

枝密度関数の解析*

山倉 拓夫・西田 仁・四手井 綱英

Analysis of the probability density function of
branch position from tree top

Takuo YAMAKURA, Hitoshi NISHIDA and Tsunahide SHIDEI

目 次

要 旨	67	4-1 枝密度関数の決定とその母数の決定
はじめに	68	4-2 n_0 の性質
1 資料と調査方法	68	4-3 A, B の性質
2 基本概念一定義と記号および		4-4 平均値, 分散
枝密度関数	68	おわりに
3 枝密度関数の誘導	72	Résumé
4 ヒノキ林における枝密度の解析	76	83
		84

要 旨

1. 枝数の垂直方向の分布を巨視的に表現する方法として枝密度関数の誘導を検討した。
2. 数種の植物について検討した結果、枝密度関数は非常に単純な方程式で経験的に近似されることが判明した。たとえばヒノキ林では次の枝密度関数が存在する。

$$\phi(Z) = \frac{A/N}{(A+BZ)^2}$$

$$\Phi(Z) = \int_0^Z \phi(Z) dZ = \frac{Z/N}{A+BZ}$$

Z : 梢端からの距離 (cm)

N : 個体あたり総枝数

$\phi(Z)$: 枝密度関数 $\left(\frac{1}{\text{cm}}\right)$

$\Phi(Z)$: 枝の Z 方向の分布関数

A, B : 定数

3. ヒノキ林の枝密度関数の解析を通じてその有効性を指摘した。

はじめに

林木の枝の性質をめぐる問題は、枝打ちという、森林施業上の実践的課題と深く関係して、従来より注目を集めてきている³⁾。この枝の性質を解析するにあたり、その解析方法としては、色々な視点に基づく、多様な方法が存在し得るであろう。最近の研究例としては、森林生態系の一次生産力の推定の必要から試みられた枝の生長解析^{1,2,4)}、樹冠構造の解析の立場から試みられた枝の分岐様式に関する研究などがあげられる^{5,6)}。

枝は、見方によっては非常に複雑な動態を示す。この複雑さは枝の問題を解析する際の方法的な多様性をまねく原因となっている。本報告では、枝の多様な諸性質の中でも、幹から直接に分岐する枝の分布様式の垂直的な変化の問題を主な考察の対象として取りあげ、その解析法のための新しい視点を試論的に展開したい。

1 資料と調査方法

資料として用いた植物は、ヒノキ、スギ、キブシ、モウソウチク、セイタカアワダチソウなどである。これらの植物について、次のような調査を行った。

ヒノキ (*Chamaecyparis obtusa* S. & Z.): 1969年9月滋賀県蒲生郡日野町、綿向山々麓に成立する、植栽後32年のヒノキ人工林(綿向山森林生産組合所有)において、層別刈取法による生産力調査を行った。毎木調査の結果をもとにして、胸高直径の全範囲にわたるように6本の供試木を、調査プロット内から選んだ。この6本の木について、層別刈取調査を実施する前に、不定芽を含めて幹から直接に分岐している枝に番号をつけ、梢端からの枝の距離を実測した。また、層別刈取法による生産力調査において測定されるべき個体の諸特性量を実測、記録した。

スギ (*Cryptomeria japonica* D. Don): 森田・荻野ら(1967)、尼崎・荻野ら(1968)の資料を引用した。

キブシ (*Stachyurus praecox* S. & Z.): 京都市雲ヶ畑で、2本の枝を採集し、大枝から分岐している小枝の大枝の先端からの距離を測定した。この大枝の年令は2年であり、小枝の年令は1年であった。

モウソウチク (*Phyllostachys pubescens* M.): 1972年6月、京都市北区、京大農学部演習林付属上賀茂試験地内のモウソウチク林で、2本の個体を選び伐倒した。ヒノキの場合と同様に、層別刈取調査を行ない、稈から直接に分岐している枝について、稈の先端からの距離を実測した。

セイタカアワダチソウ (*Solidago altissima* L.): 1972年6月、京大農学部構内で3本の個体を刈取り、着葉部の茎の先端からの距離を測定した。

2 基本概念——定義と記号および枝密度関数

解析のはじめに、枝を、主軸となるもの(幹、稈、茎など)から直接に分岐する非同化器官の意味に定義しておこう。この枝の定義は便宜的なものであり、特別に深い考察をその基礎に置くわけでない。

この枝の、幹への着き方を観察することを考えてみる時、その観察法としては色々なものが存在すると思われる。ここでは、個々の枝の集まった状態を一直線上に配列された点群として認識することにしよう。一本の枝とは、幹という一直線上の任意の部分に存在する一つの質点として

理解される。この点群の存在している状態を記述する言葉として、単位幹長あたりの枝数を意味する枝密度という概念を導入する。そして、この枝密度は、同一の幹においても、その相対的位置の変化によって色々な変化を引き起こすものと思われるが、この枝密度の変化を梢端からの距離方向で表現するものとして、枝密度関数を新しく定義しよう。すなわち、枝密度の巨視的表現の一つが枝密度関数である。したがって、この枝密度関数は、幹に対する枝の着き方を記述するものであり、この関数を検討することは、枝の分岐様式を解析することを意味することになるであろう。

ここで、枝密度関数の解析にあらわれる諸量とその記号を述べておこう。

図-1 に示すように、樹木の個体の梢端から根元の方向に、下向きに、梢端からの距離 Z (cm) を取り、その最小値を Z_{\min} 、その最大値を Z_{\max} と定める。また、梢端から Z の距離 $[Z - \frac{1}{2} dZ \leq Z < Z + \frac{1}{2} dZ]$ の部分に存在する枝数を $n(Z)$ とおくと、一本の樹木個体の幹より分岐している全枝数、 N は、

$$N \equiv \sum_{z=0}^{z_{\max}} n(z) \quad (1)$$

また、 Z を梢端 ($Z=0$) の所からではなく、梢端からすこし離れた部分 (Z_{\min}) から数えた、個体あたりの総枝数を N' とすると、

$$N' \equiv \sum_{z=Z_{\min}}^{z_{\max}} n(z) \quad (2)$$

N と N' の関係は

$$\lim_{z_{\min} \rightarrow 0} N' \equiv N \quad (3)$$

区間 $[0, Z]$ に存在する枝の総数を $N(Z)$ と置くと、 $N(Z)$ は $n(Z)$ の定義より、

$$N(Z) \equiv \sum_{z=0}^Z n(z) \quad (4)$$

同様に、区間 $[Z_{\min}, Z]$ 内に存在する枝の総数を $N'(Z)$ と置くと、 $N'(Z)$ は

$$N'(Z) \equiv \sum_{z=Z_{\min}}^Z n(z) \quad (5)$$

ここで(3)と(1)、または(4)と(1)の間の比を考え、新たに、次の量、 $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ を定義する。すなわち

$$\phi(Z) \equiv \frac{N(Z)}{N} \quad (6)$$

$$\phi'(Z) \equiv \frac{N'(Z)}{N'} \quad (7)$$

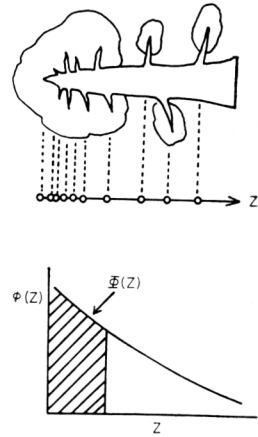


Fig. 1. Rough sketch illustrating fundamental conception of the distribution density function of branch position, where Z shows the distance from tree top and $\phi(Z)$ means distribution density function of branches in direction of Z . The integral formula of $\Phi(Z)$ indicates the vertical distribution function of branches.

(6), (7)はその定義より, 枝数の Z 方向での分布関数を示しており, 梢端を原点とする数直線上における質点の位置の分布関数をあらわしている。また(6), (7)式は定義より次の性質を持つ。

$$\phi(Z=Z_{\max}) \equiv 1 \quad (8)$$

$$\phi'(Z=Z_{\max}) \equiv 1 \quad (9)$$

この $\phi(Z)$ と $\phi'(Z)$ の違いは, Z の区間を, $[0, Z_{\max}]$ で分布を考えるか, あるいは $[Z_{\min}, Z_{\max}]$ で分布を考えるかの差を示している。すなわち, 両分布関数の差は, 分布の原点の違いを示している。

$\phi(Z)$ と $\phi'(Z)$ の関係は

$$\lim_{z_{\min} \rightarrow 0} \phi'(Z) \equiv \phi(Z) \quad (10)$$

(6), (7) が Z の関数で表現できると仮定した時, $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ が Z の至る所で連続ならば, その第一回導関数をおのおの $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ とおくと, すなわち,

$$\frac{d\phi(Z)}{dZ} \equiv \phi'(Z) \quad (11)$$

$$\frac{d\phi'(Z)}{dZ} \equiv \phi''(Z) \quad (12)$$

とおくと, $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ は Z 方向で考えた枝数の分布密度関数を表現することになる。この $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ をここでは, 枝密度関数と呼ぶことにする。したがって, この $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ は, 梢端を原点とする数直線上に存在する, 質点の位置に関する分布密度関数を示している。 $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ の関係は(10)式と同様に,

$$\lim_{z_{\min} \rightarrow 0} \phi'(Z) \equiv \phi(Z) \quad (13)$$

となる。このように $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ を定義すると, 区間 $[Z - \frac{1}{2}dZ \leq Z < Z + \frac{1}{2}dZ]$ の範囲に枝の存在する確率は, Z の定義域, $[0, Z_{\max}]$, $[Z_{\min}, Z_{\max}]$ の違いに対応して, それぞれ,

$$\phi(Z)dZ \quad (14)$$

$$\phi'(Z)dZ \quad (15)$$

であらわされる。

また, $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ を用いると, 前に定義した $N(Z)$, $N'(Z)$ は, おのおの

$$N(Z) \equiv N \int_0^Z \phi(Z)dZ \equiv N\phi(Z) \quad (16)$$

$$N'(Z) \equiv N' \int_{z_{\min}}^Z \phi'(Z)dZ \equiv N'\phi'(Z) \quad (17)$$

さらに, (8), (9)式の表現するものを $\phi(Z)$, $\phi'(Z)$ を用いてあらわすと,

$$\int_0^Z \phi(Z)dZ \equiv 1 \quad (18)$$

$$\int_{z_{\min}}^Z \phi'(Z)dZ \equiv 1 \quad (19)$$

また, 基点より Z までの, Z の平均値や, 分散は次のようになる。

$\phi(Z)$ の場合, その平均を $\bar{Z}(Z)$, 分散を $V(Z)$ とおくと,

$$\bar{Z}(Z) = \int_0^Z Z \phi(Z) dZ \quad (20)$$

$$V(Z) = \int_0^Z Z^2 \phi(Z) dZ - \{\bar{Z}(Z)\}^2 \quad (21)$$

$\phi'(Z)$ の場合, その平均を $\bar{Z}'(Z)$, 分散を $V'(Z)$ とおくと

$$\bar{Z}'(Z) = \int_{z_{\min}}^Z Z \phi'(Z) dZ \quad (22)$$

$$V'(Z) = \int_{z_{\min}}^Z Z^2 \phi'(Z) dZ - \{\bar{Z}'(Z)\}^2 \quad (23)$$

\bar{Z} と \bar{Z}' , $V(Z)$ と $V'(Z)$ の関係は次のようになる。すなわち

Table 1. Diagrammatic representation of principle of deriving the distribution density function of branch position from tree top

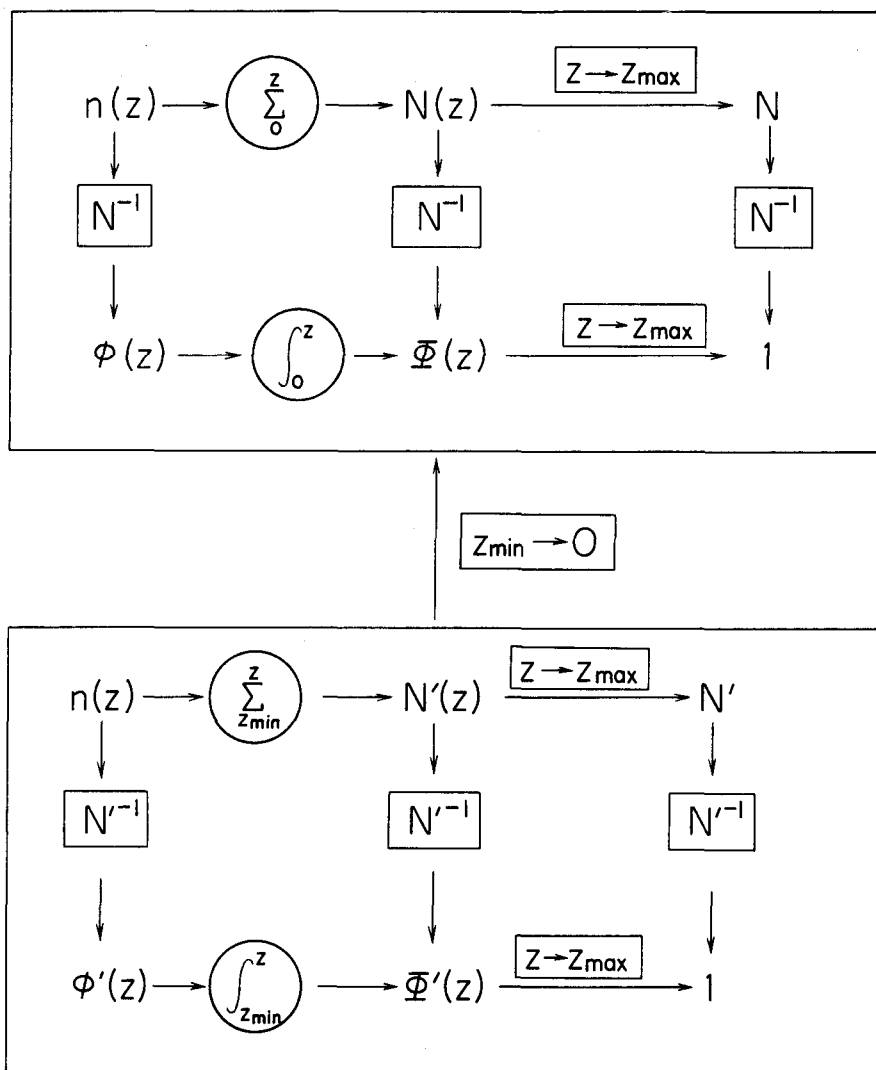


Table 2. Dimensions or units of the variables used in analysis

Variables	Units
Z	cm
$n(Z)$	Dimensionless
$N(Z), N'(Z)$	Dimensionless
N, N'	Dimensionless
$\phi(Z), \phi'(Z)$	(cm) ⁻¹
$\phi(Z), \phi'(Z)$	Dimensionless

$$\lim_{z_{\min} \rightarrow 0} \bar{Z}'(Z) \equiv \bar{Z}(Z) \quad (24)$$

$$\lim_{z_{\min} \rightarrow 0} V'(Z) \equiv V(Z) \quad (25)$$

今まで述べてきた、基本概念間の関係をまとめてみると、表-1のようになる。また、各量の単位は、表-2のようになる。この表-2の次元から明らかなように、今まで述べてきた基本概念は、率を用いた Z の分布関数の解析であることがわかる。一般に分布関数に関する研究は、i) 分布関数の成立機構に関する事項を取扱う、分布関数の誘導論、ii) 分布関数の解析論、iii) 分布関数の応用論の3つの領域に区分して考えられる。ここでは主として、解析論にあたる部分を考察したい。

3 枝密度関数の誘導

枝密度関数、 $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ の満足すべき条件を一意的に限定することは、枝の幹からの分岐様式に関する情報不足から、難しい。このことは、同一森林内における立木個体の内的特性の多様性や、造林の施業の有無などによる人為的影響などを考えると、さらに困難になる。したがって、公理的に $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ を決定することは不可能であり、このことは、枝密度関数の成因論に対する考察が、現状では無理であることを意味する。このように考えると、枝密度関数を論ずるためには、経験的情報の把握が第一の問題になると思われる。今の所、 $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ が、果して、存在するものであるかどうかは不明であると言って良い。そこで、スギ、ヒノキ、キブシの幹から出る枝、タケの稈から出る枝、セイタカアワダチソウの茎から出る葉については資料をもとにして、枝密度関数にあたるものが存在するかどうかを検討することにする。

図-2は、資料として用いた植物の、 Z 方向での枝数の分布を示している。この図は、任意の Z における枝数の分布を意味するが、基本概念の項で述べたように、同時に、 Z の頻度分布をも意味している。すなわち、 Z 方向での枝の分布の問題は、 Z の頻度分布の問題に乗り移る。この図-2に示されるような分布は、どのような関数形を有するのであろうか。すでに述べたように、枝密度関数を取扱うためには、近似式を経験的に誘導する方法しかない。したがって、枝密度関数の関数形を定めるためには、試行錯誤的に最適関数を捜す道しか残されては居ない。

現象の巨視的像を表現する方法として積分方程式は有効である。図-3は、 Z と $N(Z)$ 、 Z と $N'(Z)$ の関係を示している。 $N(Z)$ は、その定義より(16)式の意味するように $\phi(Z)$ の積分方程式である。また、(17)から理解されるように $N'(Z)$ は $\phi'(Z)$ の Z 方向での積分方程式を意味している。したがって、この図-3は、 Z 方向での枝密度関数に対する積分方程式を意味してい

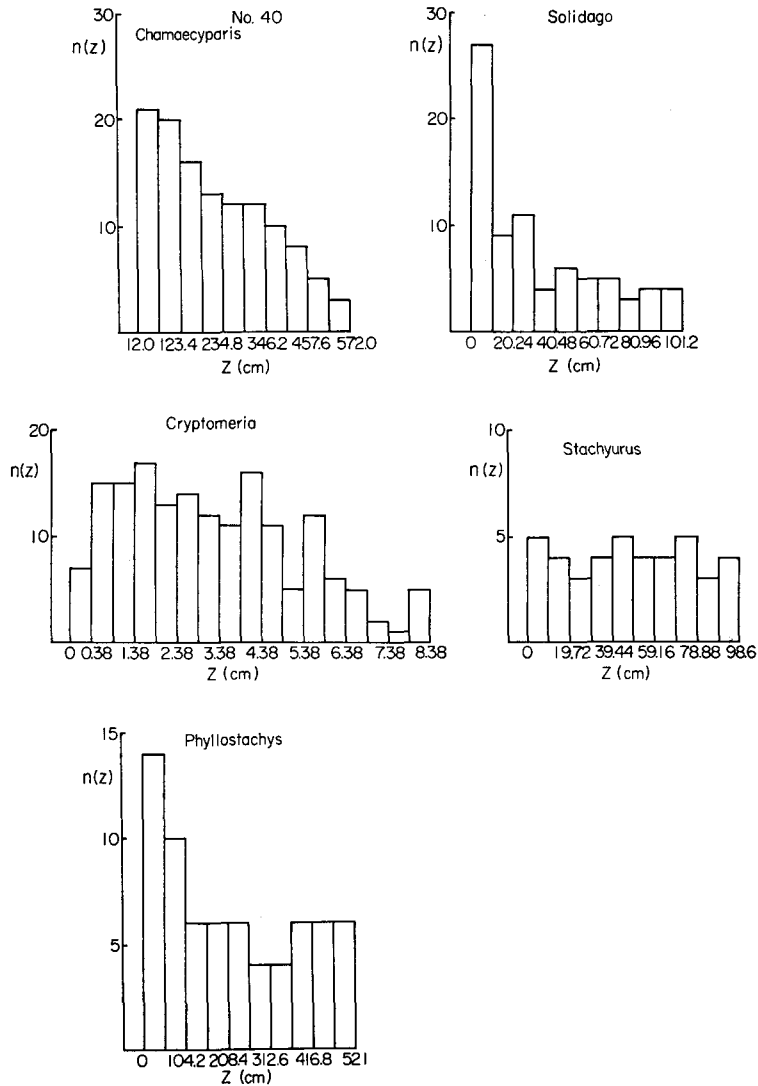


Fig. 2. Distribution of branch number existing in arbitrary distance from tree top.

る。図より、明らかなように、資料に用いた植物について、次の $Z \sim N(Z)$, $Z \sim N'(Z)$ 関係が、経験的に成立していると思われる。すなわち、

スギ (*Cryptomeria japonica* D. Don)

$$\frac{1}{N(Z)} = \frac{A}{Z^h} + B \quad (26)$$

A, B, h ; 定数

ヒノキ (*Chamaecyparis obtusa* S. & Z.)

$$\frac{1}{N'(Z) + n_0} = \frac{A}{Z} + B \quad (27)$$

n_0, A, B ; 定数

キブシ (*Stachyurus praecox* S. & Z.)

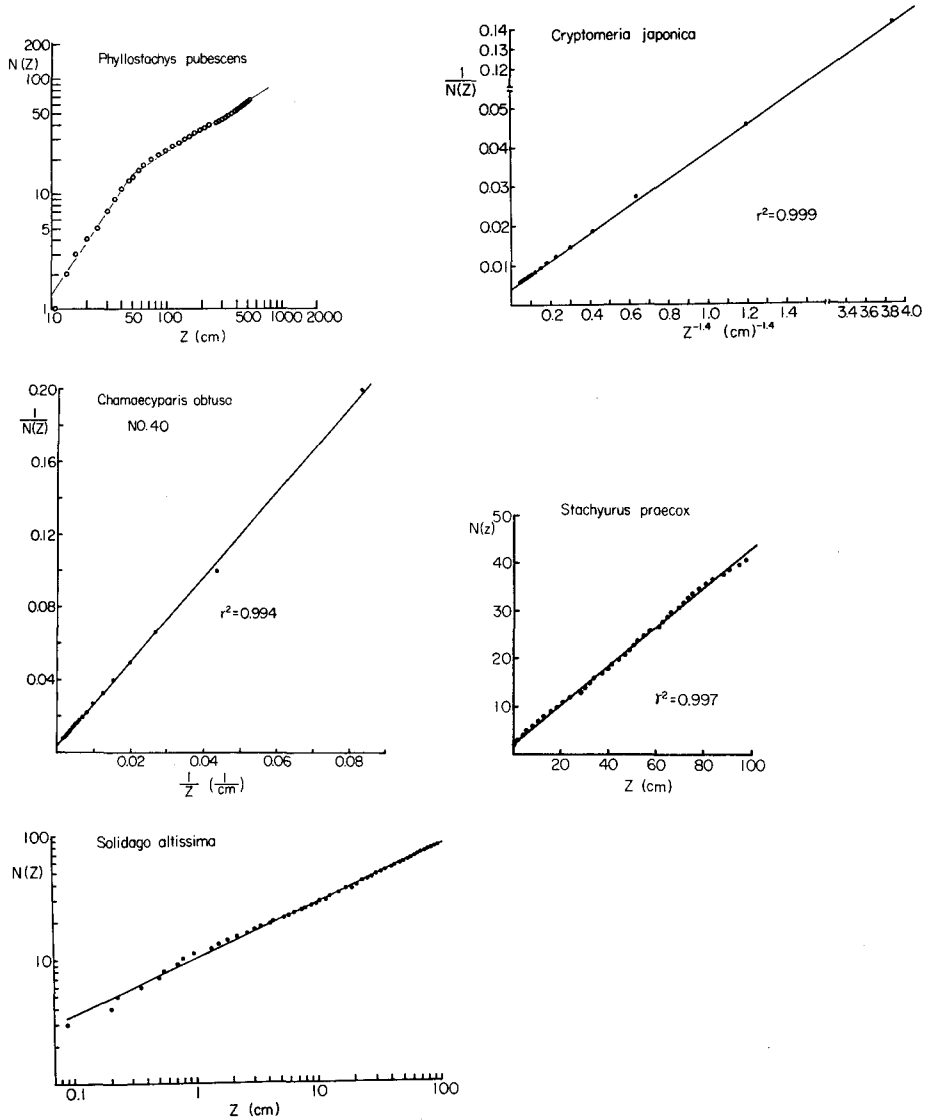


Fig. 3. Relation between $N(Z)$ and Z , where $N(Z)$ indicates the total branch numbers at arbitrary distance from tree top. This diagram means the integral equation of $\phi(Z)$.

$$N(Z) = AZ + B \quad (28)$$

A, B ; 定数

モウソウチク (*Phyllostachys pubescens* M.)

$$N(Z) = AZ^a + BZ^b \quad (29)$$

ただし, $0 \leq Z \leq Z_1$ では $BZ^b = 0$, $Z_1 \leq Z \leq Z_{\max}$ では $AZ^a = 0$. A, a, B, b ; 定数, $a < 1$, $b < 1$.

セイタカアワダチソウ (*Solidago altissima*)

$$N(Z) = AZ^a \quad (30)$$

A, a ; 定数, $a < 1$

図-3は、積分方程式であるため、現象の巨視的傾向を示しているにすぎない。したがって、この傾向がどの程度の安定性を示すかは疑問である。このことを検討するために、図-4の直線回帰モデルの定差図を作製した。

今、独立変数を X 、従属変数を $Y(X)$ とする時、 X と $Y(X)$ の間に直線回帰が成立すると仮定する。すなわち、

$$Y(X) = kX + l$$

k, l ; 定数

ここで X を、その最小値から最大値をおおう全域に渡って、 ΔX の間隔で等分すれば次式が成立する。すなわち

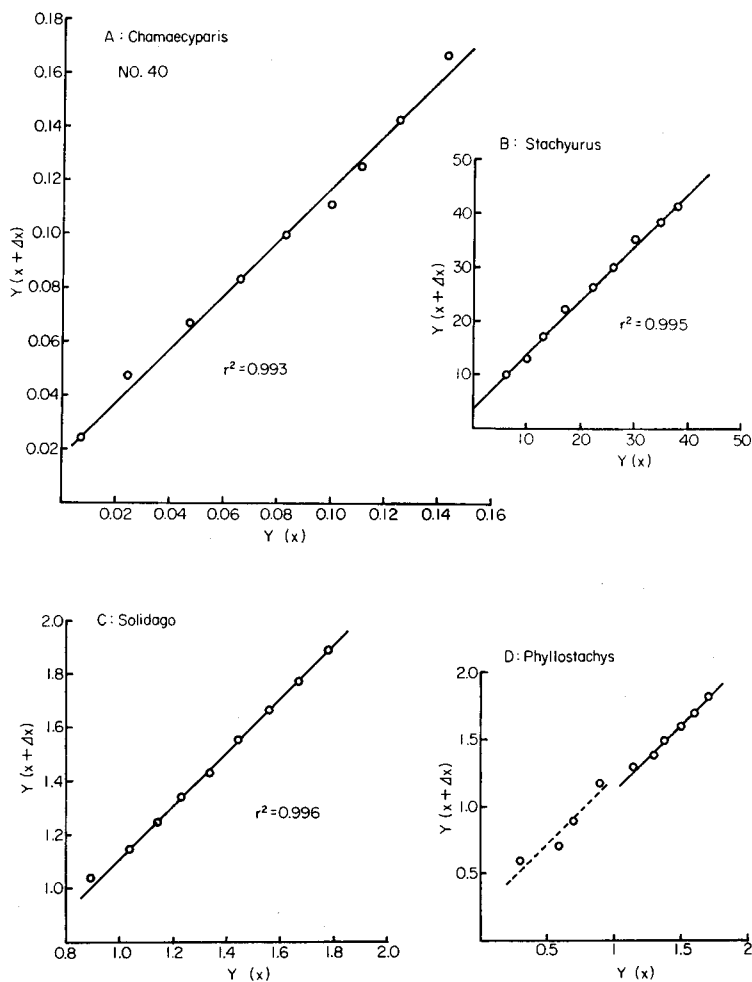


Fig. 4. Difference equation of $Y(X)$, where X shows the newly formed independent variable obtained by transformation of original variable, Z , and $Y(X)$ indicates the new function deriving from transformation of $N(Z)$. Following transformations of Z and $N(Z)$ are conducted in each graphical representation.

For graph A $X=1/Z$ $Y(X)=1/(N'(Z)+n_0)$

For graph B No transformation

For graph C & D $X=\text{Log } Z$ $Y(X)=\text{Log } N(Z)$

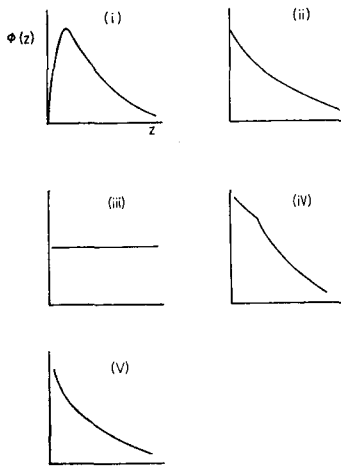


Fig. 5. Some types of $\phi(Z)$ in direction Z .

10等分して得られた定差図である。縦軸は $Y(X+\Delta X)$ を、横軸は $Y(X)$ を示している。これによると、ほぼ勾配が1の安定した回帰が成立していると思われる。なお、この $Y(X)$ は、 $N(Z)$ 、 $N'(Z)$ を変数変換して作られた新たな従属変数を意味する。

(26)~(30)式の $N(Z) \sim Z$ 関係を Z で微分すれば次のように、 $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ を得る。すなわち、

$$\text{i) } \phi(Z) = \frac{AhZ^{h-1}}{(A+BZ^h)^2}$$

$$\text{ii) } \phi'(Z) = \frac{A}{(A+BZ)^2}$$

$$\text{iii) } \phi(Z) = \frac{A}{N}$$

$$\text{iv) } \phi(Z) = \frac{Aa}{N}Z^{-(1-a)} + \frac{Bb}{N}Z^{-(1-b)}$$

ただし、 $0 < Z < Z_1$ では、 $\frac{Bb}{N}Z^{-(1-b)} = 0$ 、 $Z_1 < Z < Z_{\max}$ では、 $\frac{Aa}{N}Z^{-(1-a)} = 0$ 。 $a < 1$ 、 $b < 1$ 。

$$\text{v) } \phi(Z) = \frac{Aa}{N}Z^{-(1-a)}$$

上式の i)~vi) の母数、 a 、 b 、 A 、 B 、 h 、 no はすべて正の数である。このように枝密度関数は多様である。この多様性が何によってもたらされるのかということについては、今の所明らかではない。しかし、枝密度関数が、樹種や、個体の置かれている状況によって異なることは、ほぼまちがいはない。図-5は、この $\phi(Z)$ 、 $\phi'(Z)$ の諸型を示す。i) の型の $\phi(Z)$ は極大値を持つ形式を示し、ii) の型のものは単調に減少するタイプである。v) の $\phi(Z)$ は単調に減少する関数形を示し、iv) は、v) の型のものの、複合型となっている。

4 ヒノキ林における枝密度の解析

枝密度関数の解析例として、ヒノキ人工林の場合について、さらに詳しい検討を試みよう。樹木の幹や枝は、葉から分化したと考えられるものであり、幼樹の場合には、葉と枝の区別、

$$Y(X+\Delta X) = Y(X) + k\Delta X$$

この式は方程式 $Y(X)$ の定差が一定となることを意味する最も単純な差分方程式である。一般的に差分方程式は微分方程式と対応関係にあり、その感度は積分方程式よりもはるかに高い。したがって、積分方程式で観察された現象を確認する方法として、差分方程式は有効な方法の一つである。

(26)~(30)式にみられるように、 $Z \sim N(Z)$ 、 $Z \sim N'(Z)$ 関係を直線回帰に持ち込むためには、場合に応じて色々な変数変換を行わなければならない。その変換は、主に、逆数変換と対数変換である。図-4は直線回帰が成立するように、 $N(Z)$ 、 $N'(Z)$ および Z について変数変換を行なった後に、 Z を変換して作られた新たな独立変数 X を、

葉と幹，幹と枝の区別がつきにくいものである。ヒノキは，この種の樹木の典型であるときえ言える樹種であり，若い部分にあたる梢端に近づく程，葉，枝，幹を識別することが困難になる。このことは，梢端 $Z=0$ からの枝数とその位置を測定することを不可能にする。したがって， $Z=0$ から $Z=Z_{\max}$ に至る $n(Z)$ を資料として得ることはできなかった。そこで，ここでは Z の区間 $[Z_{\min}, Z_{\max}]$ における $n(Z)$ の資料をもとにして問題を論ずる。

4-1 枝密度関数 $\phi'(Z)$ とその母数の決定

すでに，前項の3で述べたようにヒノキ林においては(27)式の $N'(Z) \sim Z$ 関係と，ii) の型の $\phi'(Z)$ が成立する。図-6は，

$$\frac{1}{Z} = X \quad (31)$$

$$\frac{1}{N'(Z) + n_0} = Y(X) \quad (32)$$

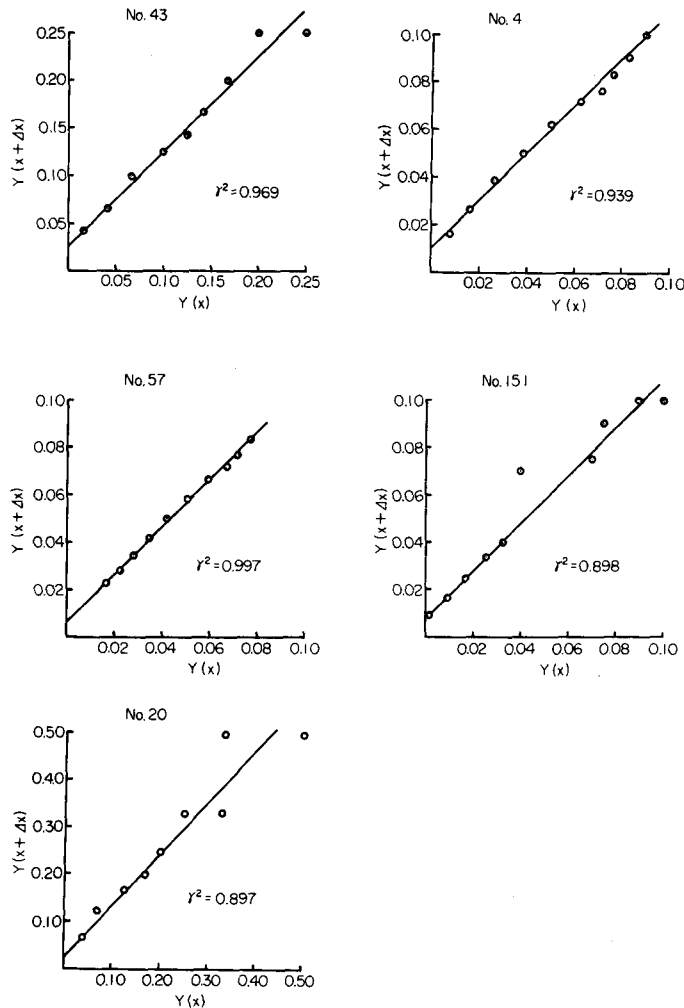


Fig. 6. Difference equation of $Y(X)$ in *Chamaecyparis obtusa* stand, where X and $Y(X)$ show the reciprocal of Z and that of $N(Z)$, respectively.

Table 3. Difference between value of parameter, A , estimated by integral equation and that of A estimated by difference equation

Tree NO.	Value of A estimated by integral equation	Value of A estimated by difference equation
57	2.211 ($r^2=0.998$)	2.269 ($r^2=0.997$)
43	2.702 ($r^2=0.999$)	2.969 ($r^2=0.969$)
151	2.334 ($r^2=0.999$)	2.624 ($r^2=0.898$)
20	2.432 ($r^2=0.996$)	2.552 ($r^2=0.897$)
40	2.335 ($r^2=0.999$)	2.161 ($r^2=0.993$)
4	2.329 ($r^2=0.994$)	2.456 ($r^2=0.939$)

なる変数変換を行なった後、 X の最小値から最大値に至る区間長を ΔX なる巾で10等分した時に得られる $Y(X)$ の差分方程式を示している。縦軸は $Y(X+\Delta X)$ を示し、横軸は $Y(X)$ を示している。これによると点のバラツキの激しいものもあるが、勾配が1で、縦軸に ΔX なる切片を持つ直線回帰が成立していると思われる。このことは(27)式の $N'(Z) \sim Z$ 関係が成立することを保証しているものと考えたい。

表-3は積分方程式で決定した A の値、差分方程式で決定した A の値を示している。 A の次に示してある r^2 は相関係数の2乗を意味する。この r^2 は積分方程式の場合、 $Y(X)$ と X の間の相関を示し、差分方程式の場合、 $Y(X+\Delta X)$ と $Y(X)$ の間の相関を示す。これによると、推定された A の値については、両者の間に大きな差は認められない。したがって、積分方程式でも、かなりの精度で母数を推定することができると思われる。

表-4にヒノキ林の $\phi'(Z)$ に関する母数、 n_0, A, B その他の特性量をかかげる。この表-4の A の値は表-3の A の値の平均値である。 B は A の値を求めた後 $N'(Z) \sim Z$ 関係と $Y(X+\Delta X) \sim Y(X)$ 関係に A を代入して求めた2つの値の平均値である。

4-2 n_0 の性質

n_0 の値は逐次計算を、妥当な相関係数が(27)式で認められるまで反復する方法で求めた。すなわち、 $N'(Z)$ と Z の関係が(27)式で近似されるように、 n_0 の値を $N'(Z)$ に加える操作を反復した。図-7で明らかのように、 n_0 は Z_{\min} との間に次式で近似される関係を持つ。

$$n_0 = 0.4313 Z_{\min} - 1.2996 \quad (33)$$

n_0 を Z_{\min} で微分して、 $d \rightarrow \Delta$ とすると

Table 4. Parameters of branch density function and some observed characteristics of respective tree in *Chamaecyparis obtusa* S. & Z. stand

Tree NO.	A	$B \times 10^{-3}$	Z_{\max} (m)	H (m)	n_0	Z_{\min} (cm)	N'	N
57	2.240	6.5493	2.61	5.93	11	29.0	48	59
43	2.836	7.2021	2.78	8.08	3	11.0	60	63
151	2.479	4.5849	3.45	8.15	0	3.0	86	86
20	2.492	4.5199	6.16	9.88	1	5.0	87	88
40	2.248	3.2409	5.72	10.27	4	12.0	120	124
4	2.393	2.7929	4.76	12.06	9	23.0	115	124

$$\Delta n_0 = 0.4313 \Delta Z_{\min} \quad (34)$$

すなわち、 n_0 の変化量は Z_{\min} の変化量に比例する。このことから次のことを仮定する。

$$n_0 = \sum_0^{z_{\min}} n(Z) \quad (35)$$

すなわち、 n_0 は測定することができなかった Z_{\min} までの総枝数とすると、

$$N' + n_0 = N$$

$$N'(Z) + n_0 = N(Z)$$

$$N' \int_{z_{\min}}^z \phi' dZ + n_0 = N \int_0^z \phi(Z) dZ$$

が成立する。したがって、 n_0 の性質を(35)式のように解釈すると、ヒノキ林で決定された $\phi'(Z)$ と n_0 から $\phi(Z)$ を誘導することができる。すなわち、ヒノキ林の $\phi(Z)$ は次のようになる。

$$\phi(Z) = \frac{A/N}{(A+BZ)^2} \quad (36)$$

4-3 A, B の性質

$\phi'(Z)$ と n_0 から誘導された $\phi(Z)$ をヒノキ林の枝密度関数の完全なものとして、(18)式と(36)式より、

$$BN \left[\frac{-1}{A+BZ} \right]_0^{z_{\max}} = 1 \quad (37)$$

(37)式を整理して

$$\frac{1}{N} \left\{ \frac{z_{\max}(1-NB) - AN}{(A+Bz_{\max})} \right\} = 0 \quad (38)$$

$A, B, N, z_{\max} \geq 0$ とすると、(38)式より

$$A = \left(\frac{1-BN}{N} \right) z_{\max} \quad (39)$$

(39)式は $\phi(Z)$ を規定する3つの母数 A, B, N と z_{\max} の間の関係を束縛する重要な理論的關係である。(39)式は、4つの母数のうち、3つのものが決定されれば、残る一つは自動的に定まることを意味する。ここで $A \geq 0$ の性質から、次の事がわかる。すなわち、

$$B \leq \frac{1}{N} \quad (40)$$

また、

$$\begin{aligned} \lim_{z_{\max} \rightarrow \infty} N &= \lim_{z_{\max} \rightarrow \infty} \sum_0^{z_{\max}} n(Z) \int_0^{z_{\max}} \phi(Z) dZ \\ &= \lim_{z_{\max} \rightarrow \infty} \left(\frac{z_{\max}}{A+Bz_{\max}} \right) = \frac{1}{B} \end{aligned} \quad (41)$$

であるから、 $z_{\max} \rightarrow \infty$ の時の N の値と、 $1/B$ は対応する関係にある。

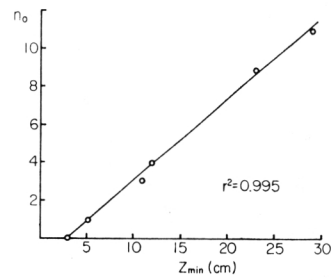


Fig. 7. Linear relation between n_0 and Z_{\min} , where n_0 shows the parameter of probability density distribution function of branch position in *Chamaecyparis obtusa* stand and Z_{\min} indicates the minimum value of Z .

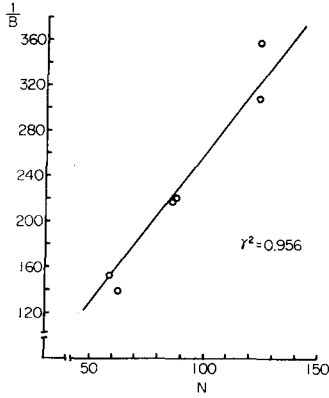


Fig. 8. Simple proportional relation between $1/B$ and N , where B means the parameter of $\phi(Z)$ of *Chamaecyparis obtusa* stand, and N means the total numbers of branches of each tree.

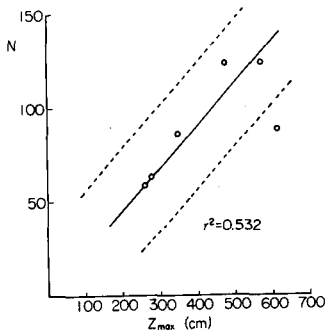


Fig. 9. Loose relation between N and Z_{\max} , where N and Z_{\max} show the total number of branches per tree and the maximum value of Z , respectively.

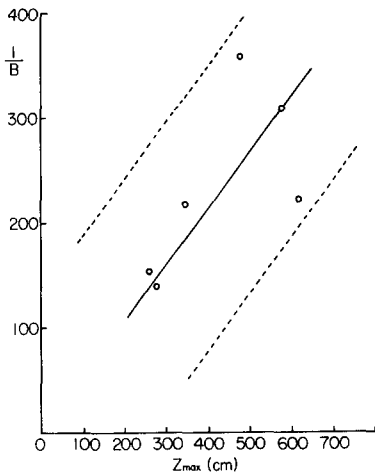


Fig. 10. Relation between B and Z_{\max} .

図-8は $N=N'+n_0$ と $1/B$ の関係を示す。ほぼ比例関係が成立していると思われる。回帰式は次のようになり、両者の相関も高い。すなわち、

$$\frac{1}{B} = 2.614 N = 2.614(N' + n_0) \\ r^2 = 0.9563 \quad (42)$$

図-9は N と Z_{\max} 関係を示している。点のバラツキは大きい、巨視的にみて、ほぼ比例関係が成立していると考えたい。点線は、実測値と推定値の差の標準偏差の3倍の線を示している。この 3σ の範囲からはみ出すものもあるが、このようにバラツキの大きいことは、 Z_{\max} の不安定性によるものと考えられる。回帰式は次のようになる。

$$N = 0.206 Z_{\max} \\ r^2 = 0.532 \quad (43)$$

(42), (43)式より、 $1/B$ と Z_{\max} の関係は次のようになる。

$$\frac{1}{B} = 0.538 Z_{\max} \quad (44)$$

図-10は (44)式の $1/B \sim Z_{\max}$ 関係を示している。非常に激しいバラツキを示し、相関も悪いが、これも Z_{\max} の不安定性にその原因が存在していると思われる。

(42)~(44)式の関係をも (39)式に代入すると、 A は次のようになる。

$$A = \left(\frac{1}{0.206 Z_{\max}} - \frac{1}{2.614 \times 0.206 Z_{\max}} \right) Z_{\max} \\ = 2.996 \quad (45)$$

すなわち、 A の中には Z_{\max} の影響はあらわれず、 A の値は一定となる。この理論的に求められた値と、表-3の A の値の平均値とを比較すると、両者の間には約18%の誤差が存在する。表-3の A の値は、 B , N , Z_{\max} の関係から理論的に求められた値に比して、やや小さく推定されている。図-11は、 A の値を Z_{\max} 方向で観察するものである。理論値よりも、実測値は小さく推定される傾向はあるが、 Z_{\max} 方向で A

は一定となる現象は確認することができる。この A は、次のような影響を $\phi(Z)$ に与える。すなわち、(36)式と(44)式より

$$\phi(Z_{\max}) = \frac{A/N}{(A+BZ_{\max})^2} = \frac{A/N}{(A+1.859)^2} \quad (46)$$

(46)式で A を一定すると $\phi(Z_{\max})$ は N のみの関数となり、その値は N と逆比例する。また(36)式より

$$\phi(0) = \frac{1}{AN} \quad (47)$$

(47)式で、 A を一定とすると $\phi(0)$ は N のみの関数となる。またその値は $\phi(Z_{\max})$ と同様に N 方向で反比例する。したがって A を一定とすると、 $\phi(0)$ 、 $\phi(Z_{\max})$ を規定するものは総枝数 N のみとなり他の変数の影響を受けない。すなわち $\phi(Z)$ は、その両端において N の関数となる。

4-4 平均値, 分散

ヒノキ林における $\phi(Z)$ を(36)式のように定めると、(20)、(21)式より、平均 $\bar{Z}(Z)$ 、分散 $V(Z)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{Z}(Z) &= \int_0^Z Z \frac{A/N}{(A+BZ)^2} dZ \\ &= \frac{A}{NB^2} \left[\ln(A+BZ) + \frac{A+BZ}{A} \right]_0^Z \\ &= \frac{A}{B^2N} \left\{ \ln\left(1 + \frac{B}{A}Z\right) - \frac{1}{1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{Z}} \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

(48)式で $Z \rightarrow Z_{\max}$ のときの平均を考え、 $\bar{Z}(Z_{\max}) = \bar{Z}$ とすると(39)式の関係より、

$$\bar{Z} = \frac{1-BN}{(BN)^2} \left\{ \ln\left(\frac{1}{1-BN}\right) - BN \right\} Z_{\max} \quad (49)$$

(49)式で(42)式を考慮すると、

$$\bar{Z} = 0.4200 Z_{\max} \quad (50)$$

すなわち、 \bar{Z} は Z_{\max} に比例し、その比例定数は BN の値によって決定される。図-12は(50)式の感度を示すもので、横軸に(50)式を用いて Z_{\max} から計算した \bar{Z} の理論値を、縦軸に \bar{Z} の実測値を示してある。非常にバラツキの大きい関係しかみられないが、これは、 Z_{\max} の不安定性によるものである。第一次近似としては、(50)式がほぼ成立していると考えたい。

また分散、 $V(Z)$ は

$$V(Z) = \int_0^Z Z^2 \frac{A/N}{(A+BZ)^2} dZ - \{\bar{Z}(Z)\}^2$$

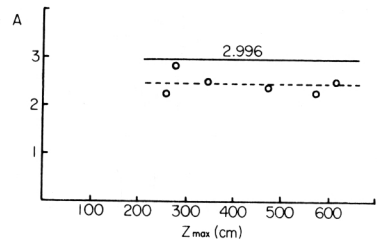


Fig. 11. Diagram showing constancy of parameter, A , in direction of Z_{\max} . Solid line shows the value theoretically calculated and broken line represents the observed mean of A .

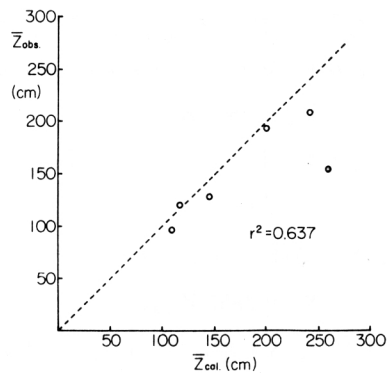


Fig. 12. Relation between observed value of mean of Z and that of calculated, where $Z_{\text{obs.}}$ and $Z_{\text{cal.}}$ indicate the observed value and calculated value, re-spectively. $Z_{\text{cal.}}$ was calculated by equation (50).

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{B^3 N} \left[A + BZ - 2A \ln(A + BZ) - \frac{A^2}{A + BZ} \right]_0^Z - \{\bar{Z}(Z)\}^2 \\
&= \frac{A}{B^3 N} \left\{ BZ - 2A \ln \left(1 + \frac{B}{A} Z \right) + \frac{1}{\frac{1}{BZ} + \frac{1}{A}} \right\} \\
&\quad - \frac{A^2}{B^4 N^2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{B}{A} Z \right) + \frac{1}{1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{Z}} \right\}^2 \quad (51)
\end{aligned}$$

ここで $V(Z_{\max}) = V$ とおくと, (39)式より,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1 - BN}{(BN)^3} \{ 2BN - (BN)^2 + 2(1 - BN) \ln(1 - BN) \} Z_{\max}^2 \\
&\quad - \frac{(1 - BN)^2}{(BN)^4} \left\{ \ln \left(\frac{1}{1 - BN} \right) - BN \right\}^2 Z_{\max}^2 \quad (52)
\end{aligned}$$

すなわち, V は Z_{\max}^2 に比例し, その比例常数は BN の値によって決定される。今, (42)式より, $BN = 0.3826$ とすると, (52)式の V の値は,

$$V = 0.0815 Z_{\max}^2 \quad (53)$$

すなわち, V は原点を通る Z_{\max} の2次関数となる。また, 標準偏差を S とおくと,

$$S = \sqrt{V} \quad (54)$$

(53), (54)式より, 資料に用いたヒノキ林分では, 次のことが期待される。

$$S = 0.2855 Z_{\max} \quad (55)$$

図-13は, S の推定式(55)式の感度を示すものである。横軸に(55)式により, Z_{\max} の値から推定した S の計算値, 縦軸に S の実測値を示してある。この図も他の場合と同様に Z_{\max} の不安定性の影響を示している。

ここで

$$f(BN) = \left[\frac{BN}{1 - BN} \cdot \frac{\{ 2BN - (BN)^2 + 2(1 - BN) \ln(1 - BN) \}}{\left\{ \ln \left(\frac{1}{1 - BN} \right) - BN \right\}^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

とおくと, 変動係数, $C.V$ は,

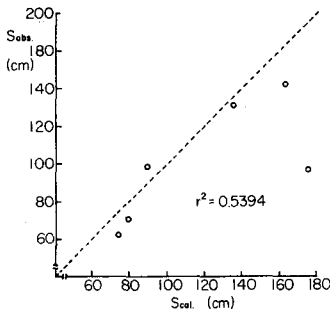


Fig. 13. Correlation between observed value of standard deviation and calculated value of that, where S_{obs} shows observed value and S_{cal} shows calculated value.

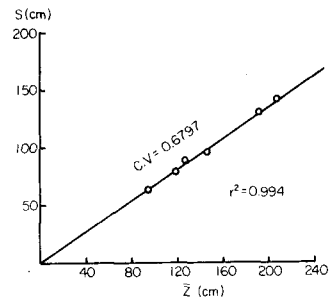


Fig. 14. Proportional relation between observed standard deviation (S) and observed mean value (Z) about Z . This relation explains the stability of coefficient of variation and coincides with the prospect derived from theory of $\phi(Z)$ in *Chamaecyparis obtusa* stand.

Table 5. Observed values of mean (\bar{Z}), standard deviation (S) and coefficient of variation of Z ($C. V$)

Tree NO.	\bar{Z} (cm)	S (cm)	$C. V$
57	95.49	62.13	0.6506
43	119.0	79.02	0.6640
151	126.3	89.17	0.7060
20	146.4	96.09	0.6564
40	207.2	142.9	0.6897
4	191.3	130.8	0.6837

The data in table 4 and table 5 were obtained by field survey in 30-year-old plantation forest of *Chamaecyparis obtusa* S. & Z.

$$C. V = \frac{S}{\bar{Z}} = f(BN) \quad (57)$$

すなわち、区間 $[0, Z_{\max}]$ における変動係数 $C. V$ は BN の関数となる。ここで(42)式より $BN = 0.3826$ とすると、

$$C. V = 0.6797 \quad (58)$$

したがって、資料に用いたヒノキ林では、その変動係数は約68%の値になり、その大きさは他の変数の束縛を受けない。図-14は、(58)式、(57)式の意味するものを示している。図から明らかのように、実測された変動係数は(58)式の値とはまったく一致し、理論の正しいことを証明している。この C, V が安定している現象は、 $C. V$ が Z_{\max} の影響を受けないことや、 BN が適正に推定されていることに起因するものである。

表-5に、区間 $[0, Z_{\max}]$ における Z の平均、標準偏差、変動係数の実測値をかかげる。なお、これらの値を求める時に、 n_0 の処理の問題が生ずるが、ここでは、 n_0 の枝が現実の資料よりも余分に Z_{\min} の所に存在していると仮定して計算を行った。

おわりに

枝が幹から分岐している現象を記述する方法の一つとして、枝密度関数を経験的に誘導し、ヒノキ林分の資料をもとにしてその詳細な解析を試みた。今までに述べて来たように、枝密度関数の解析はかなり有益な情報を引き出すことができると思われる。枝の重量や年令などについて Z との対応関係を知ることができるならば、枝密度関数を令分布や枝重の分布などと対応させて考えることができる。本報は試論的の意味を持つにすぎないが、枝密度関数の解析はかなり興味あるものと考えられる。

本論文を作製するにあたり、綿向森林生産組合の皆様、京大・農・森林生態学研究室の皆様へ深く感謝を申し上げます。

引用文献

- 1) 荻野和彦・森田正彦・四手井綱英：林木の枝量とその生長量(I)，京大演報，**39**，(1967)
- 2) 荻野和彦・尼崎博正・藤森隆郎・四手井綱英：林木の枝量とその生長量(II)，京大演報，**40**，(1968)
- 3) 藤森隆郎：枝打ちに関する基礎的研究 I，生態学的調査資料に基づく枝打ちの考察，林試報，**288**，(1970)
- 4) FUJIMORI, T. : Analysis of forest canopy on the basis of a *Tsuga heterophylla* forest, Jap. Jour. Ecology, (1971)
- 5) OOHATA, S. and T. SHIDEI : Studies on the branching structure of trees, I, Bifurcation ratio of trees in Horton's law, Jap. Jour. Ecology (1971)
- 6) 西田仁・四手井綱英：樹冠の年令構成に関する研究 (I)，16年生クロマツ林について，京大演報，**43**，(1972)

Résumé

This paper deals with a new method useful for the description and analysis of the existing state of branches attached to the stem.

2). The method of derivation of the distribution density function of the branch position on the stem was developed by introducing the cumulative amount, $N(Z) = \sum_0^Z n(Z) = N \int_0^Z \phi(Z) dZ$, in which the meanings of the mathematical symbols are as follows:

Z ; Distance between position of arbitrary branch and tree top (cm).

$n(Z)$; Number of branches at distance Z from tree top (Dimensionless).

$N(Z)$; Total number of branches at Z centimeter's distance from tree top (Dimensionless).

N ; Total numbers of branches per tree (Dimensionless).

$\phi(Z)$; Probability density function of branch number at Z in distance from tree top, namely, distribution density function of $Z(\text{cm}^{-1})$.

2). By using some species of trees the actual functional forms of $\phi(Z)$ were examined. For example, one type of $\phi(Z)$ found in a *Chamaecyparis obtusa* forest was as follows:

$$\phi(Z) = \frac{A/N}{(A+BZ)^2}$$

A, B : Parameter of $\phi(Z)$.

3). In the course of quantitative analysis of $\phi(Z)$ of *Chamaecyparis obtusa*, the advantages of a new approach to the analysis of the branching system of trees were suggested.