

## 非線形磁気弾性系におけるポテンシャル表現について

窪田 まど華<sup>†</sup> 引原 隆士<sup>††</sup><sup>††</sup> 京都大学大学院 工学研究科 電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

E-mail: <sup>†</sup>kubota@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, <sup>††</sup>hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし 本報告は、乱流に含まれる広帯域のパワースペクトルからエネルギーを回収する方法に関して行っている考察をまとめている。エネルギー源である流体運動を支配する方程式の力学的特性を考慮すると、広帯域のスペクトルに分布したエネルギーを回収する回収系は非線形性を有することが望ましいと考えられる。本報告では基礎的な回収系として、弾性梁の挙動が非線形微分方程式に従う磁気弾性梁を用いる。この弾性梁を用いた磁気機械系は、2個の磁石が形成する磁場に曝された梁が励振されてたわみ振動する構造を有する。そこでまず、2個の磁石の配置による磁場の変化に対するポテンシャルとその表現について考察する。次に同期のメカニズムによる乱流からのエネルギー回収の可能性を検討するため、ポテンシャルを考慮した2つの磁気機械系が同期した場合に関して、エネルギー授受の解析を行い、共振した場合におけるエネルギー授受の特徴との類似性に基づいて考察する。

キーワード ポテンシャル, 磁気弾性梁, 共振, 同期, エネルギー

## A Study on Potential Representation of Nonlinear Magnetoelastic Beam System

Kubota MADOKA<sup>†</sup> and Takashi HIKIHARA<sup>††</sup><sup>††</sup> Kyoto University, Department of Electrical Engineering

Katsura, Nishikyo, Kyoto, 615-8510 Japan

E-mail: <sup>†</sup>kubota@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, <sup>††</sup>hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

**Abstract** In this research, we discuss the possibility to scavenge energy from fluid including turbulence. Based on mechanism of turbulence, energy scavenging devices are expected to keep nonlinearity for accepting wide band spectrum distribution of turbulence. A magnetoelastic beam is adopted as an energy scavenging device. This magnetoelastic beam is excited in magnetic field consisting of two magnets. In this report, the potential shape, which governs the dynamics, is discussed from the view point of the field arrangement. We also estimate the possibility of energy scavenging through synchronization. We analyze energy exchange between two synchronized systems and find some similarities with resonance.

**Key words** potential, magnetoelastic beam, resonance, synchronization, energy

### 1. はじめに

水車や風車等では一定速度以上の平均的な流れからエネルギーを利用している。流れには一般に流速と呼ばれる平均的な速度での運動と、平均流速からの変動の主因である渦などの乱流に分けて考えることができる [1], [2]。この微小な速度変動を含む乱流からもエネルギーを回収できる可能性がある。

乱流は複雑であるほど広帯域の連続なパワースペクトルを持

つ振動が含まれていることが知られている [3]。これは十分に発達した乱流が空間的に自己相似的な渦から成ることによると考えられる。しかしながら、無限の自由度を有する流体において、低次元の自由度に限った座標系に拘束された種々のデバイスを用いてこのような連続スペクトルに分布したパワーを回収する方法については必ずしも明らかではない。著者らはこのような観点から流体運動の支配方程式の力学的特性を考慮し、非線形力学に立脚したエネルギー回収の可能性を検討している。潮流

等の身の回りにおける振動とエネルギー回収系が共振することを利用したエネルギー回収に関する報告も多い[4], [5]. それらを受けて, 本報告は広いスペクトルを持つという点において乱流と類似の分布を示す磁気弾性梁のカオス振動をエネルギー源とし, これに対応する回収系にも磁気弾性梁を用いる. この磁気弾性梁については次章で説明する. 本研究で求めるカオス振動の特性は連続した周波数におけるパワースペクトルを有していることである. 回収系がそのうちの単一周波数で共振しても, その周波数のエネルギーしか回収できないため, 新たな方法が求められる. このような観点から著者らは共振に替わってカオス同期[6], [7]に注目している. 乱流やカオス振動からエネルギーを回収するメカニズムとしてカオス同期を利用する可能性を検討するためには, 実験的に再現可能なカオス同期を達成し, また同期した場合のエネルギーのやり取りの特徴を明らかにする必要がある. さらに実験化のため, 回収系の2個の磁石間隔, 即ちポテンシャルの形状がエネルギー回収にどのように影響するのかを解析するため, 磁石間隔が変化した場合のポテンシャルを表現する必要がある. 本報告の前半では, 回収系のポテンシャルを4次以下の多項式を用いて, 実際のポテンシャルの近似を試みた. 後半ではそのようなポテンシャルが調整できた場合に, 共振と同期のエネルギー授受における特性を比較し類似性を考察する.

## 2. システム構成

パワースペクトルの分布において乱流と類似性を持つカオス振動が図1に示す磁気機械系で生じることが知られている[8]. 本報告では乱流からのエネルギー回収に関する解析を行うにあたり, 図1に示す系を乱流を模擬する駆動系として用いる. 図1の系では磁石を2個固定し, その中央に梁の上部を固定し, 磁石と梁を据えた台を水平方向に加振する. 強磁性体の梁は加振による力と磁場力を受けてたわみ振動する. このたわみ振動がカオスである場合は, 広帯域のパワースペクトル分布を有する. 一方エネルギー回収系は本来駆動源の構造を想定しても意味がない. しかしながらここでは, 後半に述べる同期に関する解析を容易にするため同じ構造の系を採用する. 図1の系は以下の

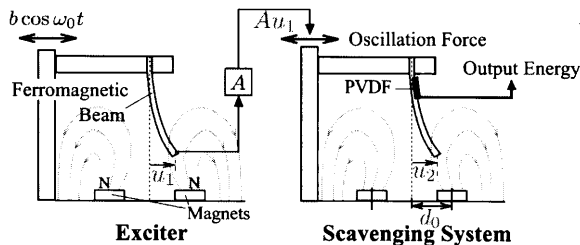


図1 励振系とエネルギー回収系.

式で与えられる.

$$\text{駆動系: } \ddot{u}_1 = -\gamma \dot{u}_1 + \frac{1}{2}(1 - u_1^2)u_1 + b \cos \omega_0 t \quad (1)$$

$$\text{回収系: } \ddot{u}_2 = -\gamma \dot{u}_2 + g(u_2) + Au_1 \quad (2)$$

$u_1$  は励振系における梁の変位,  $u_2$  は回収系における梁の変位,  $\gamma$  は減衰定数,  $b$  は励振系に加える外力の振幅,  $\omega_0$  は励振系に加

える外力周波数,  $t$  は時間を表している. 変数上のドット ( $\dot{\phantom{x}}$ ) は  $d/dt$  を表す. 式(2)右辺第3項  $Au_1$  は励振系からの加振項で, 梁の変位  $u_1$  に比例した励振を与え, その比例ゲインを  $A$  とする.  $g(u_2)$  は磁場と梁の曲げ剛性による復原力を表す. また式(1), (2)は無次元化している.

## 3. ポテンシャルの表現

図1の回収系において, 磁石中心軸の位置が  $u_2 = \pm d_0$  の左右対称にある場合のポテンシャル表現を検討する. このとき次の2点に着目する. まず第1は磁荷は磁石がどの位置にあっても一定であり, 磁力に比べて梁の曲げ剛性による力は無視できるか否かである. 第2は磁石間隔が変化しても, 磁石からある程度離れた位置ではポテンシャルはほとんど変わらないと考えられるか否かである. まず  $u_2 = \pm d_0$  における弾性定数が一定であると表せるので, これを満たす復原力は以下で与えられる.

$$\begin{cases} d_0 > 0 & : g(u_2) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{u_2}{d_0} \right)^2 \right\} u_2 \\ d_0 = 0 & : g(u_2) = -2u_2 \end{cases} \quad (3)$$

この復原力  $g(u_2)$  から得られるポテンシャル  $G_1(u_2) = \int g(u_2) du_2$  を,  $d_0=0.0$  と  $d_0=0.1$  の場合を図2に描く.  $d_0$  が0.1変化しただけでポテンシャルが大きく変形することが分かる. 解析の対象が安定点周りの微小振動であれば, 弾性定数を一定としたポテンシャルが適しているが, 対象としている運動は2つの安定点  $u_2 = \pm d_0$  を往復する振動であるため, 復原力として式(3)は適用できない. 従って磁石による復元力に対して曲げ剛性は無視できないことが分かる. 次に, 磁石間隔が変化

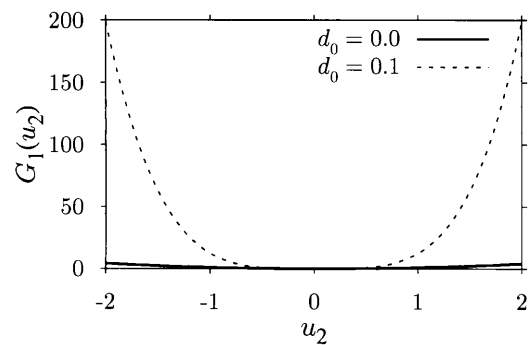


図2  $d_0 = 0.0$  と  $d_0 = 0.1$  のポテンシャルの比較.

しても, 磁石からある程度離れた位置ではポテンシャルはほとんど変わらないことが考えられる. 梁の振動時の変位は, 数値実験より  $-2 \leq u_2 \leq 2$  に収まっていることから,  $-2 \leq u_2 \leq 2$  におけるポテンシャルの形が運動を決定していることがわかる. そこで復原力  $g(u_2)$  のポテンシャルを  $G_2(u_2) = \int g(u_2) du_2$  とし,  $0 \leq d_0 \leq 1$  において,

$$\left( G_2(d_0) = 0.0 \right) \wedge \left( G_2(\pm 2) = \frac{9}{8} \right) \quad (4)$$

を満たすとす. これは一番低い  $u_2 = \pm d_0$  でポテンシャルを0基準にし, 磁石からある程度離れた位置  $u_2 = \pm 2.0$  でのポテンシャルが変わらないことを表している. これを満足する復原

力  $g_2(u_2)$  は

$$g(u_2) = \frac{9}{8} \frac{1}{(2 - d_0^2/2)^2} (d_0^2 - u_2^2) u_2 \quad (5)$$

と与えられる。このポテンシャル  $G_2(u_2)$  を図3に示す。図2と比較すると、 $d_0$  変化に対するポテンシャル形状の変化が緩やかなことから、実際のポテンシャル形状に近い。またこのポテンシャル  $G_2(u_2)$  に従う梁の変位の時間波形の一部を図4を表す。このとき初期値に関しては、回収系の力学的エネルギーが0となるように、 $(u_2, \dot{u}_2) = (d_0, 0)$  としている。図4よりポテンシャルの形状に近い  $d_0=0.0$  と  $d_0=0.1$  の場合では、 $d_0=0.4$  の場合に比べてほとんど同じ挙動を示しているため、式(5)は復原力の連続性を保っていると考えられる。このポテンシャルモデルより、回収系で得られるエネルギーの磁石間隔依存性を定量的に議論することができる。

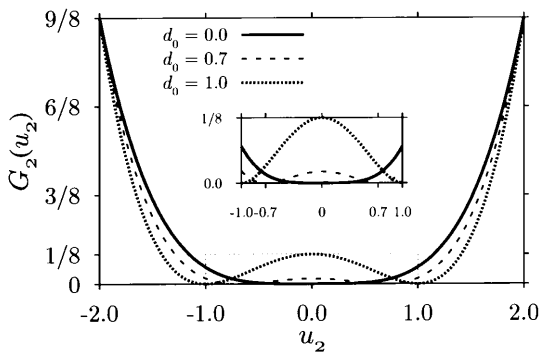


図3 ポテンシャルの比較。

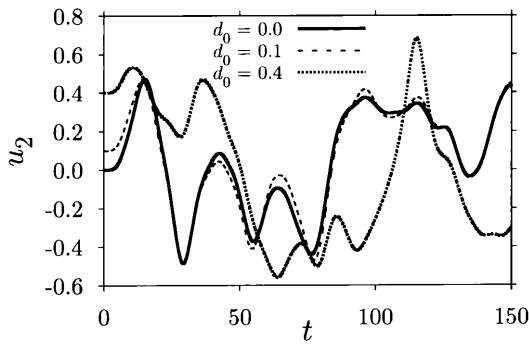


図4 各  $d_0$  に対する  $u_2$  の時間変化。

#### 4. 共振の場合のエネルギーのやり取り

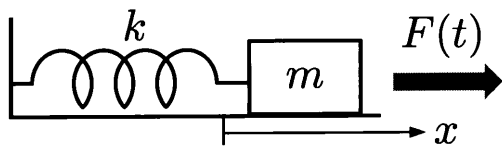


図5 強制外力を加えられる単振子。

このような2つのポテンシャル井戸を持つ系が同期する場合のエネルギー授受の特徴を明らかにするため、共振する場合の

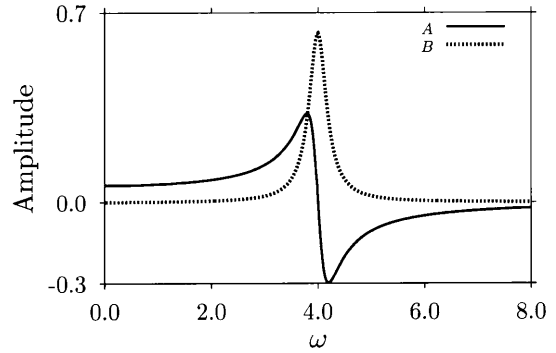


図6 外力の周波数を連続的に変えていった場合の弾性振幅、吸収振幅の関係。  $f_0 = 1.0, \omega_r = 4.0, \gamma = 0.1$

エネルギー授受の特性と比較する。共振する系の例として、振子が外力に共振している場合のエネルギーの流れに関して考察する。図5に示すように、抵抗力とばねによる復原力を受ける質量  $m$  の振子に強制振動  $F(t)$  を加える場合を考える。このときの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x} + F(t) \quad (6)$$

と表される。 $k$  はばね定数で  $\Gamma$  は抵抗力の比例定数とする。式(6)を整理すると次式となる。

$$\ddot{x} = -\omega_r^2 x - \gamma\dot{x} + f_0 \cos \omega t \quad (7)$$

ただし、 $\omega_r = k/m, \gamma = \Gamma/m, f_0 \cos \omega t = F(t)/m$  である。式(7)を  $x$  について解くと次式が得られる。

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8)$$

ただし  $A, B$  は次式となる。

$$A = \frac{f_0(\omega_r^2 - \omega^2)}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (9)$$

$$B = \frac{f_0\gamma\omega}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (10)$$

図6に強制外力の周波数  $\omega$  に対する振幅  $A, B$  の変化を示す。式(7)において  $\omega_r = 4.0$  としている。図6より  $\omega = 4.0$  において共振していることがわかる。さて単位時間あたりに外力が振子にする仕事、即ち仕事率  $P(t)$  は力×速度より次式で表せる。

$$P(t) = m f_0 \cos \omega t (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \quad (11)$$

この仕事率  $P(t)$  の時間変化を図7に示す。縦縞の部分は外力が振子にする正の仕事である。水玉の部分は外力が振子にする負の仕事であり、振子が外力に対してエネルギーを返していることを意味する。また黒塗りの部分は正の仕事から負の仕事を差し引いた量であり、振子が外力から得た収支の吸収エネルギーである。この吸収エネルギーは抵抗によって消費される散逸エネルギー  $\int \gamma \dot{x}^2 dt$  と等しい。外力の周波数  $\omega$  を  $0.0$  から  $8.0$  まで変化させた場合の一周期  $T = 2\pi/\omega$  あたりの正の仕事、負の仕事、吸収エネルギーを示したものが図8である。この図より共振周波数  $\omega = 4.0$  において正の仕事と吸収エネルギーが最大となり、負の仕事が0となることがわかる。図6と図8を照ら

し合わせると、振子の位相が各エネルギーの大きさを支配していることがわかる。さらに図9は外力の周波数 $\omega$ を変化させたときの正の仕事に対する吸収エネルギーの割合、正の仕事に対する負の仕事の割合を示している。外力から得たエネルギーを吸収するか戻すかは、その割合が共振周波数ではっきりと分れている。以上の図8、図9で示した共振におけるエネルギーの特徴が同期の場合にも見られるかについて次章で述べる。

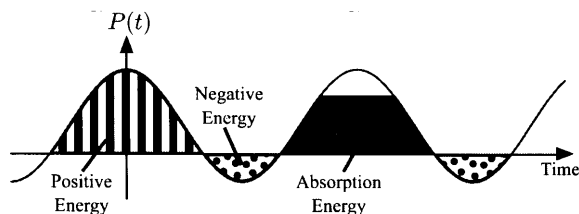


図7 仕事率の時間変化と正の仕事, 負の仕事, 吸収エネルギーの関係.

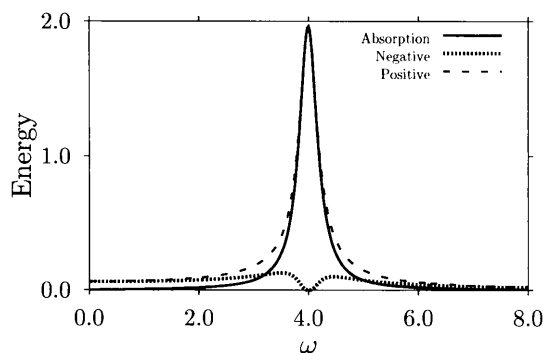


図8 外力の周波数を連続的に変えていった場合の正の仕事(破線), 負の仕事(点線), 吸収エネルギー(実線)の関係.

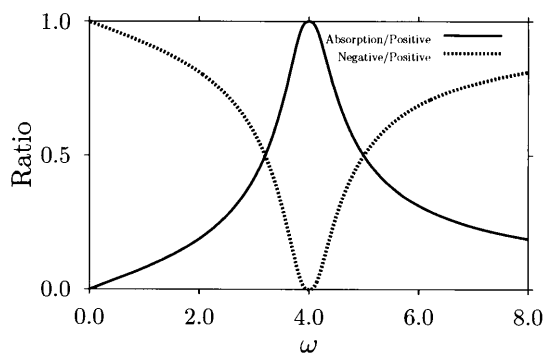


図9 外力の周波数を連続的に変えていった場合の正の仕事に対する吸収エネルギーの割合(実線), 負の仕事の割合(点線).

## 5. 同期を起こす系の構成

2つの系が同期をする場合のエネルギーのやり取りの特徴について考察する前に、同期をする系の構成について述べる。C. K. Volosらは、2つのDuffing系の間で双方向的に信号をやり取りすることで、同期を達成した[9]。この文献に基づき数値的に検討した結果、2つのDuffing系において2つ以上の周期を含

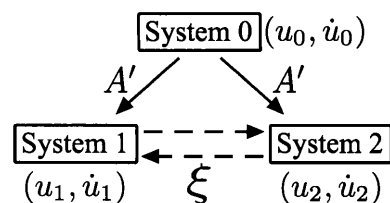


図10 系1と系2が同期する3つの系を組み合わせた構成.

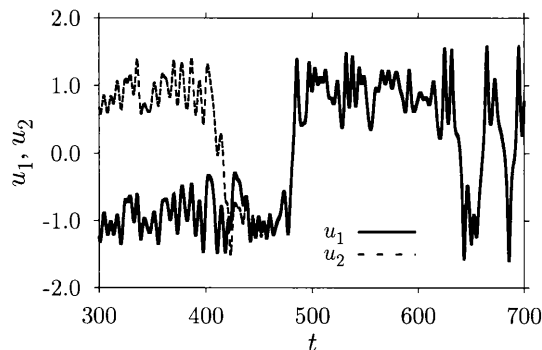


図11  $\xi=0.44$ の場合の $u_1$ と $u_2$ の時間波形.  $t=450$ あたりから同期している.  $\gamma=0.1, b=0.12, A'=0.14, \omega_0=0.74$

む振動での同期を達成した。図10に励振系0と、系1、系2の総合の関係を示す。各系の運動方程式は次式に示す。

$$\text{系0: } \ddot{u}_0 = \gamma \dot{u}_0 - \frac{1}{2}(u_0^2 - 1)u_0 + b \cos \omega_0 t \quad (12)$$

$$\text{系1: } \ddot{u}_1 = \gamma \dot{u}_1 - (1 - \xi) \frac{1}{2}(u_1^2 - 1)u_1 - \xi \frac{1}{2}(u_2^2 - 1)u_2 + A' u_0 \quad (13)$$

$$\text{系2: } \ddot{u}_2 = \gamma \dot{u}_2 - (1 - \xi) \frac{1}{2}(u_2^2 - 1)u_2 - \xi \frac{1}{2}(u_1^2 - 1)u_1 + A' u_0 \quad (14)$$

この構成において同期を起こすのは系1と系2である。式(13)、(14)に示すように系1と系2は双方向的に信号を外力としてやり取りしている。その信号の強度は結合定数 $\xi$ で決まる。結合定数 $\xi$ が比較的小さい値の場合に、系1および系2がどちらかのポテンシャル井戸にトラップされるのを防ぐため、外力として系0からカオス振動 $A' u_0$ を加える。 $\gamma$ は抵抗力の比例定数とする。式(12)、(13)、(14)は全て無次元化してある。 $u_1$ と $u_2$ が同期する様子を図11に示す。無次元時間450あたりから同期しているのが確認できる。図12に結合定数 $\xi$ を0.40から0.50まで変化させた場合に関して、 $u_1$ と $u_2$ の差を示す。 $\xi=0.423$ から $\xi=0.46$ で $u_1$ と $u_2$ の差が0となり、系1と系2が同期していることがわかる。

## 6. 同期の場合のエネルギーのやり取り

共振と同期に関してエネルギーの観点で比較する。まず同期する場合のエネルギーに関する特徴について述べる。系2にとっての外力は系0と系1からの力の合計 $-\xi \frac{1}{2}(u_1^2 - 1)u_1 + A' u_0$ である。同期の場合も式(11)同様に仕事率 $P(t)$ は力×速度であり

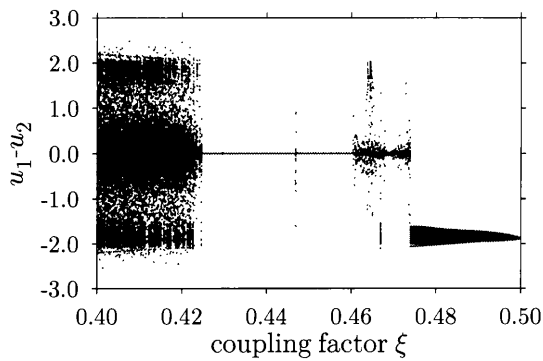


図 12 結合係数  $\xi$  を変化させた場合の系 1 の振幅と系 2 の振幅の差:  $u_1 - u_2$ .  $\xi = 0.423$  以降同期している。

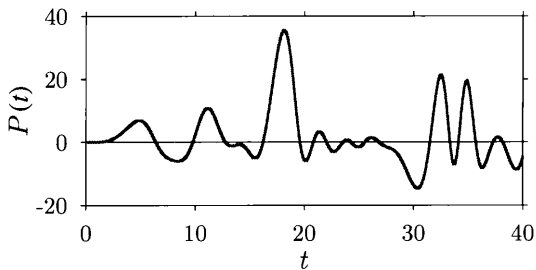


図 13  $\xi = 0.44$  における仕事率の時間変化。

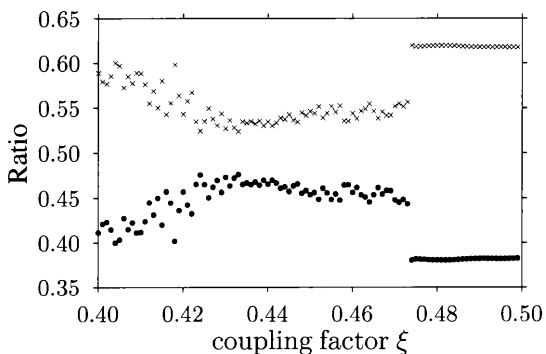


図 14 結合係数  $\xi$  を変化させた場合の正の仕事に対する吸収エネルギーの割合 (●) と負の仕事の割合 (×). 同期する場合に吸収エネルギーの割合が増加し、負の仕事の割合が減少している。

$$P(t) = \left(-\xi \frac{1}{2}(u_1^2 - 1)u_1 + A'u_0\right)\dot{u}_2 \quad (15)$$

と表すことができる。この仕事率  $P(t)$  の時間変化を図 13 に示す。図 7 と同様に  $P(t) = 0$  を基準にして正の仕事、負の仕事、とその収支である吸収エネルギーを計算する。正の仕事に対する吸収エネルギーの割合と、正の仕事に対する負の仕事の割合を各  $\xi$  毎にプロットしたものを図 14 に示す。この図 14 と図 12 を比較すると、同期開始の  $\xi = 0.423$  以降で、吸収エネルギーの割合は増加し、負の仕事の割合は減少していることが分かる。次に図 14 と図 9 を比較する。共振の場合のエネルギー関係を表す図 9 において、吸収エネルギーの割合は、共振周波数付近で増加した。一方図 14 においても  $\xi \geq 0.423$  で同期するとき、吸収エネルギーの割合が増加している。また負の仕事の割合も、共振と同期の場合で同様に減少している。また系 0 からの励振  $A'u_0$  の  $(u_0, \dot{u}_0)$  を  $2\pi/\omega_0$  毎にプロットしたものを図 15 に示

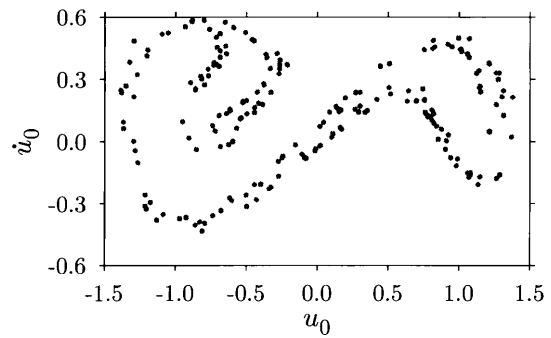


図 15  $\xi = 0.44$  における系 1  $(u_0, \dot{u}_0)$  の  $2\pi/\omega_0$  毎のプロット。

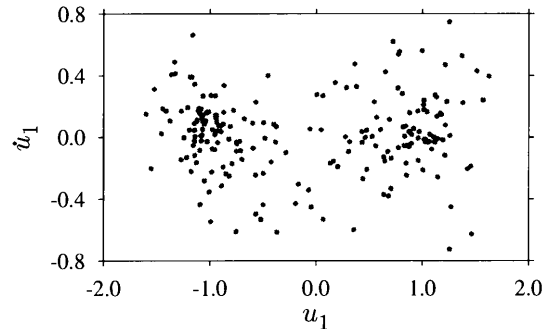


図 16  $\xi = 0.44$  における系 1  $(u_1, \dot{u}_1)$  (系 1 と系 2 は同期している) で、 $u_2 = u_1, \dot{u}_2 = \dot{u}_1$  の  $2\pi/\omega_0$  毎のプロット。

す。同期している場合の系 2 の  $u_1 (= u_2)$  を  $2\pi/\omega_0$  毎にプロットしたものを図 16 に示す。図 16 では系 1 と系 2 との同期がカオス同期なのかは確認できない。カオス同期が成立しているか否かの確認については今後の課題とする。

## 7. おわりに

本報告では、非線形磁気弾性梁において 2 個の磁石間隔が変化した場合のポテンシャル表現について検討し、磁石間隔に対して連続的に変化するポテンシャルモデルを得た。さらに 2 つの Duffing 系で双方向的に信号を送ることで同期し、共振の場合におけるエネルギー授受の特徴を確認し、同期の場合と比較した。得られた結果について今後さらに検討を進めていきたい。

## 謝 辞

本研究を進めるにあたり、同期について丁寧にご教示いただいた横井裕一先生 (長崎大学) に感謝致します。

## 文 献

- [1] 瀬津家久, 富永晃宏: 水理学; 朝倉書店 (2007).
- [2] 日野幹雄: 流体力学; 朝倉書店 (2011).
- [3] 木田重雄, 柳瀬眞一郎: 乱流力学; 朝倉書店 (2009).
- [4] M. M. Bernitsas, K. Raghavan, Y. Ben-Simon and E. M. H. Garcia, "Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy: A New Concept in Generation of Clean and Renewable Energy From Fluid Flow", *J Offshore Mech Arctic Eng*, Vol. 132, No. 4, pp. 041101-1-041101-15 (2008).
- [5] D. A. W. Barton, S. G. Burrow and L. R. Clare, "Energy Harvesting From Vibration With a Nonlinear Oscillator", *J Vib Acoust*, Vol. 132, No. 2, pp. 021009-1-021009-7 (2010).

- [6] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in Chaotic Systems", *Phys Rev Lett*, Vol. 64, No. 8, pp. 821–824 (1990).
- [7] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Driving systems with chaotic signals", *Phys Rev A*, Vol. 44, No.48, pp. 2374–2383 (1991).
- [8] F. C. Moon and P. J. Holmes, "A Magnetoelastic Strange Attractor", *J Sound Vib*, Vol. 65, No. 2, pp. 275–296 (1979).
- [9] C. K. Volos, I. M. Kyprianidis, and I. N. Stouboulos "Synchronization of two Mutually Coupled Duffing-type Circuits", *International Journal of circuits, Systems and Signal Processing*, Issue. 3, Vol. 1, pp. 274–281 (2007).