式が極値を持つ点を求めると

$$D = \alpha \left\{ \frac{1}{2.303} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}} \dots\dots(28)$$

したがって(11)式があてはまるような森林においては、太さ D なる胸高直径を持つ個体によって構成されている y/\bar{H} は(28)式であらわされる胸高直径において極大になる曲線に従うことを示している。図-7は $n=10, \alpha=10$ と仮定した時の(26)式の変化を示している。この時の $\{d(y_D/\bar{H})/dD\}$ の極大値を求めると、8.036 (ただし $(y/\bar{H})_{\max}=20 \text{ ton/ha}\cdot\text{m}$ ton/ha $\cdot\text{m}$ となり、その時の D の値は 9.118 cm となる。

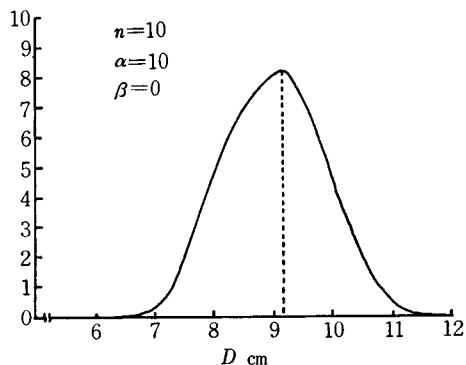


Fig. 7. A illustration indicating profile of change of differential equation— $\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD}$. In this diagram it was assumed that α, β and n were 10, 0 and 10, respectively.

(25)式を方向で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d(y_D/\bar{H})}{dD} &= 2.303 \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \cdot \frac{\alpha^n \cdot n \cdot D^{n-1}}{(\alpha^n + \beta D^n)^2} \\ &\times \exp\left[-2.303\left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right)\right] \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2(y_D/\bar{H})}{dD^2} &= 2.303 \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \cdot \alpha^n \cdot n \cdot \frac{D^{2n-2}}{(\alpha^n + \beta D^n)^4} \cdot \{(n-1) \cdot D^{-n} \cdot (\alpha^n + \beta D^n)^2 \\ &- 2\beta n \cdot (\alpha^n + \beta D^n) - 2.303 \alpha^n \cdot n\} \exp\left[-2.303\left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right)\right] \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

ここで $\frac{d^2(y_D/\bar{H})}{dD^2} = 0$ とおいて(29)式が $D > 0$ の区間で極値を持つ点を求めると

$$D = \alpha \left[\frac{-(2\beta + 2.303n) + \sqrt{(2\beta + 2.303n)^2 + 4\beta^2(n+1)(n-1)}}{2\beta^2(n+1)} \right]^{\frac{1}{n}} \dots\dots(31)$$

したがって(25)式があてはまるような森林においては、太さ D なる胸高直径を持つ個体によって構成される y/\bar{H} は $D > 0$ の範囲で $D=(31)$ 式 の値を取る時に極大値を持つ曲線(29)式に従うことを示している。

4. 母数の性質

Bestの変形式には上述のように β, n なる3つの母数が存在する。ここではこの母数について

簡単に考察する。\$n\$ は回帰線の傾き、\$\alpha^n\$ は回帰線の立ちあがり (\$D=1\$ の時の \$\log_{10}\{(y/\bar{H})_{\max}\}/\{(y/\bar{H})_{\max}-y_D/\bar{H}\}\$ の値)、\$\beta\$ は \$\log_{10}\{(y/\bar{H})_{\max}\}/\{(y/\bar{H})_{\max}-y_D/\bar{H}\}\$ の上限値によってそれぞれ決定される。上述の第2項で簡単に触れたように \$\beta\$ は第3項で述べた \$\delta\$ の影響であらわれた母数である。したがって \$\beta\$ にあまり注目してもその意義は少ないが、一応次の意味を持つ。

(10)式において \$D \rightarrow \infty\$ とおくと

$$\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_{D=\infty}/\bar{H})} \right\} = \frac{1}{\beta}$$

上式より

$$\frac{y_{D=\infty}}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}} \right)_{\max} \left(1 - \exp \left[-\frac{2.303}{\beta} \right] \right) \dots\dots\dots(32)$$

\$\beta\$ は(32)式のように意義づけられるが、\$n, \alpha^n\$ の意味は非常に複雑である。\$\alpha\$ について(28)、(31)式から直観的に想定されることは \$\alpha\$ が \$d(y_D/\bar{H})/dD\$ が極大になるような \$D\$ と深い関係を持つことである。実際、\$\alpha\$ と胸高直径の平均値との間にアロメトリ-的な関係の存在していることが判明している。すなわち

$$\alpha = A_1 \bar{D}^{h_1} \dots\dots\dots(33)$$

\$A_1, h_1\$; 定数

\$\bar{D}\$; 平均胸高直径。\$\sum_{D=\min}^{D=\max} D/N\$。単位は cm

\$A_1\$ と \$h_1\$ は \$\beta\$ があられる型の森林とあられない森林との間で違うことが判明している。\$h_1\$ はほぼ 1.0 に近いようである。

また \$n\$ については胸高直径の標準偏差と \$n\$ との間にアロメトリ-的な関係の存在していることが判明している。すなわち

$$n = A_2 \sigma^{-h_2} \dots\dots\dots(34)$$

\$\sigma_D\$; 胸高直径の標準偏差。\$\sqrt{\frac{\sum_{D=\min}^{D=\max} (D-\bar{D})^2}{N-1}}\$。単位は cm

\$A_2, h_2\$; 定数

この \$n \sim \sigma_D\$ 関係についても \$\beta\$ のあられる型の森林とあられない型の森林との間で、\$A_2, h_2\$ の分離が生じているようである。\$n, \alpha\$ の意味はそれ故にかなり複雑であるが、これらの詳しい検討は次報で試みるつもりである。

5. おわりに

今まで Best の提案した実験式について検討してきたが、最後にこの式がどのような現象に対して適用できるかを考えて終わりとする。Best の式を森林に展開する時みかけ上の物質密度 \$y/\bar{H}\$ という概念を持ち出したが、これは上層木の平均樹高あたりの現存量が \$\bar{H}\$ が 5 m 以上くらいの森林でほぼ一定値をとるという現象である。したがってこのように一定値が存在してその上限が考えられるような現象で、しかもそれを構成するものが個々の単位に分けられるような現象にこの Best の変形式は有効であろう。たとえば平面空間が色々な大きさの胸高断面積を持つ個体によって、どのように利用されているかということ考察する場合や、土壌中の団粒の大きさと空けき量の関係を考察する場合などはその例として、とりあげることができる。また森林が発達する過程をこの表示法で検討することなどは興味ある問題であろう。

本報告を作成するにあたり、大阪市立大学の小川房人・穂積和夫両博士に深く感謝申しあげる。

また京大・農・森林生態学研究室の皆様へ深く感謝申しあげる。

引用文献

- 1) Best, A. C.: The size distribution of rain drops, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **76**, 16-36, (1950)
- 2) Best, A. C.: Drop size distribution in cloud and fog, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **77**, 418-426, (1951)
- 3) Hozumi, K., Shinozaki, K. and Tadaki, Y.: Studies on the frequency distribution of the weight of individual trees in a forest stand, I, New approach toward the analysis of the distribution function and $-3/2$ th power distribution, *Jap. J. Ecol.*, **18**, (1), 10-20, (1968)
- 4) Hozumi, K. and Shinozaki, K.: Studies on the frequency distribution of the weight of individual trees in a forest stand, II, Exponential distribution, *Jap. J. Ecol.*, **20**, (1), 1-8, (1970)
- 5) 穂積和夫: 林分状態をなす樹木個体重の頻度分布; 森林の一次生産測定法の研究班中間報告, 90~94, JIBP-PT-F, (1967)
- 6) 小川房人: 樹高胸高直径関係による林型区分の試み; 天然林の一次生産力の比較研究班中間報告, 1~17, JIBP-PT-F, (1969)
- 7) Kozima, K., Ono, T. and Yamaji, L.: The size distribution of fog particle, *Studies on Fogs*, p. 303-326, (April, 1953)
- 8) Kira, T. and Shidei, T.: Primary production and turnover of organic matter in different forest of the WESTERN PACIFIC, *Jap. J. Ecol.* **17**, (12), 70-87, (1967)
- 9) 菅 誠: 人工一斉林の林分密度に関する生態学的研究, 学位論文, (1967)

Résumé

This paper dealt with the new method which was considered to be useful for the purpose of quantitative description and analysis of existing state of forest ecosystems.

1) The experimental formulae proposed by BEST A. C.^{1),2)} about 20 years ago (Equation 1, 2 and 3) were introduced, and then, the problems arised at point of $X \rightarrow X_{\max}$ in equation (3) were scrutinized.

$$\frac{\sum_{X=\min}^X W_x}{\sum_{X=\min}^{\max} W_x} = F \dots\dots\dots(1)^*$$

$$1 - F = \exp \left[- \left(\frac{X}{a} \right)^n \right] \dots\dots\dots(2)$$

$$\log \log_{10} \left(\frac{1}{1 - F} \right) = -0.3622 + n(\log_{10} X - \log_{10} a) \dots\dots\dots(3)$$

where,

X ; Diameter of small particle of water in the air, [L]

W_x ; Weight of particle of water at X in diameter, [M]

F ; Fraction of liquid water in the air comprised by water drops with diameter less than X , [ML^{-3}/ML^{-3}]

a, n ; constant

2) Intending to develop the new method for quantitative analysis of woodland ecosystems, a trial of expansion of the BEST's FUNCTION was made. In some natural and artificial forest ecosystems, the BEST's FUNCTION could be rewritten as following,

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n \dots\dots\dots(4)$$

*) By the above mentioned definition, it will be clear that F is the distribution function of X .

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - y_D/\bar{H}} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D} \right)^n + \beta \dots\dots\dots(5)$$

where,

D ; Diameter of individual trees at 1.3 m height above the ground, [L]

W_D ; Weight of individual trees with value of D in diameter, [M]

\bar{H} ; Mean value of predominant trees of the forest stand, [L]

y ; Biomass in forest stand, $(\sum_{D=\min}^{\max} W_D)$ [ML⁻²]

y_D ; Biomass in the forest stand comprised by trees with diameter less than D , $(\sum_{D=\min}^D W_D)$, [ML⁻²]

$(y/\bar{H})^{**}$; Constant showing the maximum value of (y/\bar{H}) in many forest ecosystems, [ML⁻³]

α, β, n ; Constant

3) The properties of equation (4) and (5) were discussed based on mathematical and biological points of views.

4) The properties of α, β and n , which indicated the three parameters in equation (4) and (5), were investigated.

5) The advantages of equation (4) and (5) as the new method for quantitative analysis of forest ecosystems were suggested.

Table 2***) An example of calculation procedures for decision of parameters of BEST's function expanded in this paper.

	DBH	H	w_D	$\sum_{D=\min}^D w_D$	y_D	y_D/\bar{H}	$20 - (y_D/\bar{H})$	$\frac{20}{20 - (y_D/\bar{H})}$	$\log \left\{ \frac{20}{20 - (y_D/\bar{H})} \right\}$
	cm	m	kg	kg/plot	ton/ha	ton/ha·m	ton/ha·m	$\frac{\text{ton/ha}\cdot\text{m}}{\text{ton/ha}\cdot\text{m}}$	—
1	8.7	8.3	14.33	14.33	0.9673	0.0928	19.9072	1.0047	0.002036
2	9.8	9.3	19.84	34.17	2.3065	0.2214	19.7786	1.0112	0.004837
3	10.0	9.3	20.68	54.85	3.7024	0.3553	19.6447	1.0181	0.007790
4	10.2	11.3	26.13	80.98	5.4662	0.5246	19.4754	1.0269	0.01153
5	10.4	10.3	24.77	105.75	7.1381	0.6850	19.3150	1.0355	0.01515
6	10.5	9.9	24.24	129.99	8.7743	0.8421	19.1579	1.0440	0.01870
7	10.5	9.6	23.50	153.49	10.3606	1.0231	18.9769	1.0539	0.02280
8	10.5	9.5	23.25	176.74	11.9300	1.1449	18.8551	1.0607	0.02559
9	10.7	9.8	24.92	201.66	13.6121	1.3063	18.6937	1.0699	0.02934
10	11.0	9.8	26.34	228.00	15.3900	1.4770	18.5230	1.0797	0.03330
11	11.0	8.8	23.66	251.66	16.9871	1.6302	18.3698	1.0887	0.03691
12	11.0	8.8	23.66	275.32	18.5841	1.7835	18.2165	1.0979	0.04056
13	11.1	10.8	29.55	304.87	20.5787	1.9749	18.0251	1.1096	0.04517
14	11.1	9.8	26.81	331.68	22.3884	2.1486	17.8514	1.1204	0.04937
15	11.2	10.5	29.35	361.03	24.3695	2.3387	17.6613	1.1324	0.05400
16	11.5	10.3	30.19	391.22	26.4074	2.5343	17.4657	1.1451	0.05884
17	11.7	8.5	31.26	422.48	28.5174	2.7368	17.2632	1.1585	0.06390
18	11.7	10.3	25.87	448.35	30.2636	2.9044	17.0956	1.1699	0.06815
19	11.9	10.3	32.46	480.81	32.4547	3.1147	16.8853	1.1845	0.07354
20	11.9	9.8	30.88	511.69	34.5391	3.3147	16.6853	1.1987	0.07871
21	12.0	10.0	31.98	543.67	36.6977	3.5219	16.4781	1.2137	0.08411
22	12.1	10.8	35.11	578.78	39.0677	3.7493	16.2507	1.2307	0.09015
23	12.2	10.5	34.68	613.46	41.4086	3.9740	16.0260	1.2480	0.09621
24	12.4	11.0	37.56	651.02	43.9434	4.2173	15.7827	1.2672	0.1028
25	12.6	9.0	31.77	682.79	46.0883	4.4231	15.5769	1.2840	0.1086

**) Founded on many investigation^{8), 9)} of the net production and biomass of forest ecosystems, the value of $(y/\bar{H})_{\max}$ was assumed to be equal to 20 ton/ha·m.

	DBH	H	w_D	$\sum_{D=m}^D w_D$	γ_D	γ_D/\bar{H}	$20 - (\gamma_D/\bar{H})$	20		$\log\left\{\frac{20}{20 - (\gamma_D/\bar{H})}\right\}$
								$20 - (\gamma_D/\bar{H})$	$\frac{\text{ton/ha}\cdot\text{m}}{\text{ton/ha}\cdot\text{m}}$	
	cm	m	kg	kg/lopt	ton/ha	ton/ha·m	ton/ha·m			—
26	12.7	10.3	36.86	719.65	48.5764	4.6618	15.3382	1.3039	0.1152	
27	12.7	10.8	38.67	758.32	51.1866	4.9123	15.0877	1.3256	0.1224	
28	12.7	10.8	37.05	795.37	53.6875	5.1524	14.8476	1.3470	0.1294	
29	12.8	11.8	42.89	838.26	56.5826	5.4302	14.5698	1.3727	0.1376	
30	13.0	11.0	41.34	879.60	59.3730	5.6980	14.3020	1.3984	0.1456	
31	13.0	10.0	37.56	917.16	61.9083	5.9413	14.0587	1.4266	0.1531	
32	13.1	10.0	38.23	955.39	64.4888	6.1889	13.8111	1.4481	0.1608	
33	13.2	10.0	38.67	994.06	67.0991	6.4395	13.5605	1.4749	0.1688	
34	13.3	10.3	40.46	1034.52	69.8301	6.7015	13.2985	1.5039	0.1772	
35	13.4	11.3	45.14	1079.66	72.8771	6.9940	13.0060	1.5378	0.1869	
36	13.5	10.5	42.46	1122.12	75.7431	7.2690	12.7310	1.5710	0.1962	
37	13.5	10.8	43.79	1165.91	78.6989	7.5527	12.4473	1.6068	0.2060	
38	13.7	10.3	42.89	1208.80	81.5940	7.8305	12.1695	1.6435	0.2158	
39	13.8	10.9	46.26	1255.06	84.7166	8.1302	11.8698	1.6849	0.2266	
40	13.8	10.8	45.59	1300.65	87.7939	8.4255	11.5745	1.7279	0.2375	
41	14.1	11.3	50.07	1350.72	91.1736	8.7499	11.2501	1.7778	0.2499	
42	14.8	10.8	52.71	1403.43	94.7315	9.0913	10.9087	1.8334	0.2633	
43	15.1	10.8	54.76	1458.19	98.4278	9.4460	10.5540	1.8950	0.2776	
44	15.1	10.9	55.40	1513.59	102.1673	9.8049	10.1951	1.9617	0.2926	
45	15.2	11.0	56.54	1570.13	105.9838	10.1712	9.8288	2.0348	0.3085	
46	15.4	11.5	60.80	1630.93	110.0873	10.5650	9.4350	2.1198	0.3263	
47	15.7	11.5	63.24	1694.17	114.3565	10.9747	9.0235	2.2164	0.3456	
48	15.9	11.5	64.72	1758.89	118.7251	11.3940	8.6060	2.3240	0.3662	
49	16.3	11.8	70.13	1829.02	123.4589	11.8483	8.1517	2.4535	0.3898	
50	16.6	11.3	69.10	1898.12	128.1231	12.2959	7.7041	2.5960	0.4143	
51	17.5	11.8	80.53	1978.65	133.519	12.8176	7.1824	2.7846	0.4448	
52	18.0	11.8	85.45	2064.10	139.285	13.3711	6.6289	3.0171	0.4793	

***) This data was earned in 30-years-old plantation forest of *Chamaecyparis obtusa* (Fig. 5).
The values of mean tree height (\bar{H}) and plot size were 10.42 m and $15 \times 9.8 \text{ m}^2$, respectively.