

A. C. Best の式の定量的林解析への適用について (II)*

山 倉 拓 夫・四 手 井 綱 英

On the Application of the BEST's Function to Quantitative Analysis
of Forest Ecosystem (II)

Takuo YAMAKURA and Tsunahide SHIDEI

目 次

要 旨	110	える影響	
はじめに	111	2. α の性質	116
1. β の性質	111	3. n の性質	116
1-1 Best の経験的分布関数と Best の		4. α, β, n の総合的性質に関する類推	116
変形式の関係についての類推		おわりに	119
1-2 β の大きさが部分物質密度に与		引用文献	119
える影響		Résumé	120
1-3 β の大きさが $d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right)/dD$ に与			

要 旨

¹⁾ 前報に引き続き Best の変形式の母数の検討を試みた。本報告で取りあげた母数は α, β, n の 3 つである。

- Best の提唱した重量ベースの経験的分布関数を、物質密度の記述式として変形する時に、新しい母数として、 β があらわれる可能性を指摘した。
- β の性質の中で、以下の性質が特徴的であることが確認された。
 - β は部分物質密度 (6) 式の量) の大きさを規定する。
 - $\beta \geq 0, \beta < 0$ の条件に対応して、それぞれ、L 型、J 型の物質密度構造図 ($d(y_D/\bar{H})/dD \sim D$ 関係図) が得られる。
- α の性質の中でも、 α が物質密度構造図に与える影響を数値計算によるグラフによって考察した。 α の値は、物質密度構造図の極大値の位置と、その大きさに影響を与える。
- n の性質として、以下の事が確認された。 n の値は物質密度構造図のピークの位置とその尖り方に影響するが、その影響の方向は、 α とは逆の性質を持つ。
- 森林の物質密度が最高度に発達した段階を仮定することによって、 α, β, n が、積率の関数として近似されることを指摘した。

*) Contributions from JIBP-PT No. 147

はじめに

既存の森林の現実の姿を定量的に記述する方法として、色々なものが考えられる。

前報で紹介した Best の変形式は、そのような目的に耐え得る実験式の一つであり、物質密度の構造を、記述し、解釈することを可能にすると思われる。そして、その使用された諸量の概念と実験式は以下のように表現される。

$$D \equiv D. B. H., \text{ 胸高直径。次元は } [L] \dots\dots\dots(1)$$

$$w_D \equiv D. B. H. \text{ の大きさが } D \text{ である立木個体の側体重。次元は } [M] \dots\dots\dots(2)$$

$$y \equiv \sum_{D=\min}^{\max} w_D, \text{ 任意の森林の部分現存量。次元は } [ML^{-2}] \dots\dots\dots(3)$$

$$y_D \equiv \sum_{D=\min}^D w_D, \text{ 任意の森林において、} D. B. H. \text{ の大きさが } D \text{ 以下の個体によって構成される、区間 } [D_{\min} \sim D] \text{ 現存量。次元は } [ML^{-2}] \dots\dots\dots(4)$$

$$\bar{H} \equiv \text{任意の森林における上層木の平均樹高。次元は } [L] \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{y}{\bar{H}} \equiv \frac{y_{D=\max}}{\bar{H}} \equiv \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D}{\bar{H}}, \text{ 任意の森林のみかけの部分物質密度。次元は } [ML^{-2}] \dots\dots\dots(6)$$

$$\left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \equiv \text{平均的な意味における } \frac{y}{\bar{H}} \text{ の上限値。次元は } [ML^{-3}] \dots\dots\dots(7)$$

$$\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right) \equiv \text{任意の森林において、} D. B. H. \leq D \text{ なる個体の集合によって構成される。みかけの区間 } [D_{\min} \sim D] \text{ 物質密度。次元は } [ML^{-3}] \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{y_D}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \left\{ 1 - \exp\left[-2.303\left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right)\right] \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right)}{dD} = 2.303 \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \cdot \alpha^n \cdot n \cdot \frac{D^{n-1}}{(\alpha^n + \beta D^n)^2} \cdot \exp\left[-2.303\left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right)\right] \dots\dots\dots(10)$$

本報告では、前報に引き続いて、Best の変形式の母数について、不完全ではあるが、考察を試みる。(9)、(10)式にあらわれる母数は、 $\alpha, \beta, n, \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max}$ の4つである。この4つの母数のうち、今回取り上げるものは、 α, β, n の3つである。 $\left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max}$ の性質については、まだその詳細な動態は不明である点が多く、今後の検討を要する。従って、本報告の意図するところは、主として、数学的視点に基づく、 α, β, n の性質に関する定性的な類推を述べることである。

1. β の性質

1-1 Best の経験的分布関数と Best の変形式の関係についての類推

前報では Best の変形式において、 $\beta=0$ の場合と $\beta \neq 0$ の場合が存在することを指摘した。 $\beta=0$ の場合は Best^{2),3)} が霧滴の分布において確認したものと、同一の関数形を示しているが、 $\beta \neq 0$ の場合は Best の分布関数において、みられなかったものである。ここで、Best 型の重量ベース

の経験的分布関数 ($\beta=0$) から, Best の変形式において, ($\beta=0$) の型が生ずる現象を類推してみよう**).

今, 次の(11)式によって定義される δ を考える.

$$\left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \equiv \left(\frac{y_{D=\max}}{\bar{H}}\right) + \delta \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{y_{D=\max}}{\bar{H}} \equiv \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D}{\bar{H}} \equiv \frac{y}{\bar{H}}$$

また, 恒等的に次の(12)式の重量ベースの経験的分布関数 (Best の分布関数) が成立すると仮定する.

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y_{D=\max}/\bar{H})}{y_{D=\max}/\bar{H} - y_D/\bar{H}} \right\}} \equiv \left(\frac{\alpha}{D}\right)^n \dots\dots\dots(12)$$

ここで(12)式の左辺から次の量, z を考える. すなわち

$$z \equiv \frac{(y_{D=\max}/\bar{H})}{(y_{D=\max}/\bar{H}) - (y_D/\bar{H})} = \frac{(y/\bar{H})_{\max} - \delta}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H}) - \delta} \dots\dots\dots(13)$$

(13)式より

$$z \cdot \{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})\} = (y/\bar{H})_{\max} + \delta(z - 1)$$

上式より

$$\begin{aligned} \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} &= z + \frac{\delta(1-z)}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \\ &= z \left\{ 1 - \frac{\frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y_{D=\max}/\bar{H})} - 1}{\frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y_D/\bar{H})} - 1} \right\} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここで (14) 式の両辺の対数を考える

$$\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \right\} = \log_{10} z + \log_{10} \varepsilon(z) \dots\dots\dots(15)$$

$$\varepsilon(z) \equiv \left\{ 1 - \frac{\frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y_{D=\max}/\bar{H})} - 1}{\frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y_D/\bar{H})} - 1} \right\}$$

ここで (15) 式の逆数を考えると

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \right\}} = \frac{1}{\log_{10} z} \left(1 + \frac{\log_{10} \varepsilon(z)}{\log_{10} z} \right)^{-1} \dots\dots\dots(16)$$

ここで次の2項展開を考える

***) 以下の式の解法は, 大阪市立大学, 小川房人博士の御教授によるものである。

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\log_{10} \varepsilon(z)}{\log_{10} z}\right)^{-1} &= 1 - \frac{\log_{10} \varepsilon(z)}{\log_{10} z} \\ &+ \frac{\{\log_{10} \varepsilon(z)\}^2}{\{\log_{10} z\}^2} - \frac{\{\log_{10} \varepsilon(z)\}^3}{\{\log_{10} z\}^3} + \dots, \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ただし $-1 < \frac{\log_{10} \varepsilon(z)}{\log_{10} z} < 1$ と仮定

(17)式において右辺の第2項以下を $\theta(z)$ 置くことができるならば, (16), (17)式より,

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \right\}} = \frac{1}{\log_{10} z} + \frac{\theta(z)}{\log_{10} z} \dots \dots \dots (18)$$

ただし $\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\log_{10} \varepsilon(z)}{\log_{10} z} \right\}^n$

(18)式において, その右辺の第2項を β と置くことができると仮定すると, すなわち

$$\frac{\theta(z)}{\log_{10} z} \sim \beta \dots \dots \dots (19)$$

(18), (19)式より,

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \right\}} = \frac{1}{\log_{10} z} + \beta \dots \dots \dots (18)$$

ここで (12), (13)式を (18)に代入すると, 次の (19)式を得る。

$$\frac{1}{\log_{10} \left\{ \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} \right\}} = \left(\frac{\alpha}{D}\right)^n + \beta \dots \dots \dots (19)$$

上の (19)式は, 前報で紹介した, Best の変形式であり, (9)式を意味する。

以上のように考えれば, (11)式で定義された δ の影響で, (12)式の型を持つ重量ベースの経験的分布関数から, 物質密度を記述するための実験式 (Best の変形式) においては, $\beta \neq 0$ の場合が出現することが定性的に類推される。したがって, Best の変形式においては, $\beta \neq 0$ の場合が, むしろ一般的であって, $\beta \approx 0$ の近似が成立するのは, かなり特別な場合であるとも考えられる。

1-2 β の大きさが部分物質密度に与える影響

任意の森林において, β がその森林の部分物質密度 ($y_{D=\max}/\bar{H} \equiv \sum_{D=\min}^{\max} w_D/\bar{H}$) の大きさに, どのように関係しているかをここで考察する。

任意の森林の中に, 任意に設定された調査区内の樹木の集団の持つ物質密度の全体量, すなわち, 部分物質密度は, (10)式を $[D_{\min} \sim D_{\max}]$ なる区間内において, D 方向で積分すれば求めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} &\int_{D=\min}^{\max} d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right) \\ &= \int_{D=\min}^{\max} 2.303 \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \alpha^n \cdot n \cdot \frac{D^{n-1}}{(\alpha^n + \beta D^n)^2} \exp\left[-2.303 \frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right] dD \\ &= \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \int_{t=\min}^{t=\max} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{y}{\bar{H}} \right)_{\max} \left[-e^{-t} \right]_{t=\min}^{t=\max} \dots\dots\dots(20)$$

ただし $t \equiv 2.303 \cdot \frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}$

$t_{=\max} \equiv D = D_{\max}$ の時の t の値

$t_{=\min} \equiv D = D_{\min}$ の時の t の値

(20)式において $D_{\max} \gg 0, D_{\min} \rightarrow 0$ を仮定すると (20) 式の積分の値は、 $\beta \geq 0, \beta < 0$ の場合によ^{5),6)}って、次のように、その積分区間を2つに分けて考えなければならない***).

i) $\beta \geq 0$ のとき

$$D_{\max} \rightarrow \infty \quad \text{ならば} \quad t_{=\max} \rightarrow \frac{2.303}{\beta}$$

$$D_{\min} \rightarrow 0 \quad \text{ならば} \quad t_{=\min} \rightarrow 0$$

ii) $\beta < 0$ のとき

$$D_{\max} \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|}} \quad \text{ならば} \quad t_{=\max} \rightarrow \infty$$

$$D_{\min} \rightarrow 0 \quad \text{ならば} \quad t_{=\min} \rightarrow 0$$

i) のばあい、(20) 式の値は

$$\int_0^{\infty} d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right) \equiv \frac{y_{D=\infty}}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \left[-e^{-t} \right]_0^{\frac{2.303}{\beta}}$$

$$= \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \left(1 - \exp\left[-\frac{2.303}{\beta}\right] \right) \dots\dots\dots(21)$$

ii) のばあい、(20) 式の値は

$$\int_0^{\infty} d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right) \equiv \frac{y_{D=\infty}}{\bar{H}} = \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \dots\dots\dots(22)$$

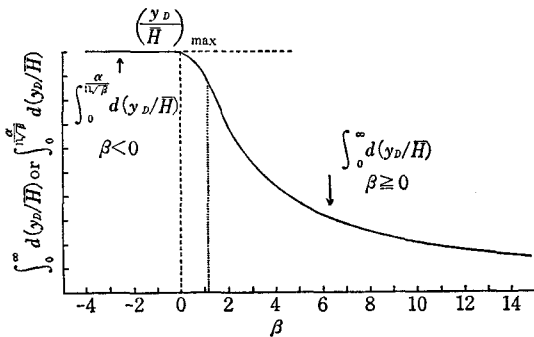


図-1 母数、 β の方向の部分物質密度の変化の模式図
Fig. 1. Schematic representation of change of partial

biomass density $-\int_{\min}^{\max} d(y_D/\bar{H})$, associated with change of β . It is assumed in calculation that

$$\int_{\min}^{\max} \approx \int_0^{\infty} (\beta \geq 0) \quad \text{or} \quad \int_{\min}^{\max} \approx \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|}}} (\beta < 0)$$

したがって、 β の値の大きさが、 $D=0$ から $D \gg 0$ 範囲にわたって考えた時の物質密度の大きさに引き起こす変化は (21)、(22)式によって理解できる。そして、その変化の状態は図-1のようになる。 $\beta \geq 0$ の領域においては β の値が増大するに従って、物質密度の大きさは単調に減少する。また $\beta < 0$ の領域においては、その値にかかわらず、物質密度は一定となる。

この一定の物質密度の量は、 $\left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max}$ を意味する。

1-3 β の大きさが $\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD}$ に与える影響

*** D の上限値は、 $\beta \geq 0$ の時には $D \rightarrow \infty$ までを、 $\beta < 0$ の時には $D \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|}}$ までを考えればよい。

$d(y_D/\bar{H})/dD$ は、太さ D なる $D.B.H.$ を持つ個体が保有する物質密度の大きさを意味し、その関数形は (10) 式によって与えられる。したがって、 β を色々と変化させることによって、物質密度構造の色々な姿を知ることができる。このことは β についてのみならず、 α, n についても同様に考えられる。ここで、 $d(y_D/\bar{H})/dD$ の値の変化を D 方向で考えた図 (図-2, 3, 4, 5) を、物質密度構造図と呼ぶことにする。

図-2は、 α と n を固定し ($\alpha=10, n=2$)、 β のみを変化させた時の物質密度構造図 $\{d(y_D/\bar{H})/dD \sim D$ 図} の変化を示している。この図から、 β が、ある与えられた α, n のもとで束縛されながら、かつ、ある大きさの正の値を持つ時は、右に歪んだ L 型の物質密度構造図が得られることがわかる。この歪み方は、 β が小さくなるに従って、次第に集中性を増大する変化をともしないながら小さくなる。そしてある一定の β の値域において、あたかも、左右対象な物質密度構造を示す。さらに β が小さくなり、その値が負になると、こんどは左に歪んだ J 型の物質密度構造図が得られる。図-2 の $\alpha=10, n=2$ の条件下において、J 型の物質密度構造は明確ではないが、図-3にみられるように、 α, n の適当なある条件下においては、典型的な J 型構造を示すことができる。図-3においては、 $\alpha=30, n=2$ となっている。このように、 β を変化させることによって物質密度構造図の色々なタイプを表現できる。とくに、 β の値が正であるか、負であるかの違いは、物質密度構造図が右に歪んだ L 型であるか、または、左に歪んだ J 型であるかの、構造上の基本的差をあらわす。

また、 β が小さくなると、最大物質密度を持つ立木の $D.B.H.$ が次第に小さくなり、そのピークの位置 ($d(y_D/\bar{H})/dD \sim D$ 図の極大値の大きさ) は逆に高く、大きくなる。このことは前報 (31) 式より明らかである。

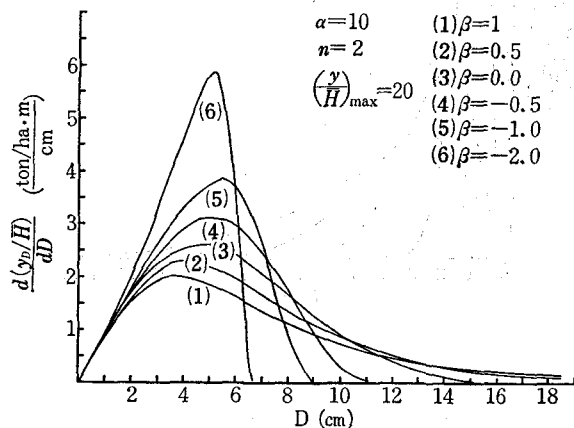


図-2 物質密度構造図

Fig. 2. Biomass density structure diagram showing relation between $\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD}$ and tree diameter (D ; cm), where α and n are fixed at 10 and 2, respectively, but β is variable. Negative value of β shows J shaped diagram but positive value of its gives L shaped diagram.

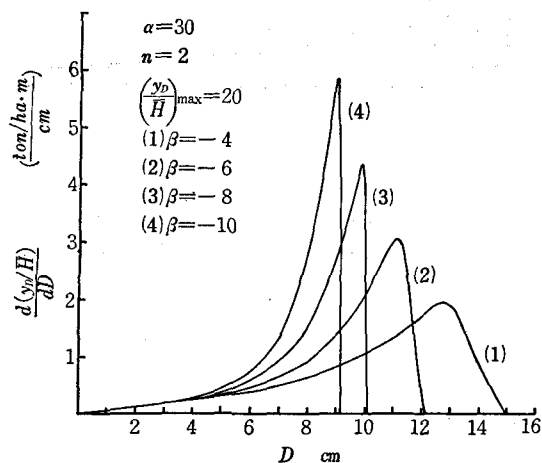


図-3 物質密度構造図

Fig. 3. Biomass density structure diagram indicating profile of change of differential equation $\frac{d(y_D/\bar{H})}{dD}$, where α and n are constant ($\alpha=30, n=2$), but β is variable. Different negative values of β give some typical J shaped diagrams of biomass density structures.

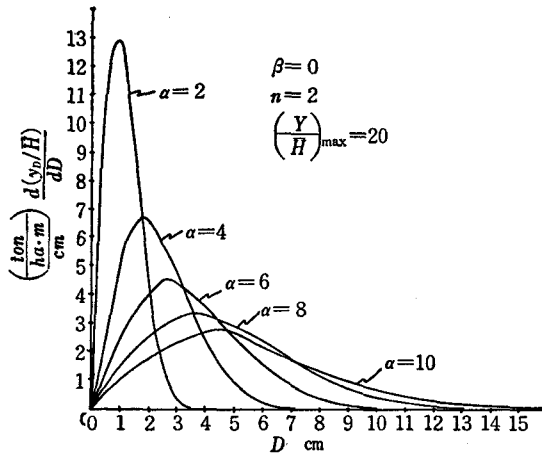


図-4 物質密度構造図

Fig. 4. Biomass density structure diagram indicating some types of biomass density distribution, where α is variable but two parameter β and n are constant ($\beta=0, n=2$).

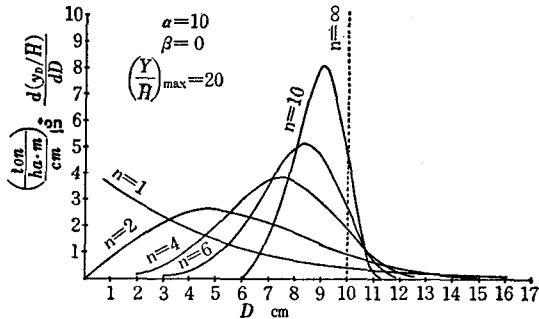


図-5 物質密度構造図

Fig. 5. Biomass density structure diagram indicating changes of forms of biomass density structures in direction of parameter n , where n is variable but α and β are fixed at point of 10 and 0, respectively.

は、前報 (26)~(31) 式によっても明らかである。

また $n=1$ の時は、他の場合とは異なり、指数関数型の物質密度構造図が得られることにも注目をする価値があると思われる。

4. α, β, n の総合的性質に関する類推

今まで述べてきたように、 α, β, n は複雑な意味を持ち物質密度構造図 ($d(y_p/H)/dD \sim D$ 関係図) の変化と深く関係している。そして α, β, n を適当に変化させることによって、色々な物質密度構造図が得られる。ここでは、 α, β, n の変化が複合された時に生ずる物質密度構造にあらわれる変化の、同時的表現について簡単に検討する。

2. α の性質

図-4 は、 β, n をそれぞれ、 $\beta=0, n=2$ に固定して、 α のみを変化させた時に引き起こされる、物質密度構造図の変化を示している。この図から明らかなように、 α は、物質密度構造図において、最大値のあらわれる直径の位置と、その時の最大値の大きさに深く関係している。一般に α が増大すると、最大物質密度を示す直径は大きくなり、その時の最大の物質密度の値は次第に小さくなる。また、これとは逆に α が次第に小さくなり、 $\alpha \rightarrow 0$ の近傍では、物質密度構造図は激しく尖り、そのピークの値は ∞ になる。この現象も、前報 (28), (31) 式より明らかである。このような α の性質の中で、とくに、 α が物質密度構造図において、極大値を有する直径の大きさを規定することに注目したい。

3. n の性質

図-5 は、 α, β を固定して、 n のみを変化させた時に、物質密度構造図に認められる変化を示している。図の計算は、 $\alpha=10, \beta=0$ と仮定して実施した。図から明らかなように、森林の物質密度が個体という単位に分離していくようすは、 n の変化とともに激しく変動する。一般に n が増大すると、物質密度構造図は尖り方が激しくなり、その最大値を示す直径の位置は、固定された α に収れんする。このような n の性質

まず、考察にあたりここで次の事を仮定する。

【仮定】 部分物質密度は充分に発達しており、(11)式で定義された量、 δ は非常に小さい。すなわち

$$\delta \simeq 0 \dots\dots\dots(23)$$

(11)式において(23)の仮定を考慮すると、

$$\left(\frac{y}{\bar{H}}\right)_{\max} \simeq \left(\frac{y_{D=\max}}{\bar{H}}\right) = \frac{y}{\bar{H}} = \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D}{\bar{H}} \dots\dots\dots(24)$$

(24)式の仮定が成立すると、

$$\begin{aligned} \frac{(y/\bar{H})_{\max}}{(y/\bar{H})_{\max} - (y_D/\bar{H})} &\simeq \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D/\bar{H}}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D/\bar{H} - \sum_{D=\min}^D w_D/\bar{H}} \\ &= \frac{\sum_{D=\min}^{\max} w_D}{\sum_{D=\min}^{\max} w_D - \sum_{D=\min}^D w_D} \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

(23)式の仮定は、(25)式から明らかのように、Bestの変形式が、重量ベースの経験的分布関数の一種であり、その微分方程式は重量ベースの経験的分布密度関数の一種を与える事を示している。

前報にない、次の密度関数、 $g(D), f(D)$ を考える。すなわち

$$g(D) \equiv \frac{\sum_{D=D}^{D+dD} w_D}{\sum_{D=0}^{\infty} w_D}$$

$$f(D) \equiv \frac{\sum_{D=D}^{D+dD} N_D}{\sum_{D=0}^{\infty} N_D}$$

上の $g(D)$ と $f(D)$ の関係は

$$g(D) = K w_D f(D)$$

とかける。ここで K は定数である。

Bestの変形式において $\delta \simeq 0$ を仮定する時、 $d(y_D/\bar{H})/dD$ は、上の $g(D)$ にあたる。従って、 $w \sim D$ 関係を次の式で近似すると、

$$w_D = \frac{1}{A} D^h \dots\dots\dots(26)$$

$A, h \equiv$ 定数

$$\begin{aligned} f(D) &= A D^{-h} \frac{d\left(\frac{y_D}{\bar{H}}\right)}{dD} \\ &= 2.303 A \cdot \alpha^n \cdot n \cdot \frac{D^{n-1-h}}{(\alpha^n + \beta D^n)^2} \cdot \exp\left[-2.303\left(\frac{D^n}{\alpha^n + \beta D^n}\right)\right] \dots\dots(27) \end{aligned}$$

ここで(27)式のように、経験的に密度関数が与えられた場合に、原点のまわりの k 次積率、

ν_k を D について考える。ただし計算にあたり、 $\beta \geq 0$ の場合と、 $\beta < 0$ の場合に、2つの場合を分離して ν_k の積分区間を考える必要がある。

i) $\beta \geq 0$ の場合

$$\nu_k = 2.303 A \cdot \alpha^n \cdot n \int_{D=\min}^{\max} D^k \cdot \frac{D^{n-1-h}}{(\alpha^n + |\beta| D^n)^2} \cdot \exp \left[-2.303 \frac{D^n}{\alpha^n + |\beta| D^n} \right] dD \dots\dots\dots(28)$$

ここで

$$\int_{D=\min}^{\max} \simeq \int_0^{\infty}$$

$$t = 2.303 \frac{D^n}{\alpha^n + |\beta| D^n}$$

を仮定すると

$$\nu_k = A \alpha^{k-h} \int_0^{\frac{2.303}{|\beta|}} \left\{ \frac{t}{2.303 - |\beta| t} \right\}^{\frac{k-h}{n}} e^{-t} dt \dots\dots\dots(29)$$

ii) $\beta < 0$ の場合

$$\nu_k = 2.303 A \cdot \alpha^n \cdot n \int_{D=\min}^{\max} D^k \cdot \frac{D^{n-1-h}}{(\alpha^n - |\beta| D^n)^2} \cdot \exp \left[-2.303 \frac{D^n}{\alpha^n - |\beta| D^n} \right] dD \dots\dots\dots(30)$$

$\beta < 0$ の場合には、 D の上限値は、 $\frac{\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|}}$ であるから

$$\int_{D=\min}^{\max} \simeq \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|}}}$$

と仮定し、 $\beta \geq 0$ の場合と同様 t なる変換を用いると

$$\nu_k = A \alpha^{k-h} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{t}{2.303 + |\beta| t} \right\}^{\frac{k-h}{n}} e^{-t} dt \dots\dots\dots(31)$$

上の (29), (31) 式は既知の初等関数で表示することは困難であるが、一応、便宜的に次のように表示する。

$$\nu_k = E(D^k) = A \alpha^{k-h} \Psi(\beta, n, k, h) \dots\dots\dots(32)$$

(32) 式より、 $\alpha, \beta, n,$ は積率の関数であることがわかる。 h の値は $2 > h > 3$ の値域に落ちると、一般的に、考えられるから、今後の問題として、 $\Psi(\beta, n, k, h)$ を数値計算によって近似する場合には、便宜的に $h \simeq 2.5$ くらいとしても良いであろう。

ところで $\beta = 0$ の場合にのみ、 $\Psi(\beta, n, k, h)$ は次のように表示され、その性質がすこし、明らかになる。すなわち

$$\begin{aligned} \nu_k &= A \alpha^{k-h} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{t}{2.303} \right\}^{\frac{k-h}{n}} e^{-t} dt \\ &= \frac{A \alpha^{k-h}}{(2.303)^{\frac{k-h}{n}}} \mathcal{L} \{ t \}^{\frac{k-h}{n}} \\ &= \frac{A \alpha^{k-h}}{(2.303)^{\frac{k-h}{n}}} \Gamma \left(\frac{k-h}{n} + 1 \right) \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

ここで \mathcal{L} はラプラス変換を意味し、 Γ はガンマ関数を意味する。ただし $D_{\min} \geq 0$ で上述のような積分区間の仮定が成立しないときには上のような表示にも、問題がある。しかし一応、(32) 式のような表示が可能であると仮定すれば、(32) 式において、 $k=1, k=2$ と置くと

$$\nu_1 = E(D) = \frac{A\alpha^{1-h}}{(2.303)^{\frac{1-h}{n}}} \Gamma\left(\frac{1-h}{n} + 1\right) \dots\dots\dots(34)$$

$$\nu_2 = E(D^2) = \frac{A\alpha^{2-h}}{(2.303)^{\frac{2-h}{n}}} \Gamma\left(\frac{2-h}{n} + 1\right) \dots\dots\dots(35)$$

(34), (35) 式より

$$\bar{D} = E(D) = \frac{A\alpha^{1-h}}{(2.303)^{\frac{1-h}{n}}} \Gamma\left(\frac{1-h}{n} + 1\right) \dots\dots\dots(36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_D^2 &= E\{(D - \bar{D})^2\} = \{E(D^2)\} - \{E(D)\}^2 \\ &= \frac{A\alpha^{2-h}}{(2.303)^{\frac{2-h}{n}}} \Gamma\left(\frac{2-h}{n} + 1\right) - \frac{A^2\alpha^{2(1-h)}}{(2.303)^{\frac{2-2h}{n}}} \left\{ \Gamma\left(\frac{1-h}{n} + 1\right) \right\}^2 \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

$\bar{D} \equiv D. B. H.$ の平均値

$\sigma_D \equiv D. B. H.$ の標準偏差

上述のように考えるならば、 $\delta \rightarrow 0$ の仮定をもとにして、かなり乱暴ではあるが、一定程度、 α, β, n の性質について、定性的な類推がなされるであろう。すなわち、 α, β, n は直径の平均値や分散などの積率とかなり関係が深い。このことは、 α, β, n が、物質密度構造関のとり方や、その最大値の出現する位置などと関係のあることを推測させる。特に $\delta \approx 0$ の仮定のもとで、 $\beta \approx 0$ の場合には $\Psi(\beta, n, k, h)$ は (33) 式のように近似され、 α, n の性質はより一層明らかになる。

おわりに

α, β, n の性質について、主として数学的視点から、かなりあらい類推を試みた。今後の問題として、本報告で取りあげたような類推が、果して現実的であるかどうか、という事を、現実の資料によって確認する必要がある。また、逆に言えば、 α, β, n の性質の明確な実体が数学的に完全に解き得ないことから、現実の資料によって、これらの母数のあらわれ方を明確にし、現存する生態系のどのような特性量と関係しているのかということを知らねばならない。

また残る他の一つの母数 $\left(\frac{y}{H}\right)_{\max}$ についてもその性質を早く知る必要がある。

本報告を作成するにあたり、著者の考え方の欠陥を指摘し、母数 β が Best 型の重量ベースの経験的分布関数の変形をする際にあらわれる過程の証明を御教授下さった。大阪市立大学、小川房人博士に深く感謝申し上げる。また、京都大学農学部森林生態学研究室の皆様にも、深く感謝申し上げます。

引用文献

- 1) 山倉拓夫・四手井綱英；A. C. Best の式の定量的林分解析への適用について (I), 京大演報, **43**, 124-139, (1972)
- 2) Best, A. C.: The size distribution of rain drops, Quart. J. Roy. Met. Soc., **76**, 16-36, (1950)
- 3) Best, A. C.: Drop size distribution in cloud and fog, Quart. J. Roy. Met. Soc., **77**, 418-426, (1951)
- 4) 増山元三郎；小数例のまとめ方 1, 2, 竹内書店, (1964)
- 5) Shinozaki Kichiro and Tatsuo Kira: Intraspecific competition among higher plants X, The C-D rule, its theory and practical uses, Jour. Biology Osaka City Univ. **12**, 69-82, (1964)

- 6) Ogawa Husato, K. Yoda, K. Ogino and T. Kira: Comparative ecological studies on three main types of forest vegetation in Thailand, II. Plant biomass, *Nature and Life in Southeast Asia*, IV, (1965)

Résumé

Next to the preceding first report, this paper dealt with the experimental formula for quantitative description and analysis of biomass density in forest ecosystems. In this part the characters of three parameters — α , β and n , shown in the transformed equation of Best's Function (equation (9)) were investigated from mathematical points of views, and following facts were found out.

1. The process of appearing the first parameter, namely β in transformed equation of Best's Function is able to clarify on the following assumption that: The frequency distribution function of the D.B.H. (tree diameter at breast height) of individual trees in forest stand fits approximately exponential probability distribution function proposed by A.C. BEST.

2. In the some properties on β , following characters are important.

a) β is related to the magnitude of value of partial biomass density (equation (6), (21) & (22)).

b) β decides the fundamental types of biomass density structure diagram. The negative value of β shows the *J* shaped biomass density structure diagram and positive value of that shows *L* shaped diagram.

3. The correlation between the second parameter α and the form of biomass density structure diagram is strong. The parameter α influences the position of tree diameter showing the maximum value of biomass density and degree of dispersion of diameter in biomass density structure diagram.

4. The third parameter n has the influences upon the shape of the biomass density structure diagram as well as α , but the direction of its influences is opposite to that of α .

5. Based on the assumption that $\delta=0$ (equation (11)), it is found that three parameters are expressed approximately as the function of moments.