最適伐期齢理論の課題と展望

赤尾　健一・有木　純善

Review of the Optimal Rotation Period Theory

Kenichi Akao　Sumiyoshi Ariki

要　旨

成長する森林をいつ伐採すべきかという問題に対する諸経済モデルの集まりを，ここでは最適伐期齢理論と呼ぶ。最適伐期齢理論は森林所有者及び林業経営者に関する主体均衡モデルであり，ミクロ経済学的接近によって森林・林業の経済分析を行なう上での，基礎理論となるものである。本論文は，この最適伐期齢理論の発展を概観し，今後の理論的課題を明らかにしようとするものである。

最適伐期齢理論は，ミクロ経済学における投資の理論や資本の理論の発展にともなって，その内容を豊かにしてきている。その理論は，決定論的定常性下における単一一斉林分の1点投入1点産出モデルとして，これを定式化することから始まった。ただし，1950年代のミクロ経済学の導入期にあっては，最適伐期齢の決定ルールについて少なからぬ混乱があった。それは，費用の概念についての誤った認識によるものである。今日では，理論的に最も適切な決定ルールは，無限の将来にわたって林地から得られる利潤の流列の現在割引価値を最大にするファウストマン式であることが知られている。

このファウストマン式の比較静学分析，つまり，木材価格や利子率などの変化が最適伐期齢と林地価値に及ぼす影響は，今日までに十分検討されている。また，ファウストマン式をさらに現実の世界における伐期選択問題に近づけるための試みが行なわれている。その一つは，1点投入1点産出の仮定に関するものであり，制御理論を応用した最適間伐方策の定式化がみられる。また，定常性の仮定を緩めて木材価格などの変化を許すモデルが発表されている。木材価格の変化を仮定したモデルでは，最適伐期齢決定問題は等号制約条件付最適化問題に帰着する。

林業投資は不確実な将来に対する意思決定であり，またそれは非常に長期的な時間視野のもとに行なわれる。この点からすれば，ファウストマン式の拡張において最も重要なものは，不確実性下におけるモデルの再定式化である。しかも，林業，森林の特質を考えると，それは多段階の意思決定問題として定式化される必要がある。現在，危険中立者の仮定の下でこのようなモデルがいくつか発表されている。ただし，現実の多くの経済主体は危険回避者として行動すると考えられ，最適伐期齢理論をより現実に近づけるためには，危険回避者を前提としたモデルが求められている。しかし，多段階の逐次決定モデルとして，この要望を満たすモデルは未だなく，この点が最適伐期齢理論の課題と言える。

1．は じ め に

本論文は最適伐期齢理論の展開の過程をたどり，現段階におけるその理論的課題を明らかにするものである。最適伐期齢の決定問題，すなわち成長する森林をいつ伐採すべきかという問題は，それ自身興味深い問題である。しかしながら，それは単に知的好奇心を満たすだけのものではなく，森林，林業をめぐる経済現象を分析するための基礎理論となるものであり，また，時間を通じて森林資源をいかに適正に利用すべきかという規範的な問題に対する考察の手がかりを与える。

19世紀ドイツの純収穫論争に見られるように，伐期齢の決定問題は長い歴史を持っている。また，チューネン〔21〕を初めとして，経済学者もこの問題に古くから関心を抱いてきた。しかしながら，本格的な理論の展開は比較的新しく，1960年代以降になってからのことである。それはミクロ経済学における投資の理論や，資本の理論の発展に伴うものであった。

最適伐期の決定問題は，決定論的定常性下における単一一斉林分の伐期選択問題の定式化から始まった。この問題に対して1960年代，ミクロ経済学の理論が援用されたが，その結果，伐期選択のルールとして異なる3つの決定ルールが提示されることになる。当時の林業経済の文献は，ある決定ルールの正当性を主張したり，あるいは並列的に述べてみたりしており，最適伐期齢理論は論争，ないしは混乱の状態にあった。何人かの経済学者及び林業経済学者は，この問題に対して理論的にみて適切な決定ルールを選択していたが，積極的に他の決定ルールの誤りを指摘し，混乱状態に終止符を打ったのはサミュエルソン〔19〕である。

このような決定ルールに関する論争と並行して，そして今日に至るまで，最適伐期齢理論はさまざまな拡張が試みられている。それは，決定論的定常性下におけるモデルの精緻化や定常性の仮定の緩和，さらに将来の不確実性を考慮した確率的モデルなどである。特に近年では，確率的モデルが盛んに発表されるようになっている。

以下，本論文では，単一一斉林分を対象に，まず決定論的モデルを取り上げ，3つの決定ルールと論争に決着をつけたサミュエルソンの主張を考察する。そして，適切な決定ルールの下での理論の進展を見る。次に，確率的モデルを取り上げ，その理論の動向を検討する。最後に最適伐期齢理論の今後の課題を述べる。

2．最適伐期齢決定モデル

2—1　基本モデル～ファウストマン式

本項で扱うのは，決定論的定常性下における最適伐期齢決定の理論である。ここでのモデルは，最適伐期齢のモデルとして最も単純なものであり，強い仮定が置かれている。以下，その仮定を述べるが，これらの仮定のうちいくつかは，後の項で緩められる。

［仮定］

1．　完全競争市場の仮定：森林所有者の行動は生産要素と産出物の価格や，利子率に影響を及ぼさない。林地は自由に売買，貸借することができる。また，将来の諸価格，利子率及び木材の収穫量を森林所有者は知っている。

2．　定常性の仮定：生産要素価格，木材価格，利子率は，現在から将来の全期間にかけて一定である。生産要素価格のうち，賃金率を w で表わす。利子率は r で表わす。ただし r は連続型で表現される時間 t に対応する瞬間的利子率である。

3） 異時点1点投入1点産出（point-input point-output, time phased）の仮定：投入は植林時点ですべて行なわれる。また，収穫は一挙に行なわれ，間伐による収穫は考えない。
4． 単位材積当りの立木価格（p）は林齢に関わらず一定である。
5． 森林の外部性（公益的機能）は考慮しない。
6． 木材の収穫量（Q）は林地面積（M），労働投入量（L），林齢（T）の関数である。生産方式は一種類だけであり，生産要素である林地と労働力の結合比率は固定的である。また，規模に関して収穫一定である。以上を定式化すると

$$Q=Q(M,L;T) \tag{1}$$
$$\lambda Q=Q(\lambda M,\lambda L;T) \tag{2}$$

これより，単位面積あたりの収穫量（f）に関する関数が得られる。この関数について，次のような仮定をおく。単位面積あたりの収穫量は，閉区間［a, a′］において極大値を持つ少なくとも2回連続微分可能な凹関数で示される。すなわち，

$$f=\frac{Q}{M}=Q\left(1,\ \frac{L}{M};\ T\right)=f(1\ ;\ T)=f(T),\ \frac{L}{M}=l(\text{一定}),\ f(T)\in C^2$$
$$\text{ある}T^0\in[a,\ a']\text{で},f'(T^0)=0,\ \text{すべての}T\in[a,\ a']\text{で},f''(T)<0 \tag{3}$$

である。ここでは $T=a$ は，伐採収穫可能な最初の時点を示している。また，l は単位面積あたりの労働投入量である。

以上の仮定の下で，一定の面積の林地から無限の植伐によって得られる利潤の現在割引価値を最大にするファウストマンの伐期が，今日では理論的に適切な伐期であるとされている。これは，得られる利潤を林地に帰属するものと見なすことから土地純収益説と呼ばれている。決定論的定常性下においては，その植伐が何回目のものであっても，最適な伐期は変わらないことに注意すれば，このファウストマンの伐期は，$V(T)$を単位面積の林地から得られる利潤の流列の現在割引価値の和（土地期望価）として，次のように定式化できる[1]。

$$\underset{T}{\mathrm{Max}}:\ V(T)=\sum_{n=1}^{\infty}[pf(T)e^{-rT}-wl]e^{-r(n-1)T}=[pf(T)e^{-rT}-wl](1-e^{-rT})^{-1} \tag{4}$$

1階の条件は

$$pf'(T)-r[pf(T)+V(T)]=0 \tag{5}$$

であり，これは森林の価値の増加分が森林自身の価値と林地の価値（土地期望価）の和から発生する機会費用と等しくなる時点で伐採をするのが最適であるとするものである。ルーズな言い方をすれば，これ以上森林をおいておくよりは，伐採して再造林するか，林地ごと販売してしまって銀行に預ける方が有利となる伐期である。

2階の条件は

$$V(T)=[pf''(T)-rpf'(T)]e^{-rT}(1-e^{-rT})^{-1}<0$$
$$(T<T^0\text{で},f'(T)>0,\text{また},\text{すべての}T\in[a,\ a']\text{で},f''(T)<0) \tag{6}$$

であり，1階の条件で示される伐期が，大域的に最適な伐期であることを示している。

すでに述べたように，1960年代のミクロ経済学の最適伐期齢理論への導入期にあっては，ファウストマン式以外の決定ルールがいくつか示された。それは，ボールディングの（平均）内部収益率最大の伐期とフィッシャーの1回の植伐における収益の現在割引価値最大の伐期である。

ボールディングの伐期を支持するのは，ゴンドレー［11］である。ゴンドレーはボールディング［7］，シトフスキー［20］に依拠して，投資問題とは所与の固定要素をどのように有効に投資するかであるとする。もし，なんらかの生産要素が固定的であれば，つまりある生産要素が市場で調達できず，その利用が制約されているならば，その生産要素がもたらす利潤の流列の現在割引価値の総和を最大化することが最適な投資政策であり，もし，そのような制約条件がないのであれば，全ての生産要素を含めた所有資本全体が固定要素となるから，資本の増殖率，すなわち内部収益率の最大化が，最適な投資政策であるとする。この考え方に従って，ゴンドレーは林業における固定的な生産要素とは何かを検討している。検討されているのは，企業者（能力）と林地である。まず，企業者については「完全競争の下では，企業者の人的な制約は，会社の規模を制約しない。企業者の仕事はいずれも，数人のプロダクション・マネージャーのうちの誰かが代表して行なったり，分担したりすることができる。」というシトフスキーの結論を引用して，これを固定要素ではないとしている。次に，林地については，もし林地が固定要素であるならば行なわれているだろう土地集約的な経営が，カナダでは現実に行なわれていないこと，育林生産に利用されている林地の近くに，条件はさほど違わないのに利用されていない土地があり，政府はその土地を企業が利用することに対して制約を課そうとはしていないことから，固定要素とは見なさない。ゴンドレーの結論は，カナダの林業経営において固定的な生産要素はないと見なしてよく，伐期選択の基準は資本の内部収益率であるということである。さらに彼はボールディングにならって，内部収益率を投資基準とすることの利点は，最適伐期齢が利子率の影響を受けないことだと述べている。

一方，フィッシャーの伐期について，ここではベントリー＝ティーガーデン［6］の所説を述べる。彼らは，ファウストマンの伐期やボールディングの伐期などいくつかの決定ルールを比較しているが，これらの決定ルールのいずれを採用するかは，ゴンドレー同様，林業経営において，どの生産要素が固定的であるかに依存するとしている。林地が固定的な場合にはファウストマンの伐期が，所有資本が固定的な場合にはボールディングの伐期が最適な伐期であるとする。フィッシャーの伐期が最適伐期となるのは，企業者が固定的な場合であり，フィッシャーの伐期によって得られた利潤を企業者に帰属するもの，経営者報酬と解釈している。彼らの論文の特徴は，それまで重要視されていなかった林地価格を考慮した点にあり，外生的に与えられる林地価格を考慮したフィッシャーの伐期を「一般的な現在価値モデル」と呼んでいる。また，定常性の仮定の下では，何回目の植伐であっても，フィッシャーの最適伐期は変わらないから，「一般的な現在価値モデル」が示す最適伐期は，無限回の植伐問題における最適伐期でもあると彼らは述べている。

このような「林業経営における固定的生産要素」を鍵概念に，最適伐期の決定ルールを選択しようとする考え方は，サミュエルソンによって批判されることになる。

サミュエルソンは1974年ワシントン大学で行なわれた「保続収穫林業の経済学」というシンポジウムにおいて「発展社会における林業経済学」と題する講演を行なっている。この講演の中で，土地の私的所有や国有林の利用規制が全くなくなれば，完全参入自由の条件の下では，森林は消滅するか，仮に残ったとしてもその伐採齢は異常に低くなることを述べ，林業が行なわれるのは，林地所有者によるかあるいは所有者より借地をした者によることを強調する。そして，自らその所有地で林業を行なうものは他の人に林地を貸したときに得られる地代収入をあきらめるという意味で機会費用が発生すること，一方，借地林業の場合は具体的に借地料を支払わねばならないことを説く。従って，完全競争市場の前提の下では，林地から得られる利潤の最大値が林地の価格となり，ファウストマンの伐期以外は，この地代を賄えない。例えば，林地価格を考慮

しないボールディングの伐期では短かすぎ，フィッシャーの伐期では長すぎて，地代を賄えないという。

以上のサミュエルソンの主張は，ゴンドレーにせよ，ベントリー＝ティーガーデンにせよ，費用の概念を正確にとらえていないことに対する批判であるといえる。ある生産方式を採用することは，他の生産にその生産要素を投じた際に得られる利潤をあきらめることを意味する。費用とは，他の生産の機会をあきらめるその犠牲の大きさで測られる機会費用である。ここでのモデルでは，林地の利用の仕方（すなわち，１回の植伐にどの程度長く林地を利用するか）以外，生産方式は固定されている。このことは，労働力の機会費用は所与の w で与えられるけれども，林地の機会費用は，選択した伐期以外の伐期において得られる利潤の流列の現在割引価値の最大値で与えられることを意味する。そして，ファウストマンの伐期以外は，この機会費用を賄うことができない。従って，ベントリー＝ティーガーデンのように，林地価格を所与として，得られた利潤を経営者報酬に帰するのは誤りである。また，モデルそのものはなんら生産要素の投入に制約を与えていないのだから，固定要素に関わる議論はここでは問題とはならない。ゴンドレーは，カナダの制度的条件から固定的な生産要素はないとしているが，モデルの前提そのものが，固定的な生産要素を考えていないのである。ただし，ゴンドレーの主張する内部収益率最大の伐期も，林地の機会費用を考慮すれば誤りではない[2]。実際のところ，３つの決定ルールが示す伐期は，林地の機会費用を考慮すれば一致する。このことは次のように示される。

完全競争市場の仮定の下，ファウストマン式で与えられる最適伐期を T_F，対応する林地価格を $V(T_F)$ で示す。まず，ボールディングの伐期についてみると，内部収益率を ρ として，その最適伐期は次式（７）を最大化するものである。

$$\rho=\frac{1}{T}\{\log[pf(T)+V(T_F)]-\log[wl+V(T_F)]\} \tag{7}$$

１階の条件は

$$\frac{d\rho}{dT}=\frac{1}{T^2}\left[\frac{pf'(T)}{pf(T)+V(T_F)}\cdot T-\rho T\right]=0 \tag{8}$$

であり，これより

$$pf'(T)-\rho[pf(T)+V(T_F)]=0 \tag{9}$$

が導かれる。省略するが２階の条件は ［a，a′］ で常に負であり，（７）（９） を満たす最適解 $(\rho,\ T)$ は一意的に定まって，$\rho=r$，$T=T_F$ の時である。

一方，林地価格を考慮したフィッシャーの伐期は，次式で示される現在割引価値 (PV) を最大化するものである。

$$PV=[pf(T)+V(T_F)]e^{-rT}-[wl+V(T_F)] \tag{10}$$

１階の条件は，

$$\frac{dPV}{dT}=[pf'(T)-rpf(T)-rV(T_F)]e^{-rT}=0 \tag{11}$$

すなわち，

$$pf'(T)-r[pf(T)+V(T_F)]=0 \tag{12}$$

であり，(12) を満たすのは，$T=T_F$ の時である。

このように，ボールディングの伐期もフィッシャーの伐期も，林地の機会費用を考慮する限り，

決定ルールとして誤りではないが，いずれにせよファウストマン式で与えられる伐期と一致する。最適伐期齢の理論における基本モデルとしては，ファウストマン式が必要にして十分であるといえる。

2―2　ファウストマン式の比較静学分析

ファウストマン式の比較静学分析は，ヨハンソン＝レフグレン [13] によってまとめられている。その内容は，最適伐期に対する影響と林地の価値に対する影響とに分けられている。ここではその結果を一部変形，あるいは付加して示す。

伐期に対する影響は，次のようなものである。

① 立木価格の上昇は最適伐期齢を短くする。
② 賃金率の上昇は最適伐期齢を長くする。
③ 利子率の上昇は最適伐期齢を短くする。
④ たとえ木材価格が上昇しても，同時に賃金率が上昇して相対価格が変わらないのであれば，最適伐期齢は変化しない。
⑤ 立木販売に課せられた税（sales tax）は，最適伐期齢を長くする。
⑥ 賃金支払いに課せられた税（payroll tax）は，最適伐期齢を長くする。
⑦ 実現主義の資本利得税（capital gains tax on a realization basis）は，最適伐期齢に影響を与えない。
⑧ 発生主義の資本利得税（capital gains tax on an accrual basis）は，最適伐期齢を短くする。
⑨ 一括税（annual lump sum tax：収入の多寡にかかわらず，経営体に課せられる定額税）は，最適伐期齢に影響を与えない。

次に，林地の価値に対する影響について。ここでいう林地とは最適伐期齢に達しない任意の林齢（b）における林地である。ヨハンソン＝レフグレンは，ベルマンの最適性原理（「最適経路の中のどの部分をとっても，その部分経路はやはり最適経路である」とする定理）から任意の林齢の森林における最適伐期齢は無立木地における最適伐期齢と一致することを述べ，また，各変数の影響，例えば立木価格の変化は伐期の変化と立木価格の変化という２つの変化を引き起こすが，包絡線定理から伐期の変化による影響を無視できること[3)]を述べた後，その比較静学の結果を示している。ただし，彼らは再造林を立木販売の結合生産，すなわち立木販売後かならず植林が行なわれることを前提として，純立木価格を立木価格から再造林費用を差し引いたものとしており，育林のための投入を明示的に取り上げていない。このことは，森林が造成された最初の造林費用を考えないことを意味しており，最初の造林費用を沈下コスト（過去に投入されたコストで，今となっては回収できない費用）と見なして無視すると考えない限り，理論的に矛盾する。この結合生産の仮定はモデルの扱いを容易にするが，はたして現実的な仮定かどうかは議論の分かれるところのように思われる。そこで，ここでは，育林投資を明示的に取り入れた結果を示すことにする。

⑩ 立木価格の上昇は，森林の林齢に関わらず林地価値の上昇をもたらす。林地価値の立木価格弾力性は次式（13）で表わされる。

$$\varepsilon_p = \frac{pf(T)}{pf(T) - wl} > 1 \tag{13}$$

⑪ 賃金率の上昇は，森林の林齢に関わらず林地価値の下落をもたらす。林地価値の賃金率弾力性は次式（14）で表わされる。

$$\varepsilon_w = \frac{-wl}{pf(T)-wl} < 0 \tag{14}$$

⑫ 利子率の上昇は林地の価値を減少させる。林地価値の利子率弾力性は次式（15）で表わされる。

$$\varepsilon_r = r[b - \frac{T}{1-e^{-rT}}] < 0 \tag{15}$$

⑬ あらゆる税は林地の価値を減少させる。

これらの結果のうち，伐期に関する①と⑤，②と⑥は形式的には同じことを言っているに過ぎない。①は，伐出条件の違いが伐期に及ぼす影響としても解釈することができる。すなわち，他の条件を一定として，伐出条件の悪いところでは立木価格が低くなるから最適伐期は相対的に長くなる。また，税の影響については，これは負の補助金だから，比較静学の結果を反対に読み変えることで，ただちに補助金が伐期及び林地の価値に及ぼす影響を知ることができる。なお，①，②の結果から，近年のわが国における林家の長伐期志向を，木材価格の低迷と労賃の相対的上昇から説明することもある程度可能であろう。しかし，これまで見てきたファウストマン式は強い仮定をもった，最も単純なモデルであることに注意しなければならない。現実の動きを説明するには，仮定を緩め，さらに複雑な要素を加えたうえで検討すべきである。

なお，林地の価値に関して，ヨハンソン＝レフグレンの結合生産の仮定の下での結果を述べると，⑩では，その弾力性が1となる。⑪は，$wl=0$ と一定なので考えることができない。⑫，⑬の結論は変わらない。

2－3　ファウストマン式の拡張（1）～最適間伐方策

施業が異時点間で行なわれ，その施業内容によって主伐材の木材価格および間伐材価格が変化するのが，現実の育林生産の姿である。その点からすれば，ファウストマン式における1点投入1点産出の仮定は，あまり現実的とは言えない。そこで，異時点間の施業の選択を含む形にファウストマン式を再定式化すると次のようになる。

$$\underset{T}{\mathrm{Max}}: V(T) = (S(T)e^{-rT} + \int_0^T C(t)e^{-rt}dt)(1-e^{-rT})^{-1} \tag{16}$$

（16）式の$S(t)$ は単位面積あたりの t 林齢における立木の価値を示す。立木価値が少なくとも負になることはないと考えれば，$S(t) \geqq 0$ なる制約条件が付される。また，0林齢の立木価値 $S(0)=0$ とする。立木価値の時間変化（$\dot{S}(t)$）は，その時点での森林の状態と施業に依存する。森林の状態を立木価値で表わすと，$\dot{S}(t)$ は，次の関数関係で表わされる。

$$\dot{S}(t) = \phi^1[S(t),\ u(t),\ t] \tag{17}$$

ここで，$u(t)$ は t 林齢での施業内容を示すベクトルである。例えば，u_1：下刈，u_2：枝打，u_3：劣勢木の除間伐，u_4：優勢木の間伐，……といったように，その成分は異なる施業内容を示す。各時点における施業の実行可能範囲は限られているから，実行可能範囲を $U(t)$ で示すと，$u(t)$ には次のような制約条件が加えられる。

$$u(t) \in U(t) \tag{18}$$

（16）式の $C(t)$ は t 林齢における施業による収支を示している。施業の中には，下刈や枝打のようにその時点では単に支出のみのものと，収入間伐のように収入を伴うものがあるから，$C(t)$ は，正にも負にもなる。従って $C(t)$ には特に制約条件はない。また，各時点での収支 $C(t)$

の大きさは，その時点での森林の状態と施業の内容の両方に依存する。このことは次のような形で定式化できる。

$$C(t)=\phi^2[S(t),\ u(t),\ t] \tag{19}$$

以上（16）（17）（18）（19）で示される問題は，最適制御問題の応用であり，以下の手順で，最適主伐収穫期（T^*），最適立木価値成長（$S^*(t)$），最適施業方策（$u^*(t)\in U(t)$）が満たすべき必要条件を，求めることができる。そのためにまず，$x(t)$ なる変数を，導入する。$x(t)$ は，

$$\dot{x}(t)=C(t)e^{-rt}=\phi^2[S(t),u(t),t]e^{-rt},\quad x(0)=0 \tag{20}$$

であり，（20）より，

$$x(T)=x(0)+\int_0^T\dot{x}(t)dt=\int_0^T\phi^2[S(t),u(t),t]e^{-rt}dt \tag{21}$$

である。また，$S(t)\ \geqq 0$ なる不等号制約条件は，非線形計画法におけるクーン＝タッカーの条件により，未定乗数 $\lambda_0(t)$（$\geqq 0$）を用いて，

$$\lambda_0(t)S(t)=0 \tag{22}$$

なる等号制約条件に変換することができる。

（21），（22）を考慮して，最適主伐期と最適施業方策を求める問題を，最適制御問題として再定式化すると以下のようになる。

$$\underset{\{u(t)\},\ T}{\mathrm{Max}}:\ [S(T)e^{-rT}+x(T)](1-e^{-rT})^{-1}$$

subject to (17), (18), (20), S(0) = 0, $x(0)=0$,

$$S(T)=\text{自由},\ x(T)=\text{自由},\ T=\text{自由},\ \lambda_0(t)\ S(t)=0 \tag{23}$$

$S(t)$，$x(t)$ を状態変数，$u(t)$ を制御ベクトル変数と見なせば，この問題は，固定始点・自由終点・自由計画期間を持つメイヤー型の非自律的・確定的最適制御問題である（この言葉の用法は板垣［1］による)。そして，最適制御問題における最適解の必要条件をまとめたポントリャーギンの最大原理により，問題（23）の最適計画期間（最適主伐期）T^*と最適解 $\{S^*(T),\ x^*(T),\ u^*(t):\ t\in[0,\ T^*],\ u^*(t)\in U(t)\}$ の満たすべき必要条件が得られる[1]。まず，ハミルトン関数と呼ばれる関数 H を定義する。

$$H[S(t),\ x(t),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ u(t),\ t]\equiv\lambda_1(t)\phi^1[S(t),\ u(t),\ t]+\lambda_2(t)\phi^2[S(t),\ u(t),\ t] \tag{24}$$

ここで，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$ は，随伴変数と呼ばれる未定乗数である。ポントリャーギンの最大原理によれば，随伴方程式

$$\dot{\lambda}_1(t)=-\partial H^*/\partial S(t), \tag{25}$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=-\partial H^*/\partial x(t)=0\quad(\therefore\lambda_2(t)=\text{一定}) \tag{26}$$

を満足する連続関数 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$ と，$\lambda_0(t)\ \geqq 0$，$\lambda_0(t)S(t)=0$を満たす未定乗数 $\lambda_0(t)$ が存在し，$(\lambda_0(t),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t))\neq\mathbf{0}$，かつ次の条件を満たす。

1） 任意の $t\in[0,\ T^*]$ に対して，

$$\underset{u(t)}{\mathrm{Max}}\ H[S^*(t),\ x^*(t),\ \lambda_1(t),\lambda_2(t),u(t),t]=H[S^*(t),x^*(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),u^*(t),t]$$
$$\equiv H^*[S^*(t),x^*(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),t] \tag{27}$$

2）

$$\lambda_1(T^*)=\partial\{S(T^*)\exp(-rT^*)[1-\exp(-rT^*)]^{-1}\}/\partial S(T)=[\exp(rT^*)-1]^{-1} \tag{28}$$

$$\lambda_2(T^*)=\partial\{x(T^*)[1-\exp(-rT^*)]^{-1}\}/\partial x(T^*)=[1-\exp(-rT^*)]^{-1}=\lambda_2(t)=\text{一定} \tag{29}$$

3） 最適な計画期間［0，T*］にわたり，

$$\begin{aligned}H^*[S^*(t),x^*(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),t]&=\partial\{[S^*(T^*)\exp(-rT^*)+x^*(T^*)][1-\exp(-rT^*)]^{-1}\}/\partial T^*\\&\quad+\int_{T^*}^{t}\{\lambda_1(\tau)(\partial\phi^1/\partial\tau)+\lambda_2(\tau)(\partial\phi^2/\partial\tau)\}d\tau\\&=r[x^*(T^*)-S^*(T^*)]\exp(-rT^*)[1-\exp(-rT^*)]^{-2}\\&\quad+\int_{T^*}^{t}\{\lambda_1(\tau)(\partial\phi^1/\partial\tau)+\lambda_2(\tau)(\partial\phi^2/\partial\tau)\}d\tau\end{aligned} \tag{30}$$

以上の結果から，立木の価値成長の関数（17）と施業費用の関数（19）が与えられれば，最適主伐期と最適施業方策の必要条件を，具体的に得ることができる。以下では，問題を収入間伐に限って，最適間伐方策を求めたクラーク［10］のモデルの結果を紹介する。間伐問題は，クラーク以外にもネスルント［17］などによって取り上げられているが，ネスルントのモデルは，立木の価値成長と費用の関数とをやや一般化し過ぎていて，あまり有意義な結論が得られていない。一方，クラークのモデルは問題を少し単純化しているが，それだけ，その結果の経済的な意味は明確である。なお，彼らの問題の解法は，上に示したような最適主伐期と最適施業方策を同時に決定するものではなく，共に主伐期（T）が既に与えられているものとして，T の関数として最適間伐方策を求め，さらに最適な主伐期（T^*）を求めるというように2段構えになっている。

クラークのモデルは，単位材積あたりの木材価格（P）が，主伐，間伐に関わらず，また林齢に関わらず，一定であると仮定されている。また，単位材積あたりの伐出費用に関して，林分密度にのみ依存すると仮定されている。まず，森林の成長量を次のように表わす。

$$\dot{f}(t)=\eta(t)\xi(f)-h(t) \tag{31}$$

ここで，$f(t)$：単位面積の t 林齢の森林の利用材積（状態変数），$f(t)\geqq 0$，
$\eta(t)$：林齢に依存する材積成長を表わす関数，$\eta(t)>0$，$\eta'(t)<0$，
$\xi(f)$：林分密度に依存する材積成長を表わす関数，ξ は極大値を持つ正の凹関数，
$h(t)$：t 林齢での間伐量（制御変数），$h(t)\geqq 0$

である。すなわち森林の蓄積量（利用材積）の変化は，その林齢と林分密度によって規定され，そこから間伐量を差し引いたものである。さらに，単位材積あたりの伐出費用を，間伐について $C=C(f)$，主伐について $C_T=C_T(f)$ とする。伐出費用関数は，間伐，主伐ともにその時点での森林の蓄積（利用材積）によって決まる正減少関数であるとする。すなわち，単位材積あたりの伐出費用は森林の蓄積が大きいほど割安となる。また，間伐は常に主伐より割高になると考えて，すべての f に対して，$C>C_T$ とする。

以上から，まず，ある伐期 T が与えられたときの最適間伐方策を求める。間伐及び主伐による利潤の現在割引価値 PV は

$$PV=e^{-rT}\{P-C_T[f(T)]\}f(T)+\int_0^T e^{-rt}\{P-C[f(t)]\}h(t)dt \tag{32}$$

で与えられる。

最適間伐方策の決定は，（32）で示される目的汎関数（定義域が関数空間に含まれるような関数）を（31）及び状態変数と制御変数に関する制約条件のもとに最大化する最適制御問題であり，

固定始点・自由終点・固定計画期間・状態制約を持つ，非自律的・確定的・ボルツア型の割り引かれる場合の最適制御問題である（この言葉の用法は板垣［1］による)。以下，ポントリャーギンの最大原理に従って，最適間伐方策 $\{h^*(t)\}$ と最適森林利用材積 $\{f^*(t)\}$ が満たすべき必要条件を示す。割り引かれる場合の最適制御問題では，通常のハミルトン関数の代わりに現行価値ハミルトン関数 H_c（ハミルトン関数に e^{rt} を乗じたもの）を，通常の随伴変数の代わりに現行価値乗数 $q(t)$（随伴変数に e^{rt} を乗じたもの）を用いることにより，最適解の必要条件を簡潔に示すことができる。

まず，現行価値ハミルトン関数は次のように定義される。現行価値乗数を $q(t)$ として，

$$
\begin{aligned}
H_c[f(t), q(t), h(t), t] &\equiv \{P-C[f(t)]\}h(t)+q(t)\{\eta(t)\xi[f(t)]-h(t)\} \\
&=\{P-C[f(t)]-q(t)\}h(t)+q(t)\eta(t)\xi[f(t)] \qquad (33)
\end{aligned}
$$

である。

最適間伐方策を $\{h^*(t)\}$，その応答である森林利用材積 $\{f^*(t)\}$ とすると，ポントリャーギンの最大原理から，随伴方程式

$$
\dot{q}(t)=rq(t)-(\partial H_c^*/\partial f^*(t))=\{r-\eta(t)\xi'[f^*(t)]\}q(t)+C'[f^*(t)]h^*(t) \qquad (34)
$$

を満足する連続関数 $q(t)\neq 0$ が存在し，また，$\lambda(t)\geqq 0$，$\lambda(t)f^*(t)=0$ を満たす未定乗数 $\lambda(t)$ が存在し，かつ次の条件を満たす。

1）任意の t∈［0，T］に対して，

$$
\operatorname*{Max}_{h(t)} H_c[f^*(t), q(t), h(t), t]=H_c[f^*(t), q(t), h^*(t), t]\equiv H_c^*[f^*(t), q(t), t] \qquad (35)
$$

2） $t=T$ で，

$$
q(T)=P-C_T[f^*(T)]-C_T'[f^*(T)]f^*(T) \qquad (36)
$$

(33) からわかるように，ここでの制御問題は線形制御であり，最適間伐方策は，バンバン制御（間伐をしない）及び特異制御，インパルス制御（特異制御が示す森林の状態への瞬時の移行）のいずれかが，あるいはその適当な組合せで与えられる。特異制御とは，(33) において $h(t)$ の係数部分が 0 となる場合の制御であり，この時，現行価値ハミルトン関数の最大化を要請する (35) からは，最適な間伐量 $(h^*(t))$ の確定ができない。すなわち，特異制御とは，最大原理によっては最適制御を特定できない状態における制御である。この特異制御の導出は，(33) の $h(t)$ の係数部分を t の関数とした切り換え関数 $\sigma(t)$ を微分することによって，求めることができる。すなわち，切り換え関数

$$
\sigma(t)=P-C[f^*(t)]-q(t)=0 \qquad (37)
$$

を t で微分して，(34)，(37) を考慮すれば，(38) のように特異制御が得られる。

$$
r\{P-C[f^*(t)]\}=\partial(\{P-C[f^*(t)]\}\eta(t)\xi[f^*(t)])/\partial f^*(t) \qquad (38)
$$

特異制御 (38) の意味は，単位材積の間伐から生じる利子利得（左辺）と間伐を行なわないことによって生じる森林の価値増殖分（右辺）が等しくなるように各時点での間伐量を調整することが，最適な間伐方策であることを示している。

（38）をさらに展開して，次式を得る。

$$\xi'[f^*(t)]-\frac{C'[f^*(t)]\xi[f^*(t)]}{P-C[f^*(t)]}=\frac{r}{\eta(t)} \tag{39}$$

（39）が示す特異制御を，縦軸にf，横軸にtをとって表わすとする。ηについての仮定から右辺はtの単調増加関数である。一方，左辺第一項はfの単調減少関数であり，左辺全体もfの単調減少関数と仮定すると，特異制御による最適森林利用材積（蓄積量）f^*は林齢tにしたがって右下がりの曲線を描くことになる。一方，間伐をしない場合の森林の利用材積は，（31）のηとξの仮定から，林齢とともに増大し，右上がりの曲線を描く。ここでの間伐モデルを含めて，一般に線形制御問題では，限界一杯の制御によって，できる限り速やかに特異制御が示す曲線上に到達することが最適な制御となる。そして，一旦この軌道上に乗ってしまうと，今度はできる限り長くこの軌道上に留まり続けることが最適な制御となる。以上のことは，植林してから一定の期間はいっさい間伐を行なわずに，できるだけ速やかに森林の蓄積を増大して，（39）が示す右下がりの曲線上に乗り，そこにできるだけ長く留まるように，間伐を行なうことが最適な施業方策であることを意味する。ただし，終端の森林の状態を規定する（36）は，（37）からわかるように特異制御が示す曲線上にはない。つまり，主伐期直前まで間伐を行なうことは最適ではなく，間伐を主伐期T以前のある林齢で停止し，再び森林の蓄積をできるだけ早く増大して，主伐に備えることが最適な方策となる。

以上の最適間伐方策から，間伐が行なわれるかどうかは，森林の成長曲線と特異制御が示す曲線の位置関係によるということがわかる。ファウストマンの伐期以前の林齢において，成長曲線と特異制御の曲線が交わらない場合，間伐は行なわれないまま主伐を迎えることになる。従って，特異制御が木材価格や伐出費用関数の変化によって，どのような変化をするかが，最適間伐問題の興味ある点となるが，クラークのモデルからは明らかなことは言えない。

最後に最適間伐方策を含む最適伐期齢については，クラークによれば，数値的には容易に求まるとしている。

2－4　ファウストマン式の拡張（2）～価格の変化

ファウストマン式の拡張は，定常性の仮定にも向けられている。すでにみたように，基本モデルでは立木価格，賃金率，利子率及び成長関数は時間を通じて一定であると仮定している。この仮定が，かなり非現実的なものであることは明らかである。そして1980年代に入ってから，これらのパラメーターの変化を許すモデルが，見られるようになっている。ここでは最近の論文から，立木価格の変化を取り入れた，ニューマン他［18］のモデルを見る。また，成長関数の変化（バイオテクノロジーの進歩）について考察したヨハンソン＝レフグレン［13］のモデルの結果を簡単に紹介する。

ニューマン他はマックコーネル他［15］のモデルを改良して，立木価格が指数関数的に上昇するという条件のもとでの，最適伐期齢を検討している。そのモデルは，次のように表わされる。

$$\begin{aligned}&\underset{T_i,\,D_i}{\mathrm{Max}}:\ PV=-wl+\sum_{i=1}^{N}\{[p(D_i)f(T_i)-wl]\exp(-rD_i)\}\\&\textit{subject to}\ \ D_i=D_{i-1}+T_i=\sum_{j=1}^{i}T_j,\quad i=1,\cdots,N\end{aligned} \tag{40}$$

ここで，

T_i：第i期の伐期齢，D_i：T_iに対応する暦上の日付，$p(D_i)$：D_i時点における立木価格（すべてのD_iに対して，$p'(D_i)>0$，$p''(D_i)>0$）である。

(40) は等号制約条件つき最適化問題であり，$p(D_i)f(T_i)-wl$ を Ψ_i で表わし，ラグランジュの未定乗数を $q_i(i=1, \cdots, N)$ とすると，最適伐期齢は次の等式を満たす。

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial T_i}-q_i=0, \quad i=1, \cdots, N \tag{41}$$

$$\left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial D_i}-r\Psi_i+q_i\right]\exp(-rD_i)-q_{i+1}\exp(-rD_{i+1})=0, \quad i=1, \cdots, N \tag{42}$$

(42) の i から N までの和をとると,

$$q_i=-\sum_{j=i}^{N}\left[\frac{\partial \Psi_j}{\partial D_j}-r\Psi_j\right]\exp[-r(T_j-T_i)]+q_{N+1}\exp[-r(T_{N+1}-T_i)] \tag{43}$$

これを，(41) に代入し，$N\to\infty$ をとると,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial T_i}+\sum_{j=i}^{\infty}\frac{\partial \Psi_j}{\partial D_j}\exp[-r(D_j-D_i)]=\sum_{j=i}^{\infty}r\Psi_j\exp[-r(D_j-D_i)] \tag{44}$$

(44) の左辺は，$i+1$ 期以降の最適伐期を固定して，第 i 期の伐期を微小時間だけ延長することによる第 i 期の利潤の変化と，将来の伐採が日付の点で遅れることによる将来の利潤の変化との D_i 時点での割引価値の和を表わしている。一方，右辺は D_i 時点での地代（林地の価値×利子率）であり，これらが等しくなる伐期が，第 i 期の最適伐期齢であることを示している。

なお，最適解の必要条件は次のようにも変形できる。(41) より，(42) の q_i, q_{i+1} を消去し，$\Psi_i=p(D_i)f(T_i)-wl$ を代入して，整理すれば,

$$rp(D_i)f(T_i)=[p(D_i)f'(T_i)+p'(D_i)f(T_i)+rwl]-p(D_{i+1})f'(T_{i+1})\exp(-rT_{i+1}) \tag{45}$$

(45) は，D_i 時点で即座に伐採することによって得られる利潤の利子分が，第 i 期以外の最適日付を固定しておいて，第 i 期の伐期を微小時間だけ遅らせることによる第 i 期と第 i + 1 期の利潤の変化の第 i 期での割引価値に等しくなる伐期が第 i 期の最適伐期齢であることを示している。

ニューマン他は，(45) を利用して，立木価格が指数関数的に上昇する場合（$\dot{p}_i/p_i=\alpha$, α: 一定）の最適伐期の変化について検討している。その結果は $\alpha>0$ において，最適伐期は次第に短くなること，利子率を α が上回る場合，その伐期は連年価値成長最大の伐期（MSY；Maximum Sustain Yield）を最初上回り，漸近的に MSY に近づくこと，また，$r>\alpha>0$ の場合は，最適伐期は漸近的に $r-\alpha$ を利子率とし，造林費用を 0 としたときのファウストマンの伐期に近づくことである[5]。

以上は，立木価格の変化についてであるが，ヨハンソン＝レフグレンはこれとは異なった観点から定常性の仮定を拡張している。彼らの関心は，バイオテクノロジーの進歩が最適伐期齢に及ぼす影響にあり，遺伝子改良による成長関数の変化によって最適伐期齢がどのような変化と挙動を示すかを考察している。そのモデルは，技術進歩によって品種の改良が進み，新たな造林時点では，より大きな収穫を約束する品種を植林することができるとするものである。ただし，その技術進歩は元の成長関数に数値 Φ を乗じることで表現され，どの時点で収穫しても以前の品種よりは Φ 倍だけ収穫量が増えることが想定されている。従って，全く成長関数の形状の違う品種が採用されるということは考慮されていない。また，技術進歩には上限が与えられており，収穫量が無限に大きくなることはない。

以上のモデルを数式の形で表現すると，成長関数 $f(T)$ は，第 1 期 $f(T_1)$，第 2 期 $\Phi_1(T_1)f(T_2)$，第 3 期 $\Phi_1(T_1)\Phi_2(T_2)f(T_3)$，……と乗数的に変化する。一般に第 i 期の成長関数は $\prod_{j=1}^{i-1}\Phi_j(T_j)f(T_i)$ で示される。ただし，$\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(T_i)=B<\infty$ と成長関数の変化には上限が与えられている。

また，すべての i について $\Phi_i \geqq 1$ であり，成長関数が以前より悪くなることはない。なお，彼らはモデルを簡略化するために，造林費用を0，木材価格を1と仮定している。前者の仮定は，2—2の林地の価値に関する比較静学分析で見たように，造林投資を伐採の結合生産と見なすものと解釈できる。また，後者については，収穫材積の単位を造林投資の費用を差し引いた純立木価格1円あたり材積（m^3/p）とするものである。さて，ヨハンソン＝レフグレンの最適伐期齢の導出は次のようなものである。決定論的世界では，任意の第i期の林地の価値（V_i^*）は既知であるとして，まず，第2期の林地価値と第1期の成長関数から第1期の最適伐期の必要条件を求め，この結論を第i期の最適伐期齢に一般化している。それは，最適経路（第1期から第∞期までの最適伐期齢）の部分経路（第i期の最適伐期齢）は，過去の最適伐期齢に影響されることなく，やはり最適であるとするベルマンの最適性原理によって，その最適性が保証されるものである。第i期の最適伐期 T_i^* は，次の（46）を満たす。

$$\frac{f'(T_i^*)}{f(T_i^*)} = r + [r\Phi_i(T_i^*) - \Phi_i'(T_i^*)]\frac{V_{i+1}^*}{f(T_i^*)} \tag{46}$$

モデルの仮定と（46）より，$i \to \infty$ で，Φ_i は1に収束するから，最適伐期は次第にファウストマンの伐期に近づき，漸近的に一致することがわかる。また全ての i について，$r\Phi_i(T_i^*) - \Phi'_i(T_i^*) \geqq r$ を仮定すると，全ての伐期はファウストマンの伐期よりも短くなる。さらに，$\Phi'_i = 0$ の仮定をおくと，$\Phi_i V_i^* - \Phi_{i-1} V_{i-1}^* > (<) 0$ では，伐期はその前期の伐期よりも短く（長く）なる[6]。

成長関数を一定として，純立木価格が，1，$\Phi_1(T_1)$，$\Phi_1(T_1)\Phi_2(T_2)$ ……と変化するものと見なせば，このヨハンソン＝レフグレンのモデルは，立木価格の変化のモデルとしても解釈することができる。そして，ベルマンの最適性原理から最適伐期齢を導出するという解法は，ニューマン他の解法に比べてより洗練されているように思える。ただし，ニューマン他のモデルに比べて，暦上の日付が考慮されていない点や造林費用を考慮していない点などで，価格変化のモデルとしては，やや簡略化されていることに留意すべきである。なお，最近の論文でレフグレンは再びこのモデルを取り上げている（レフグレン［14］）。そこで彼はニューマン他と同様の指数関数（ただし，$r > \alpha > 0$ とする）を成長関数の変化に用いている。また，造林費用と価格に関する仮定は，上述のヨハンソン＝レフグレン［13］と同様で，造林を伐採の結合生産とし，このため第1回目の造林費用を沈下コストとして取り扱っている。モデルの結果は，最適伐期は遺伝子改良を考慮しないファウストマンの伐期よりは短くなるが，それは一定で常に変化しないというものである。このことから，ニューマン他にみられた最適伐期の変化は，造林費用を明示的に取り上げ，特に第1回目の造林費用を考慮することに起因するものであることがわかる。

2—5　確率的最適伐期齢決定モデル～危険中立者の場合

当然のことだが，育林投資を含めてあらゆる投資行為は，不確実な将来に対する経済主体の選択行為である。したがって，最適伐期齢の理論を，現実の林業経済を分析する上で十分に説得力のあるものにするためには，不確実性を明示的にモデルに導入する必要がある。本項では，このような不確実性を明示的に取り入れた確率的最適伐期齢決定モデルを取り上げる。ところで，不確実性下の経済主体として，理論的にはこれを次の3つのタイプに分類することができる。それは，危険[7]をいっさい考慮しない危険中立者，危険に対して負の期待効用を持つ危険回避者，正の期待効用を持つ危険愛好者である[8]。このうち，現実の経済主体として最も妥当と思われるものは，危険回避者であるが，ここでは取扱いが最も容易な危険中立者に関するモデルを取り上げる。

最近，不確実性下における危険中立者のためのファウストマン式を定式化した最適立木販売モ

デルが，ブレージー＝メンデルソン［8］によって発表された。彼らのモデルは，立木価格を確率変数として扱っており，その確率分布を，時間を通じて不変，かつ異時点間で独立な正規分布と仮定している（*i. i. d.* の仮定。なお，正規分布の仮定はアメリカ合衆国の現実の木材価格の変動を調査した結果，取り入れられた仮定である)。また，森林はいつかは枯死する，すなわち選択可能な伐期は有界であると仮定されている[9]。

ブレージー＝メンデルソンの基本的な考え方は次のようなものである。今，仮にある林齢（t）で販売[10]が決定されるとするならば，それは将来の予想される利潤の方が大きいためである。そして，t 林齢における利潤は，その時点で実現した立木価格に依存するから，意思決定のためのある一定の基準となる価格が存在して，もしそれよりも現実の立木価格が高ければ販売するだろうし，もし低ければ販売を見合わせるだろう。このような販売の基準となる立木価格を，彼らは t 林齢における留保価格（reservation price）と呼んでいる。以上の彼らの考え方を定式化すると次のようになる。

無立木地から始めるとして，もし t 林齢（t 年後）の留保価格 P_t が与えられると，t 年における販売収入の期待値は，

$$R_t=\int_{P_t}^{\infty}[Pf(t)+E(W)]\,\zeta(P)dP \tag{47}$$

で表わされる。ここで，$E(W)$：林地の期待価値，$\zeta(P)$：Pの確率密度関数である。t 林齢で販売が行なわれるためにはそれ以前に販売が行なわれてはならないことと，独立性の仮定に注意すると，無立木地から始まる全期間にわたる利潤の期待値の現在割引価値，すなわち林地の期待価値は，次式のように表わされる。

$$E(W)=-wl+R_1\beta+\Gamma(1)R_2\beta^2+\Gamma(1)\Gamma(2)R_3\beta^3+\cdots+\prod_{i=1}^{z-1}\Gamma(i)R_Z\beta^Z \tag{48}$$

ここで，Z は森林が枯死する林齢を示し，また，

$\beta=(1+\iota)^{-1}$：割引要因（ι は離散型モデルに対応する年利子率）

$\Gamma(i)=\int_{-\infty}^{P_i}\zeta(P)dP$：$i$ 林齢で，販売が行なわれない確率

である。

ファウストマン式の考え方に従えば，(48) で表わされる $E(W)$ を最大にすることが求められることになる。言い換えれば，林地の期待価値を最大にするような Z 個の留保価格を求めることがここでの問題である。この問題に対して，ブレージー＝メンデルソンは次のように考える。任意の k 林齢において留保価格（販売を決意する最低の価格）で販売した際に得られる利潤の現在割引価値は，それ以降の $k+1$ から Z までの林齢で得られる利潤の期待現在割引価値に限界的に等しくなるはずである。すなわち，

$$\cdot[P_kf(k)+E(W)]\,\beta^k=R_{k+1}\beta^{k+1}+\Gamma(k+1)R_{k+2}\beta^{k+2}+\cdots+\prod_{i=k+1}^{z-1}\Gamma(i)R_Z\beta^Z \tag{49}$$

ベルマンの最適性原理により，1年目から Z 年目までの最適立木販売政策の部分経路である $Z-1$ 年目から Z 年目における立木販売政策もまた，それ自身最適立木販売政策でなければならない。言い換えると，(49) に $K=Z-1$ を代入して得られる留保価格 P_{Z-1} は，無立木地から始まる立木販売政策においても最適な留保価格である。さらに，Z 林齢においては，どのような価格であろうとも販売することに注意すれば，$Z-1$ 林齢の留保価格は次の等式を満たすことがわかる。

$$P_{Z-1}=\frac{[E(P)f(Z)+E(W)]\beta-E(W)}{f(Z-1)} \tag{50}$$

(50) で得られたP_{Z-1}を用いて，順次反復的に後戻りすることで，各林齢に対する留保価格が求められる。ただし，留保価格は$E(W)$ の関数である。従って，最適留保価格を求めるには (48) と (49) からなる連立方程式を解かねばならない。ブレージー＝メンデルソンは，これを代数的に解くことを諦めて，代わりにその数値解を示している。その結論は，①林地の価値は，立木価格の期待値を素朴にファウストマン式に代入して得られるものよりも高くなる。②留保価格は，林齢に対して単調減少し，次第に立木価格の期待値に近づく。③販売が行なわれる確率の最も高い林齢は，ファウストマンの伐期より，わずかに高くなる。というものである。

以上のモデルは，危険中立者と確率過程に関する仮定を認めれば，不確実性下におけるファウストマン式の忠実な拡張となっている。不確実性下では，最適伐期齢そのものが確率的なものになるというのは興味深い事実である。ところで，彼らのモデルに従えば，立木価格の短期的な上昇は木材の供給量を増やすことになる。しかし木材価格の上昇は，果して木材の供給量を増やすことにつながるのだろうか。むしろ，さらに価格が上昇することを森林所有者は予想して，販売を手控えるかも知れない。このことは，立木価格の短期的な変動が現在の価格とは独立であるという仮定に関連している。アメリカ合衆国における木材価格の現実からは，この仮定は非現実的であると彼ら自身も述べており，今後の課題の1つとしている。

そこで次に，この仮定を拡張しているヨハンソン＝レフグレン [13] のモデルを紹介する。ただし，そのモデルはファウストマン式の拡張ではなく，フィッシャーの林地価値を考慮しない1回の植伐モデルを基礎としたものである[11]。彼らのモデルは，立木の価値成長を離散的マルコフ過程と見なしている。今，V_0, V_1, …, V_t が各時点の立木の価値を示すものとする。ε_t は確率的な価値の成長を表し，$V_t=x$ の時，ε_t の条件付確率分布は時間に依存しない定常遷移確率 $\zeta(\cdot \mid x)$に従うものと考える。さらに，$\mu(x)=E(\varepsilon_t \mid V_t=x)$で立木価値水準$x$に対する価値成長の期待値を表わす。$\mu(x)$ は厳密に凹であるとする。次に伐採の期待現在割引価値を最大にする期待最適利得関数を$H(x)$ で表わす。すなわち

$$H(x) \equiv \sup_{t \in N} E(V_t \beta^t \mid V_0=x),\ N=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{51}$$

過程 $\{V_t\colon t=0,\ 1,\ \cdots\}$ の状態空間は実線上の有界な部分集合であり，最適利得関数は，x それ自身か来期における確率的な最適利得関数の期待値をβで割り引いたもののいずれかになるから，$H(x)$ は次の汎関数等式を満たす。

$$H(x)=\mathrm{Max}[x,\ \beta \int H(y)\zeta(dy \mid x)] \tag{52}$$

さらに，$H(x,\ n)$ をn期間問題に関する最適利得関数とし，

$$\lim_{n \to \infty} H(x,\ n) \equiv H(x) \tag{53}$$

で表わす。

以上のモデルによって，初めに，立木の価値成長が少なくとも負にはならないという仮定を置いた時の最適伐採方策を求める。この仮定は，すべてのxについてζ $[(-\infty,\ x) \mid x]=0$を意味する。まず，n期間問題を考察する準備として，1期間問題を考える。現在の伐採による利得が，来期の伐採の期待利得よりも少なくとも小さくならない，言い換えれば，現在の伐採が1期間問題における最適伐採であるような立木価値水準の集合をBで表わす。Bは，

$$B=\{x : x \geqq \beta \int y \zeta(dy \mid x)\} \tag{54}$$

である。この (54) と次式

$$\int y\zeta(dy \mid x)=x+\int(y-x)\zeta(dy \mid x)=x+\mu(x) \tag{55}$$

より，もし，$x(1-\beta)\geqq\beta\mu(x)$ ならば，$x\geqq\beta\int y\zeta(dy \mid x)$ である。横軸に立木価値水準，縦軸に $Y=Y_1=x(1-\beta)$，$Y=Y_2=\beta\mu(x)$ をとると，Y_1 は傾き $1-\beta$ の直線で表わされ，また，$\mu(x)$ が凹関数であることから，Y_2 は上に凸の曲線で表わされる。従って，最初 $Y_1<Y_2$ とすると，ある x^*で必ず Y_1 と Y_2 は交わり，$x>x^*$では常に $Y_1>Y_2$ となる。以上から，$B=\{x:x\geqq x^*\}$ であることは明らかである。

次に，問題を n 期間に拡張する。すべての $x\in B$ に対して，$H(x,1)=x$が成り立っている。仮定より，立木価値水準 x は小なくとも減少することはないから，いったん立木が成長して，その立木価値が B の要素となると，それ以降も常に B の要素であり続ける（1期間問題としては常にその時点で伐採することが最適となる)。さて，問題は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
&H(x_0,n)=\mathrm{Max}[x_0,\beta\int H(x_1,n-1)\zeta(dx_1 \mid x_0)]\\
&H(x_1,n-1)=\mathrm{Max}[x_1,\beta\int H(x_2,n-2)\zeta(dx_2 \mid x_1)]\\
&\qquad\vdots\\
&H(x_{n-2},2)=\mathrm{Max}[x_{n-2},\beta\int H(x_{n-1},1)\zeta(dx_{n-1} \mid x_{n-2})]\\
&H(x_{n-1},1)=\mathrm{Max}[x_{n-1},\beta\int x_n\zeta(dx_n|x_{n-1})]=x_{n-1}
\end{aligned} \tag{56}$$

以上の連立方程式は，最後の式からその結果をその前の式に代入することで，次々と1期間問題に還元することができる。従って，x^*は n 期間問題においても，最適な立木価値水準である。一方，$x\in B^c$ については，少なくとも来期に伐採を延長することが，最適伐採方策となる。以上から，最適伐採立木価値水準を示す最適利得関数は，

$$x\geqq x^*\text{の時}, H(x)=x,\quad x<x^*\text{の時}, H(x)>x \tag{57}$$

となる。

今，無立木地（あるいは $x\in B^c$ の任意の立木価値水準に対応する林齢の森林）から始めるとすると，その最適立木価値水準は $V_T{}^*(1-\beta)=\beta\mu(V_T{}^*)$ を満たす。$\beta=(1+\iota)^{-1}$を代入して，これを整理すれば，$\iota=\mu(V_T{}^*)/V_T{}^*$である。

この最適伐期齢の等式は，林地価値を考慮しないフィッシャーの伐期の必要条件と一致する。従って，来期の価値成長が現在の立木価値水準の条件付確率で表わされるが，決して現在の水準を下回ることはないという条件の下で，危険中立者の最適立木価値水準は決定論的なフィッシャーの最適伐期齢が示す最適立木価値水準に一致する。

以上の結論は，すべての x について$\zeta[(-\infty,\ x)\mid x]=0$というあまり現実的とは言えない仮定の下でのものである。この仮定を拡張して，$\zeta[(-\infty,\ x)\mid x]\neq0$とする。すなわち，立木価値が来期に減少する可能性があることを認めるとする。この場合，最適利得関数が，常に $H(x)\geqq x$を満たしていることに注意すれば，B に含まれないすべての x について，

$$x\in B^c=\{x:x<x^*\}=\{x:x<\beta\int y\zeta(dy \mid x)\} \tag{58}$$

である。従って，

$$\beta\int H(y)\zeta(dy \mid x)\geqq\int y\zeta(dy \mid x)>x \tag{59}$$

となり，1期間問題における最適立木価値水準 x^*を下回るような x においては，伐採を来期以降に延長することが最適政策となる。このように，確率分布の仮定を拡張しても，その最適伐採

方策を示す立木価値水準は，決定論的最適立木価値水準を下回らない。

以上がヨハンソン＝レフグレンのモデルの結論である。ここでのモデルは，ブレージー＝メンデルソンのモデルよりも抽象度が高いが，やはり最適伐期齢は陰伏的かつ確率的に示されるに過ぎず，最適立木蓄積水準という形で最適伐採政策が示される。ルーズな言い方になるが，ブレージー＝メンデルソンの留保価格×森林蓄積がここでの最適立木蓄積水準にあたる。

3．最適伐期齢理論の課題

以上，今日までに至る最適伐期齢理論の展開を見てきた。単一一斉林分のモデルとして，決定論的世界におけるファウストマン式の検討とその拡張の基本的な課題は，ほぼ考察されていると見てよいであろう。残された課題は，最適施業方策及び定常性の仮定を緩めた場合の最適伐期齢の挙動に関する，より洗練された定式化とその検討である。一方，確率的世界における最適伐期齢理論については，危険中立者に関する断片的で限られた結果しか，未だ得られていない。現実の経済主体の多くが，危険中立者ではなく危険回避者として行動するであろうことから，危険回避者を前提としたモデルの構築が求められていることは，明らかである。実際，最近の論文においても危険回避者のための最適伐期齢モデルが発表されているが，それらにはいずれも共通の問題点がある。

例えば，コールフィールド［9］は，森林火災の不確実性を考慮したモデルを発表しており，森林火災が時間とは独立の，ある一定の確率で発生するものとみなして，確率的効率アプローチ[12]から，造林投資時点での最適伐期齢を数値的に求めている。また，バータチャリヤ＝スナイダー［5］は，立木価格の不確実性を取り上げ，ファウストマン式に危険回避者の効用関数を組み込んだモデルで，造林投資時点における最適伐期齢を定式化している。これら，2つのモデルに共通する問題点は，最適伐期齢は，造林投資時点で決定され，その後の世界の状態変化に関わりなく，その伐期に至れば伐採することを前提としている点である。この前提は，森林所有者は造林投資時点でのみ，意思決定を行なうことを意味している。しかしながら，実際の伐採の選択は造林投資時点だけではない。任意の時点において，その時点での立木価値と将来の立木の価値との比較，より正確に言えば，その時点で得られる効用と将来に得られる期待効用とを比較することによって，その都度，決定が行なわれるのである。育林生産のように，生産期間が長期にわたり，しかも収穫時期の選択幅の広い生産分野では，将来における意思決定の可能性を考慮しないこれらのモデルからは，あまり有効な結論を得ることはできないと考えられる[13]。

以上の造林投資時点での最適伐期齢決定モデルに対して，ヨハンソン＝レフグレン［13］は，伐採問題を取り扱っているが，そのモデルにも上述の2モデルと同様の問題点がある。彼らは，サンドモの2期間消費・資産選択モデル[1]を単純に価格不確実性下の伐採問題に援用しているが，本質的に多期間の逐次決定問題である伐採問題を今日と明日の2期間問題に折り畳んでしまっている。不確実な将来に対する時間視野を，明日という1期間に限定することは，将来におけるさまざま意思決定の選択可能性を放棄してしまうことを意味する。2期間モデルでは，今日伐採をしないと言うことは，必ず明日伐採することになるが，現実の世界では，明日の時点で実現した木材価格が，留保価格のような何らかの基準によって与えられる価格よりも低ければ，伐採は明後日以降に延長するだろう。しかしながら，2期間モデルは将来を明日のみに折り畳んでしまうために，明後日あるいはそれ以降といった概念を導入することができない。

最適伐期齢理論の不確実性下への拡張は，意思決定を造林投資時点に限定するのではなく，また，2期間問題に問題を折り畳むのでもなく，多段階の意思決定過程における最適化問題として，

定式化されねばならない。しかしながら，上述のように，危険回避者のための逐次決定モデルは未だ発表されていない。この点が，今日における最適伐期齢理論の課題である。最適伐期齢理論は，将来の不確実性と不確実性下の経済主体のもっともらしい行動仮説の下で，多段階の逐次決定モデルとして定式化され，その性質が十分に検討されて初めて，林業経済分析のための基礎として，現実に意味のある理論となると言える。

[註]

1） 森林経理学の教科書では土地期望価を次のように表現している（鈴木［4］より)。

$$B_u = \frac{A_u + D_a 1.0P^{u-a} + \cdots - c1.0P^u}{1.0P^u - 1} - V$$

ここで，B_u：土地期望価，A_u：主伐収入，D_a：a 林齢における間伐収入，c：造林費，V：管理資本，$0.0P$：利子率である。
（4）式との関係は，$A_u = pf(T)$，$c = wl$。また，仮定により，間伐収入と管理費を捨象している（あるいは，割引率で割り引いて前者は主伐収入に，後者は造林費に繰り込んでいると解釈してよい)。上式は離散型の式であり，$1.0P^u$ を e^{rT} でおきかえて，連続型の式とすれば（4）と一致する。

2） ただし，林地の機会費用は利子率 r の関数だから，ゴンドレーが主張している，利子率に最適伐期が左右されないということは，もはや正しくはない。なお，本節とは直接関係ないが，ハーシュライファ［12］が指摘するように，投資問題は投資から得られる報酬の消費のあり方と一体的に考察すべきであり，この点から，投資基準は現在割引価値基準を用いるべきである。なぜなら，現在割引価値を最大にする投資は，現在から将来にかけての可能な消費のパターンの選択幅を最大にするものだからである。現在割引価値を代用するものとして，内部収益率を投資選択の基準とすると，次のような場合に問題が生じる。内部収益率基準は，投資が無制限に拡大できることを前提しているため，このような前提が満たされない投資には適切ではない。また，各時点で得られる報酬が異なるような複数の投資対象について，その優劣を決定する際の指標としては，内部収益率基準は適当ではない。これは内部収益率最大の投資が現在割引価値を最大にする投資と一致しない場合があるためである。

3） 最適伐期齢を $T^*(p, w, r)$ とすると，対応する林地の価値は $V[T^*(p, w, r), p, w, r]$ で表わされる。立木価格の上昇による，林地価格の変化は，dV/dp で表わされる。これを展開すると（以下，w，r はここでの式の展開に関係がないので省略する。）

$$\frac{dV[T^*(p), p]}{dp} = \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p}$$

なぜなら，最適伐期齢 $T = T^*$ で，$\partial T/\partial p = 0$ だから。このように，$dV/dp = \partial V/\partial p$ となる。この関係は，r や w についても同様である。すなわち，最適化問題において，あるパラメーターの変化が目的関数に及ぼす影響を考える時，そのパラメーターの変化によって引き起こされる他のパラメーターの変化が目的関数に及ぼす影響を考慮する必要はない。この事実は包絡線定理（envelop theorem）と呼ばれている。

4） 以下の固定始点，自由終点，自由計画期間を持つメイヤー型の非自律的・確定的最適制御問題の必要条件の導出は，板垣［1］の諸命題，特に第4章第2節の命題1を参照されたい。

5） 最適伐期が減少傾向を示すというニューマン他の結果は，価格の変化についての凸性の仮定が影響しているものと考えられる。

6） ここでの仮定は，明快な結論を得るためのものであり，その経済的な意味は明らかではない

7） 危険の概念は確率変数の分布の形状に関連するものである。必ずしも，厳密な言い方ではないが，危険とは数学的には分散のことと考えて問題ない。

8） 期待効用とは効用の期待値を指す。効用の期待値が定義されるためには，実数値関数として効用関数が定義されねばならないが，それはフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルンによって提示された，不確実性下における経済主体の行動に関する公理系を認めることによって，保証される。そして，この公理系から不確実性下の経済主体の行動仮説として，期待効用極大化仮説が導出される。また，危険中立者とは，危険を一切考慮せず，将来の収入の期待値にのみ反応し，現在から将来にかけて得られる利潤の期待値の現在割引価値を最大化するように選択する経済主体である。このような危険中立者や，危険回避者，危険愛好者といった概念は，上述の公理系から導かれる効用関数の形状（線形，凹関数，凸関数）と対応するものである。紙幅の都合上詳しい説明は省略するが，より詳細な説明は不確実性の経済学の教科書である酒井［3］や桐谷［2］を参照のこと。

9） これは，実際に留保価格を求めるための技術的仮定である。

10) 販売の形式的な意味は，立木及び林地を売り払うことである。ここで，林地を含めないとファウストマン式の考え方が失われることになる。
11) このモデルでは，1回限りの植伐のみを考えているため，最適立木水準は現在の森林にのみ依存して決定され，再造林後の森林についての考慮がなされていないと言う欠点を持つ。従って，その結論もこのモデルの制約の中から導かれる性質のものであることに注意しなければならない。正確には，無限回の植伐を考慮した時の最適立木水準を考察しなければならないことは，明らかである。この無限回の植伐を考慮しているものとして，ミラー＝ヴォルティア［16］があるが，本論文では残念ながら取り上げることができなかった。
12) 確率的効率アプローチは，確率優位または確率的優越（Stochastic Dominance）という概念を，不確実性下の投資選択の基準とする手法であり，投資対象の確率分布のパラメーターを特に指定しないという点で，平均―分散アプローチよりも理論的には優れた手法である。詳細は酒井［3］や桐谷［2］を参照のこと。
13) なお，この2つのモデルにはこの前提に関する問題以外にも問題点がある。コールフィールドのモデルは，フィッシャーの決定ルールを採用しており，林地を考慮しない1回限りの植伐における期待効用を極大化する伐期を選択するものとなっているが，1960年代の最適伐期齢決定ルールに関する議論が顧慮されていない。その論文は，確率的効率アプローチを用いたという点に価値があるが，より理論的に適切なファウストマンの決定ルールでは，彼の考え方を応用して，この興味深い手法を用いることができない。一方，バータチャリヤ＝スナイダーのモデルでは，確率過程に関する仮定を明記しないで，確率変数を無造作に時間で微分している点が問題である。
14) サンドモのモデルについては，酒井［3］や桐谷［2］を参照のこと。

［引 用 文 献］

［1］板垣有記輔：動的最適化と経済理論．多賀出版．東京，1985
［2］桐谷 維：資産選択の現代理論．東洋経済新報社．東京，1986
［3］酒井泰弘：不確実性の経済学．有斐閣．東京，1982
［4］鈴木太七：森林経理学．朝倉書店．東京，1979
［5］Bhattacharyya, R.N. and D.L.Snyder: Stumpage Price Uncertainty and the Optimal Rotation of a Forest: An Application of Sandmo Model. *Journal of Environmental Systems.* **17**. 305－313, 1988
［6］Bentley, W.R. and D.E.Teeguarden: Financial Maturity: A Theoretical Review. *Forest Science.* **11**. 76－87, 1965
［7］Boulding, G.K.: *Economic Analysis, 3rd ed.*. Harper and Brothers. New York, 1955（邦訳：大石泰彦・宇野健吾監訳「ボールディング 近代経済学」．丸善．東京，1964）
［8］Brazee, R. and R.Mendelsohn: Timber Harvesting with Fluctuating Prices. *Forest Science.* **34**. 359－372, 1988
［9］Caulfieid, J.P.: A Stochastic Efficiency Approach for Determining the Economic Rotation of a Forest Stand. *Forest Science.* **34**. 441－457, 1988
［10］Clark, C.W.: *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources.* John Wiley and Sons. New York, 1976（邦訳：竹内啓・柳田英二訳「生物経済学」．啓明社．東京，1983）
［11］Goundrey, G.K.: Forest Management and the Theory of Capital. *Canadian Journal of Economics and Political Science.* **26**. 439－451, 1960
［12］Hershleifer, J.: *Investment, Interest and Capital.* Prentice-Hall. Englewood Cliifs, 1970
［13］Johhanson, P.O. and K.G.Löfgren: *The Economics of Forestry and Natural Resources.* Basil Blackwell Ltd. Oxford, 1985
［14］Löfgren, K.G.: On the Economic Value of Genetic Progress in Forestry. *Forest Science.* **34**. 708－723. 1988
［15］McConell, K.E., J.N.Daberkow and I.W.Hardie: Planning Timber Production with Evolving Prices and Costs. *Land Economics.* **59**. 292－299, 1983
［16］Miller, R.A. and K.Voltaire: A Stochastic Analysis of the Tree Paradigm. *Journal of Economic Dynamics and Control.* **6**. 371－386, 1983
［17］Näslund, B.: Optimal Rotation and Thinning. *Forest Science.* **15**. 446－451, 1969
［18］Newman, D.H., C.B.Gilbert and W.F.Hyde: The Optimal Forest Rotation with Evolving Prices. *Land Economics.* **61**. 347－353, 1985
［19］Samuelson, P.A.: Economics of Forestry in an Evolving Society. *Economic Inquiry.* **14**. 466－492, 1976

[20] Scitovsky, T.: *Welfare and Competition.* Richard D Irwin. Chicago, 1951
[21] Thunen, J. H. von: *Der Isolierte Staat, vol.* 3, published posthumously in 1863 by H. Schumacher, 1863 (邦訳 熊代幸雄訳「農業と国民との関係における孤立国 第Ⅲ部」. 東京チューネン研究会, 1961, 未公刊)

RÉSUMÉ

The theory of optimal rotation period sets up various economic models to estimate when a growing forest should be cut. These are subjective equilibrium models for the use of forest owners and forest managers. Such a theory would be a basis for economic analyses of forest resources and forestry, using micro economics. The aim of this paper is thus to review the development of the optimal rotation period theory.

The historical development of investment theory and capital theory, as parts of micro economics, has been enriching the optimal rotation period theory. In its early stages, the theory formulated a point-input point-output model for an even-aged forest premised on both a stationary state and certainty. There was some confusion as to the rule determining the optimal rotation period when micro economics was first introduced to this formula, due to misconception on behalf of forest economists with regard to cost. However, today there is general agreement that the correct rule is the one given in the Faustmann formula which maximizes the sum of present discounted values of stream of net revenues generated by a unit of forest land over an infinite period of time.

The features of the Faustmann model have been examined adequately in terms of comparative statics which investigates the effects that parameters such as timber prices, interest rates and so forth have on the optimal rotation period and on land value. In various literature, attempts have been made to approximate the optimal rotation period theory to the real world by modifying the Faustmann formula accepting the condition of certainty. One of the attempts was to formulate an optimal thinning policy by employing the control theory, and allowing for variations in the "point-input point-output". On the other hand, some models relax the conditions for the stationary state. For instance, one model permits a variation in timber prices, employing a method for solving the constrained maximization problem.

Forest investment involves extremely long term planning for uncertain future. This feature indicates that it is vital for the optimal rotation period theory to include explicitly those factors which are uncertain, and thus to modify Faustmann formula as a multi-stage decision model. There are few multi-stage decision models for forest owners under uncertainty, as most models assume that the owners are risk neutral. In a real life situation, however, the individual owner will tend to behave so as to avert risk. Therefore it seems of great importance to formulate a model which takes this into account, though this has yet to be presented. This is, therefore, the task we are faced with at present.