

時空間マクスウェルグリッド方程式に関する幾何学的検討

A Geometrical Study of Maxwell Grid Equation on Space-Time

川原純¹ 美船健² 松尾哲司²
 Jun Kawahara Takeshi Mifune Tetsuji Matsuo

¹京都大学工学部 ²京都大学工学研究科
 Faculty of Engineering and ²Graduate School of Engineering, Kyoto University

1. まえがき

通常、有限積分法による電磁界解析では、時間と空間は別々に扱われる。一方、相対論の観点からは時空間を統一的に扱うことが自然である。マクスウェル方程式自体は相対論を考慮してもしなくても変更されないで、時空間を統一的に扱うことを考える。しかし4次元時空間において、主格子・双対格子上の電磁界方程式の導出は必ずしも容易ではない。そこで時空間格子[1]上のマクスウェルグリッド方程式に対し、主格子と双対格子の接続行列の対応関係を用い、主格子の幾何学的な情報から双対空間における電磁界の関係式を導出する手法を検討する。

2. 4次元時空間有限積分法

簡単のため、誘電率 ϵ 、透磁率 μ を一様とする。座標系を $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ とする。ただし、 $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ は光速である。ここで、

$$E_i = E_i/c, \quad H_i = H_i/c, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

とおき、ミンコフスキー空間上の微分2形式 F を

$$F = \sum_{i=1,2,3} E_i dx^i \wedge dx^0 + \sum_{j=1,2,3} B_j dx^k \wedge dx^l \quad (2)$$

と定義する。ただし、 (j, k, l) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換である。この F にホッジ作用素 $*$ を作用させて、アドミタンス $Y = \sqrt{\epsilon/\mu}$ を用いて $G = (Y*)F$ とすれば、

$$G = -\sum_{i=1,2,3} H_i dx^i \wedge dx^0 + \sum_{j=1,2,3} D_j dx^k \wedge dx^l \quad (4)$$

と表せる。ソース項のない自由空間中のマクスウェル方程式は、これらの F, G を用いて、

$$dF = 0, \quad dG = 0 \quad (5)$$

と書ける。これらは主空間、双対空間における閉曲面 $\partial\Omega, \partial\tilde{\Omega}$ を用いて積分形で、

$$\oint_{\partial\Omega} F = 0, \quad \oint_{\partial\tilde{\Omega}} G = 0 \quad (6)$$

と表せる。有限積分法では、 F, G を主格子、双対格子の面 $S, \tilde{S}$ で積分した形

$$f = \int_S F, \quad g = \int_{\tilde{S}} G \quad (7)$$

を変数として用いる。

4次元空間において節点・辺・3次元体積・4次元体積の要素をそれぞれ

$$\{n\} = [n_1, \dots, n_N]^t, \quad \{l\} = [l_1, \dots, l_L]^t, \quad (8)$$

$$\{f\} = [f_1, \dots, f_F]^t, \quad \{v\} = [v_1, \dots, v_V]^t,$$

$$\{u\} = [u_1, \dots, u_U]^t$$

とすれば、ベクトル $\{n\}$ と $\{l\}$ の関係は行列 $[G]$ を用いて、

$$\partial\{l\} = [G]\{n\} \quad (9)$$

と表現できる[2]。このようにそれぞれの要素間の関係を、

$$\partial\{l\} = [G]\{n\}, \quad \partial\{f\} = [C]\{l\}, \quad (10)$$

$$\partial\{v\} = [D]\{f\}, \quad \partial\{u\} = [S]\{v\}$$

と表す。これらで用いた接続行列 $[G], [C], [D], [S]$ と、双対空間において同様に表した $[\tilde{G}], [\tilde{C}], [\tilde{D}], [\tilde{S}]$ には、次のような関係があることが確かめられる。ただし、 $*$ はホッジ双対により方向を定義した転置を表す。

$$[\tilde{D}] = [C]^*, [\tilde{C}] = [D]^*, [\tilde{S}] = -[G]^*, [\tilde{G}] = -[S]^* \quad (11)$$

この接続行列 $[D], [\tilde{D}]$ と式(6)、およびアドミタンス行列 $[Y]$ を用いて、電磁界方程式が

$$[D]\{f\} = 0, [\tilde{D}]\{g\} = 0, \{g\} = [Y]\{f\} \quad (12)$$

と表現でき、式(11)を用いて、

$$\begin{pmatrix} [D] \\ [C]^* [Y] \end{pmatrix} \{f\} = 0 \quad (13)$$

とすれば、主格子の条件のみから f を決定できる。

3. 4次元時空間単位格子モデル

4次元時空間単位格子のモデルについて、双対空間の条件を用いた求解の流れは図1のようになる。

ここで前節で示した方法を用いれば、体積要素と面要素の関係、式(6),(7)から接続行列 D を、面要素と辺要素の関係から接続行列 C を導出でき、式(13)より f がすべて求められる。

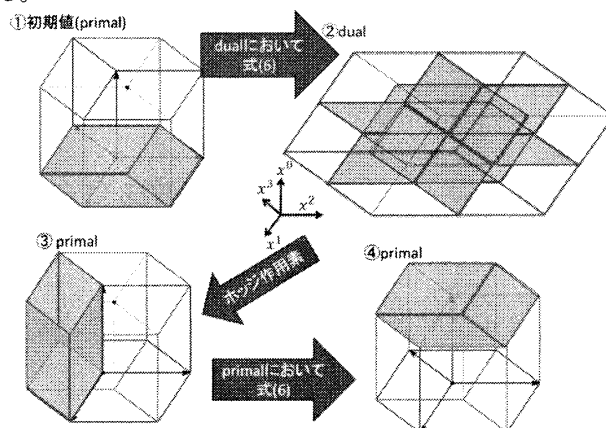


図1: 4次元時空間単位格子での有限積分法の流れ

ここでは4次元単位格子を用いたが、多様な格子に適用できる。必要に応じて時間刻み幅を変化させることによって、効率的な電磁界の解析が可能となる。

文献

- [1] T. Matsuo, IEEE Trans. Magn., vol. 47, pp. 1530-1533, 2011.
 [2] 本間利久・五十嵐一・川口秀樹, 「数値電磁気学」, 森北出版, 2002