はじめての

精密工学

精密加工機の振動解析

Vibration Analysis of Precision Machine Tools/Atsushi MATSUBARA

京都大学大学院工学研究科　松原　厚

1. はじめに

3次元CADの普及とともにCAEによる振動解析が容易になり，実験モード解析もこなれた技術になっている．しかし，精密な加工機の振動解析は依然として難しい．これは数ミクロンの振動原因を明らかにしなければならないからである．例えば，CAEで固有振動数を計算しても，それが加工機の運動精度にどれほどの影響があるのかがわからなければならない．また実験モード解析の結果から構造設計をどう変えていいのかがわからない．振動解析と精度設計を融合するには，やはり基礎と経験が必要となる．本稿では，これだけはおさえておきたいという基礎を中心に解説する．なお，動的なシステムと制御理論の知識が必要になるので，適宜，文献[1]等を参照されたい．

2. 基礎理論

2.1　1自由度振動系の周波数応答

質量 m，減衰定数 c のダッシュポット，剛性 k のバネからなる1自由度振動系を考える．m の変位を $x(t)$，m に作用する外力 $f(t)$ としたとき，運動方程式は次式となる．

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t) \tag{1}$$

上式をラプラス変換し，外力から変位までの伝達関数を求める．

$$G(s)=\frac{x}{f}=\frac{1}{ms^2+cs+k}=\frac{1/m}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n{}^2} \tag{2}$$

ただし，$\omega_n=\sqrt{k/m}$：不減衰系の固有振動数，$\varsigma=c/\sqrt{mk}$：減衰比である．$s=j\omega$ とおくと，外力から変位までの周波数応答関数が次式のように得られる．

$$G(j\omega)=\frac{1/m}{(\omega_n{}^2-\omega^2)+2j\varsigma\omega_n\omega} \tag{3}$$

振動系は ω_n より低い周波数領域ではバネに，ω_n より高い周波数領域では質量で近似できる．

$$G(j\omega)|_{\omega\ll\omega_n}=\frac{1}{k} \tag{4a}$$

$$G(j\omega)|_{\omega\gg\omega_n}=-\frac{1}{m\omega^2} \tag{4b}$$

$\varsigma<1/\sqrt{2}$ の場合，式(3)から計算されるゲインが周波数 $\omega=\sqrt{1-2\varsigma^2}\,\omega_n$ で次のピーク値をとる．

$$M_{dp}=\frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}\cong\frac{1}{2\varsigma} \tag{5}$$

式(3)から(4)の周波数応答線図（ボーデ線図）の例を**図1**に示しておく．

2.2　多自由度振動系とモード解析

構造体の動特性は，多くの質点がバネとダッシュポットでつながれた多自由度振動系で表現できる．その運動方程式は1自由度振動系の変位と力をベクトルにし，式(1)の係数をマトリックスにした式で表現される．

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{6}$$

3次元の構造の場合，変位ベクトル成分には並進変位だけでなく回転変位も含まれる．有限要素構造解析ソフトでは，質量マトリックスと剛性マトリックスをCADデータから求めている．しかし，減衰マトリックスはある仮定をおかないと構造データから求められない．また，減衰が存在するとモードが複素数になり説明が簡単ではなくなる．そこで，通常は減衰行列がゼロ行列の場合の不減衰系を仮定する．

イメージをもってもらうために，**図2**に示すような4質点がバネでつながれた系を考える．この系において「質点をひっぱってはなす」というテストをしたとすると，系はいくつかの固有振動数で振動する．また質点の各固有振動数の変位成分は，てんでばらばらに変化するのではなく，ある比を保って変化する．この比はその固有振動ごとに決まっており固有モードと呼ばれる．

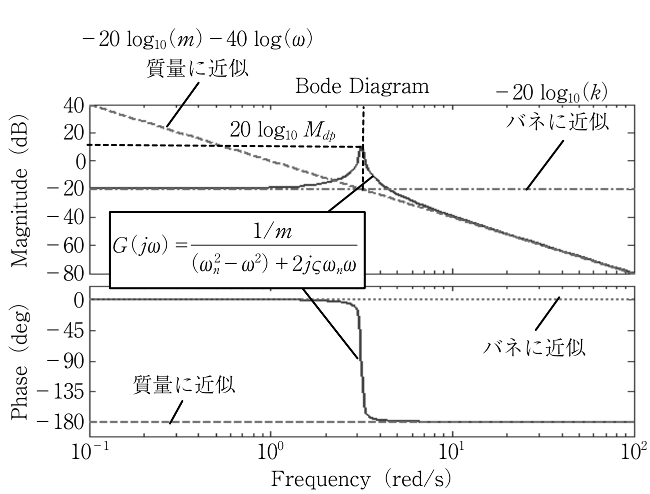

図1　1自由度振動系の周波数応答

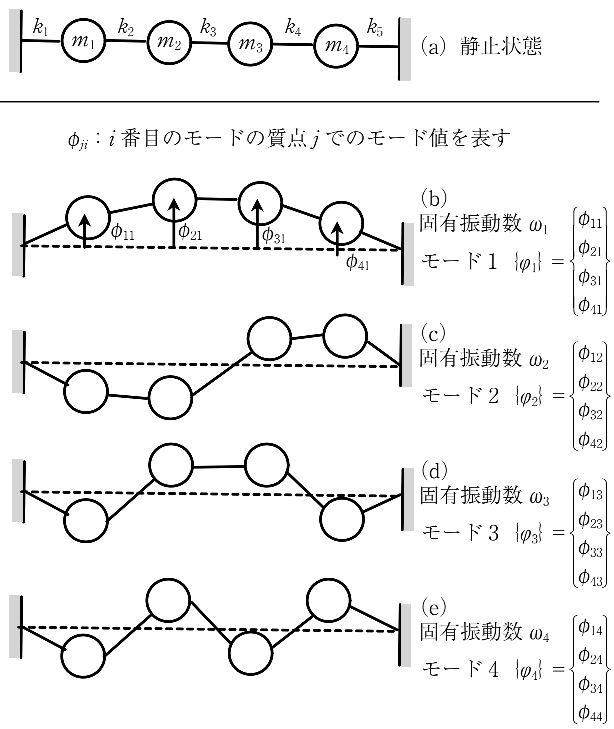

図2　4慣性系のモードシェープ

固有振動数と固有モードを求めるには，「ひっぱって離した瞬間からの状態」を式(6)上でつくればよい．すなわち，力ベクトルをゼロベクトルとし，

$$\{x(t)\}=\{X\}e^{j\Omega t} \tag{7}$$

を式(6)の減衰行列を零行列にした式に代入する．そして，$\{X\}$ がゼロベクトル以外の解をもつ条件

$$(\Omega^2[I]-[M]^{-1}[K])=\{0\} \tag{8}$$

から，固有振動数 Ω とそれに対応した固有ベクトル $\{X\}$ を求める．この固有振動数と固有ベクトルのセットは質点自由度の数だけ得られる．i 番目の固有ベクトルを $\{\phi_i\}$ としたとき，この大きさは図2のようになり，これがモードシェープと呼ばれる．

2.3　モード分解

固有ベクトルは列ベクトルであるが，これを横に並べた行列を固有モード行列と呼ぶ．

$$[\phi]=[\phi_1\,\phi_2\,...\phi_n] \tag{9}$$

モード行列を用いて物理座標系 $\{x(t)\}$ で表現された運動方程式をモード座標系 $\{\xi(t)\}$ に変換する．

$$\{x(t)\}=[\phi]\{\xi(t)\} \tag{10}$$

上式を式(6)の減衰マトリックスをゼロにした式に代入し，モード行列の転置を両辺の左から乗じる．

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{\xi}(t)\}+[\phi]^T[K][\phi]\{\xi(t)\}=[\phi]^T\{f(t)\} \tag{11}$$

ここで，上式の左辺の質量・剛性マトリックスは対角行列になることがわかっている．モード値を質量行列の対角項が1になるように選ぶと剛性行列の対角項には固有振動数の2乗が並ぶ．すなわち次式となる．

$$[\phi]^T[M][\phi]=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$[\phi]^T[K][\phi]=\begin{bmatrix}\omega_1{}^2&0&\cdots&0\\0&\omega_2{}^2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\omega_n{}^2\end{bmatrix} \tag{13}$$

このため，式(11)の左辺は自由度間の連成がない．すなわち各行で1自由度振動系となっている．ちなみに式(11)に式(12)(13)を代入してラプラス変換すると次式となる．

$$\begin{bmatrix}s^2+\omega_1{}^2&0&\cdots&0\\0&s^2+\omega_2{}^2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&s^2+\omega_n{}^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\cdots\\\xi_n\end{Bmatrix}=[\phi]^T\{f\} \tag{14}$$

式(10)と式(14)を用いて，物理座標系での応答を計算すると次式となる．

$$x\{(t)\}=[\phi]\times\begin{bmatrix}1/(s^2+\omega_1{}^2)&0&\cdots&0\\0&1/(s^2+\omega_2{}^2)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1/(s^2+\omega_n{}^2)\end{bmatrix}[\phi]^T\{f\} \tag{15}$$

上式より，h 番目の質点を加振した場合の，l 番目の質点の応答は次式で表現される．

$$\frac{x_l}{f_h}=\sum_i^n\frac{\phi_{hi}\phi_{li}}{s^2+\omega_i{}^2} \tag{16}$$

減衰系では各モードの減衰比 ς_i を仮定して応答を計算する．

$$\frac{x_l}{f_h}=\sum_i^n\frac{\phi_{hi}\phi_{li}}{s^2+2\varsigma_i\omega_i s+\omega_i{}^2} \tag{17}$$

図3は，例として質点2を加振したときの質点3の応答を制御理論で用いられるブロック線図で表現した図である．この図より，各モードの振動は加振点と応答点のモード値で増幅されていることがわかる．

式(17)の $\sum$ の中の項と式(2)を比較すると $\phi_{hi}\phi_{li}$ が質量の逆数に対応していることがわかる．つまりモード値が小さいところを加振する，または測定してもあまり応答しないので，これはモード質量が大きいと考えることもできる．ちなみに，加振点もしくは応答点のモード値がゼロ（モードの節と呼ぶ）だと，完全に応答しない．

加振点と応答点を入れ替えても伝達関数は同じである．これは，l 番目の質点を加振したときの h 番目の質点の伝達関数は，式(17)と同じ伝達関数になることから理解できる．加振点もしくは応答点を移動させながら周波数応答関数を測定し，この値から固有振動数，固有モード，モード減衰比を同定する手法が実験モード解析である．その詳細は文献[2)]を参照いただきたい．

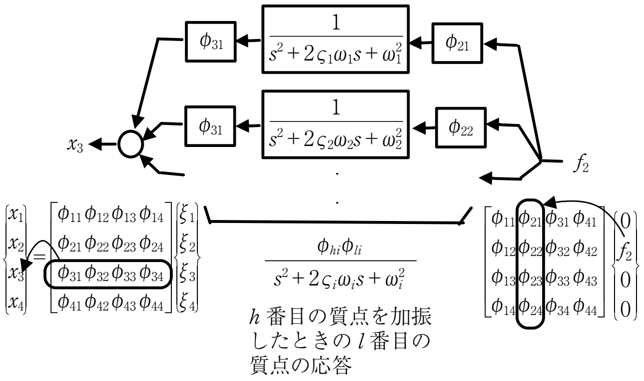

図 3　4 慣性系をモード座標系で表現したブロック線図（質点 2 加振時の質点 3 の応答）

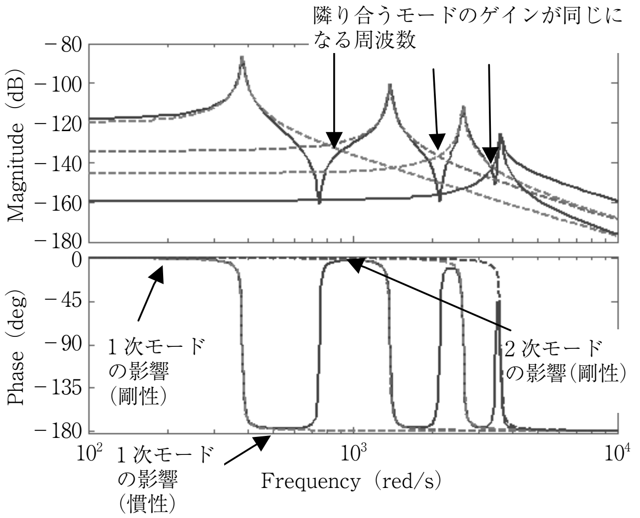

図 4　周波数応答線図（加振点と応答点が同じ）

2.4　周波数応答線図の見方

図 4 は，図 2 の例で質点 1 を加振したときの同じ点の周波数応答を式(17)から求めた図である．図中にはそれぞれの単体のモードの周波数応答線図を点線で，その和を実線で示している．このように加振点と応答点が同じ場合は，$\phi_{hi}\phi_{li}$ は正になる．図の例では，周波数が各モードの固有振動数を超えると位相が 180° 遅れるが，次のモードの固有振動数までに位相は再び回復し，位相が −180° 以下にならない．これは，周波数が各モードの固有振動数を超えたところでは，そのモードの質量特性が強くなり位相は 180° に近づくが，同時にゲインはさがり，次のモードの剛性ゲインがそれを上回るとバネ特性によって位相が 0° に戻ろうとするためである．制御理論では，このような系は最小位相推移系と呼ばれている．

一方で，**図 5** は加振点と応答点が異なる例を示した．これは質点 1 を加振したときの質点 2 の応答例である．3 次の固有振動モードは図 2（d）より質点 1 と質点 2 で符号が逆転している．このため $\phi_{hi}\phi_{li}$ の符号はマイナスになり，2 次モードと 3 次モードの間で位相はさらに遅れ

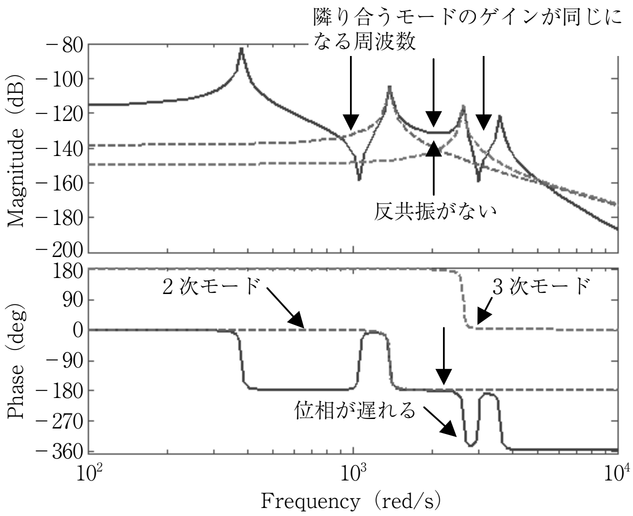

図 5　周波数応答線図（加振点と応答点が異なる）

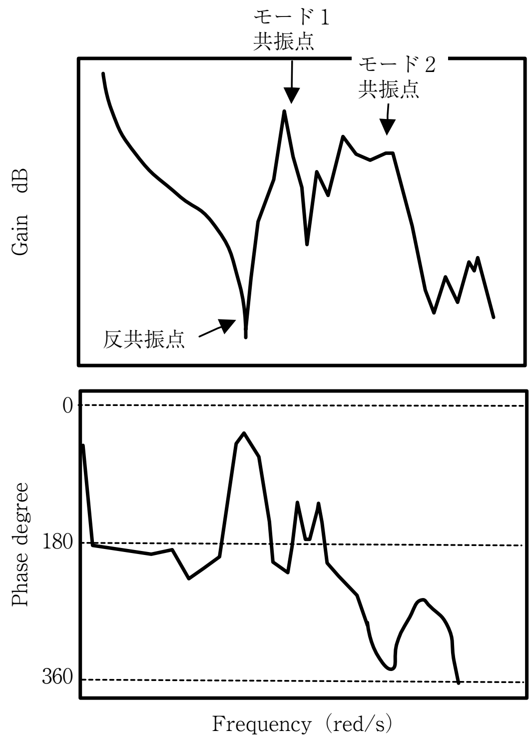

図 6　リニアモータ送り系の周波数応答の例

る．このような系は非最小位相推移系と呼ばれる．

3.　ケーススタディ

加工機の振動解析を行うときは，漠然とデータをとるのではなく目的意識をもたなければならない．サーボ系が絡む問題では，サーボ系が不安定になる振動モードと位相特性をチェックする．またサーボ系が安定な場合においても工具端で振動する原因を分析する．

3.1　サーボ系の安定性が問題になるケース

図 6 はある加工機の送り軸の周波数応答である．この機械はリニアモータ駆動であり，図はリニアモータの推力から検出用のリニアエンコーダ変位までの周波数応答である．この図から次のことが読み取れる．まず，モード 1 の

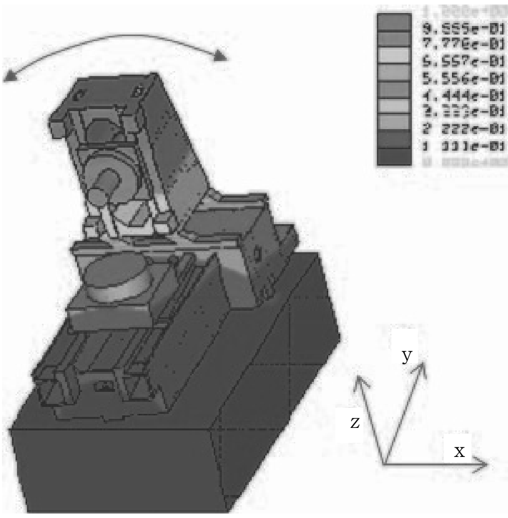

図 7　ロッキングによる相対振動が問題になるケース

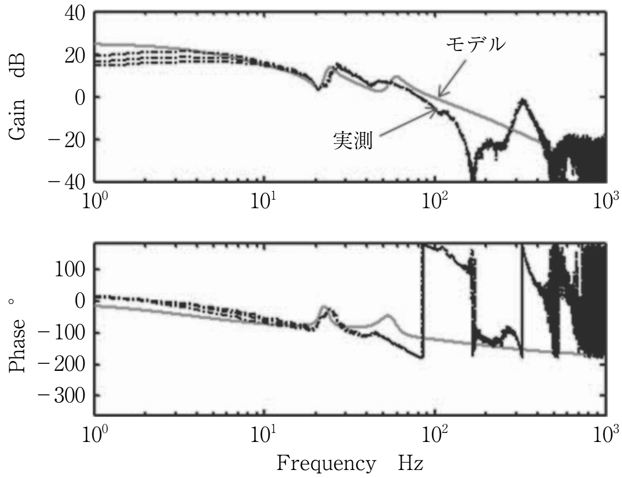

図 8　モータトルクからエンコーダ端（フィードバック端）速度までの周波数応答（X 軸方向）

共振ピークは高い．しかし，このモード自体の位相特性は悪くない．むしろ共振ピークがつぶれたモード 2 が非最小位相推移特性を示している．実際，エンコーダ位置を微分して速度フィードバック制御を行った場合，モード 2 の付近で位相が − 180° となり，速度ゲインを増加すると発振する．モード 2 の位相特性が悪い理由は，リニアモータとリニアエンコーダ位置が離れ，この間にモードの位相遅れが存在することによる．したがって．このモードが同相になるように構造設計を行う必要がある．

3.2　相対振動が問題になるケース[3)]

図 7 はある加工機（ボールねじ機）の振動モードの

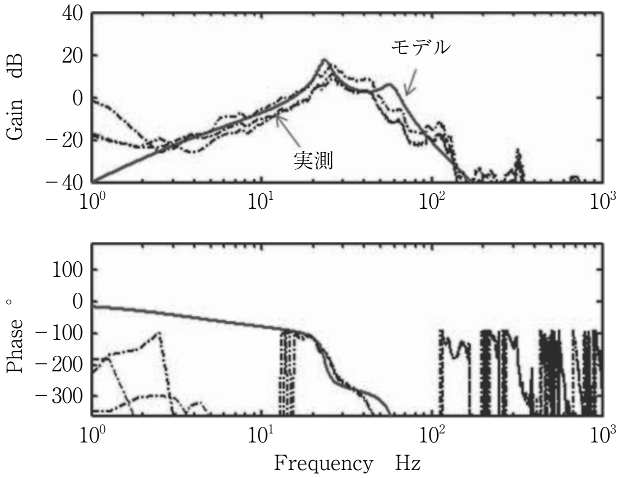

図 9　モータトルクからベース速度までの周波数応答（X 軸方向）

FEM による計算結果を示す．このモードはロッキング振動と呼ばれ，ほとんどの加工機がもつ振動モードである．通常，固有振動数は 20～60 Hz なので，よほど悪い設計をしない限りは，**図 8** に示すようにサーボ系で検出される振動モードは最小位相推移特性を示し，サーボ系を不安定にすることはない．しかし，**図 9** のベース速度には 20 Hz あたりの振動ピーク（図 8 では反共振点）がみられ，工具–テーブル間にモード差による相対振動が発生する．この場合，モード差の要因を調べていくと，コラム剛性やガイドの姿勢剛性が不足しているという結論に至ることが多い．これらの剛性を強化することはすぐ思いつく対策であるが，構造の慣性モーメントを大きくする方法もある．

4.　お　わ　り　に

見落としがちなのは，慣性のもつ制振機能である．FEM の静的設計だけを追求すると，振動しやすい機械を設計してしまう可能性がある．また本稿では誌面の都合で述べなかったが，反共振（制御理論では零点）は時には味方になり，時には敵になるので，その理解は重要である．

参　考　文　献

1）松原厚：精密位置決め・送り系設計のための制御工学，森北出版，(2008)．
2）長松昭男：モード解析入門，コロナ社，(1993)．
3）松原厚，梅本雅資，濱村実，藤田純，甲斐義章，垣野義昭：ベース振動の影響を受ける NC 工作機械送り系（第 1 報）―ベース振動を考慮した送り系のモデリングとサーボ解析―，精密工学会誌，**70**，4（2003）89-93.