

「教育数学の構築」を目指して

東北大学・国際教育院 浦川 肇 (Hajime Urakawa)
Institute for International Education,
Tohoku University

1. 「教育数学」と私の教わった教養部数学

「教育数学」とは、なにか高等教育における基礎科目、専門基礎科目に位置づけられたときの数学のありようを様々に議論する土台、コンセプトであるらしいとおぼろげに分かってきたのは、研究会の最終日のパネルディスカッションにおいてであった。

そういうことであってみるならば、まずは、私自身の体験的な教育数学を語ることから始めよう。私は、昭和40年(1965年)4月に東北大学理学部に入学した。2年時に数学科、物理学科、等に分かれる最後の学年で、翌年入学生からは最初から学科別入学となった。当時は、数学は1、2年の教養部で20単位修得し、「解析学 I」、「解析学 II」、「代数学・幾何学」、「応用数学」、「確率・統計」であった。理学部・工学部ともほぼ同一の講義が行われていた。1クラスの人数はおよそ60人程度であった。

「解析学 I」は1年生で、 $\varepsilon - N$ 論法、 $\varepsilon - \delta$ 論法に始まり、上極限、下極限、一様連続、1変数函数の中間値の定理、逆函数、微分、平均値の定理、テーラーの定理、上積分、下積分、積分可能性、不定積分の計算、広義積分などで、「解析学 II」は2年生で、前期は偏微分、重積分、級数など、後期は函数論であった。

なお、高木貞治の「解析概論」(1938年岩波書店)は、当時から「数学者を目指すなら、第1章をしっかりと読みなさい」と言われていたが、東北大学の先生方からは、常々「藤原松三郎の『微分積分学(第1、第2巻)(1934、1939年内田老鶴圃)』が最良」と言われて育った。最近、藤原先生の本を読んで、文献が詳しいのに、驚いた。例えば、定積分の近似公式にシンプソンの公式が彼の1743年のロンドンで出版の学位論文によるもので、ロルの定理は1691年のパリでの仕事によるものであることを、この本で初めて知った。「なるほど名著と言われているだけのことはあるな」と実感した。

「代数学・幾何学」は、佐々木重夫「代数学と幾何学」で、1年前期が集合、順列、組合せ、2項定理、多項定理、複素数、多項式の素因数分解、数体、素因数分解、代数

方程式、多項式環、など。1年後期が行列と行列式、連立1次方程式、ベクトル空間、1次変換、固有値と固有ベクトル、計量ベクトル空間、直交(ユニタリ)行列、実対称(エルミート)行列、行列の対角化、平面幾何学(2次曲線の分類)、立体幾何学(2次曲面の分類)などであった。

「応用数学」は2年前期が常微分方程式で、逐次近似法による解の存在と一意性、初等的解法、2階線形微分方程式、記号的解法、級数による解法など、2年後期がフーリエ変換、ラプラス変換、常微分方程式の解法への応用、フーリエ級数など。

「確率・統計」は、2年前期が確率論、2年後期が統計学であった。

2年の後期の金曜日には、いわゆる、「繰り上げ講義」があり、集合論、など3科目あった。

医学部、薬学部、歯学部、農学部の理系4学部への数学のメニューは、「解析学概論」、「代数学・幾何学概論」、「確率・統計」など各4単位、計12単位であった。

このカリキュラムは若干の手直しはあったものの、平成4年(1992年)まで続いた。

2. 平成5年の大改革

教養部数学科の若い教員の間では、このような数学のカリキュラムを改正したいと常々考えてきた。その主な理由は、(1)「確率・統計」4単位は多すぎる、(2)「応用数学」の2年後期の講義内容は工学部で行われる数学の講義と重複しているので整理が必要。(3)数学科以外の理学部、工学部の学生への解析学の講義に、 $\varepsilon - N$ 論法、 $\varepsilon - \delta$ 論法は必要なのであろうか、これでショックを受けてつまづく学生は数知れない、などというものである。これに対して、「いや $\varepsilon - N$ 論法、 $\varepsilon - \delta$ 論法は解析学において最も重要な概念であり、これを欠いた解析学は考えられない。理学部・工学部の学生にはこのようなショックを与えることは重要である」などとの反論も強かった。また、当時は教養部と学部とが完全に仕切られていて、双方の間話し合いの場も持つのが難しい状態にあった。

昭和61年(1986年)頃から、「 $\varepsilon - N$ 論法、 $\varepsilon - \delta$ 論法を使わない理工学部向けの解析学のしっかりした教科書と講義を行うことが可能であることを、実際に教科書を書いて、年配の先生方を説得しよう」という気運が若手の数学の教員の中に盛り上がり、各章を分担執筆し、当時出回り始めたワードプロセッサや手書き原稿を元にしたゼロックスコピーによる試行の教科書を50部ほど、1年後の昭和62年(1987年)頃、手刷りで作成し、それをもとに数学教室で議論を何回も行った結果、昭和63年(1988年)頃には、数学教室では、おおよその合意を見たのであった。

ちょうどこの頃、東北大学教養部の改組として、「広域科学部」構想が取りまとめられ、文部省への東北大学の概算要求事項に筆頭に取り上げられたのであるが、残念ながら認められなかった。忘れもしない平成2年(1990年)6月、ある生命保険会社の寮を使った2日間、平成2年(1990年)設置の東京大学数理科学研究科の設置についての説明会が行われ、東北大学から金子誠先生と私が参加した。文部省の係官の方の説明会も1時間程行われた。私はこのとき、「東北大学の広域科学部構想がなぜ通らないで、京都大学の似たような改組が通ったのか、その一番のメルクマールは何だったのか」と、尋ねた。そのとき、「京都大学の改組は、まず大学院、続いて学部、となっており、学部の設置は非常に難しいが、大学院の設置は比較的容易である」との重要な説明を引き出すことが出来た。この会議での全発言を網羅した詳細なレポートを作成し、東北大学教養部の執行部の方々に報告することができた。その報告書を下敷きにして、東北大学教養部の改組の方策が策定され、多小の貢献をすることができたのではないかと、秘かに自負している。こういう経過もあって、平成3年(1991年)の京都大学教養部の改組、名古屋大学教養部の改組の後、平成5年(1993年)に、「教養部の廃止し、大学院情報科学研究科、大学院国際文化研究科の設立」、「教養教育から全学教育への転換」を目玉とする東北大学教養部の改組が進められた。ここにいう「全学教育」とは、東北大学全学体制によって取り組む共通教育の実施というほどの意味である。その後、全国的にも教養教育の重視が叫ばれるようになり、一・二年生の教育の見直しも東北大学で行われたが、こと数学教育に関しては、部分的な改訂はあったものの、基本線は変えなくて済み、現在に至っている。

3. 東北大学における数学基礎教育のカリキュラム

さて、詳しくその中身と成立の過程を追ってみよう。

平成3年(1991年)4月、私は数学教室を代表し教養部教務委員となった。数学教育の具体的な内容について、各学部と数学教室との折衝が始まった。数学教室内でもほぼ現行のものに近い数学カリキュラムの合意ができていた。平成4年(1992年)4月、教授に昇格し、教養部教務副委員長に就任し、教養部審議委員長、教務委員長の方々と共に、教養部と各学部との折衝が始まった。工学部、理学部;医学部、歯学部、薬学部、農学部;文科系各学部など、それぞれに学部の希望は異なっており、それらをすべて数学教室に持ち帰り、再び交渉という日々が続いたが6月末にようやく、決着した(というか、文部省との概算要求の最優先事項が、「教養教育の抜本見直し」にあるので、翌年四月実施から逆算して日程が組み立てられていたのである)。実は

そもそも学年歴・開講時間からして、各学部でまちまちであったのであり、それらの統一も必要であった。続いて「全学教育の時間割の作成」となったが、教養事務部も、「このような抜本改定、新規時間割作成は経験がない」とのことで、教務委員会で作成することになり、7月、8月、その作業に今度は追われることとなる。コンピュータの専門家に相談したところ、「そんな大きなデータを扱えるものはない」とのことで、手作業でやるはめになった(今は、事務部で簡単にできるようであるが)。各学部の意向、教養部、理学部の授業担当者の意向など面倒な擦り合わせが必要で、それらの全情報を一つ一つ考慮に入れながら、畳4畳ほどの大きな「時間割表」をテーブルにおいて、データを入れて行く根気のいる作業である。7月、8月の間、教務委員全員でその作業に忙殺され、9月に入り、ようやく完成を見たのであった。

さて、東北大学における教育数学の現況につながる平成5年の全学教育数学教科目の内容を見てみよう。まず、大枠として、全学教育のすべての講義は半年2単位を1コマとし、通年の講義は廃止されることになった。

工学部では、「解析学 I」、「解析学 II」、「解析学 III」、「解析学 IV」、「線形代数学 I」、「線形代数学 II」、「数理統計学」の新メニューを用意し、交渉に臨んだ。

平成5年度実施の全学教育に向けて、理系学部の「基礎教育」の「数学」について、工学部教務委員会と教養部数学教室の交渉委員会との交渉が始まった。その結果、次のように骨子が決まった:

- ① 2年時の従来行っていた4単位の「解析学 II」は、「数学物理学演習」(学部専門教育、演習なので通年で2単位)とし、1年時に行う。
- ② 「確率・統計」(4単位)を、「数理統計学」(2単位)または「離散数学」(2単位)の選択とする。
- ③ 「応用数学」(4単位)は、常微分方程式に関する2単位のみとし、フーリエ級数、フーリエ変換やラプラス変換などは、学部専門教育で行う。

さらに細かく、「解析学 I」では、1変数の微分と2変数関数の偏微分、全微分を扱う。「解析学 II」では、1変数関数の積分と重積分を扱う。物理の講義を考えると、1年前期で同時に行う。線形代数学は、4単位必要と主張したが認めてもらえず、「線形代数学」のみの2単位となり、ベクトル、行列式、行列の階数、連立方程式の解法、逆行列、固有値、固有ベクトル、内積、グラム・シュミットの正規直交化法、直交行列、対称行列の対角化など、を1年前期で一気に教えることとなった。「解析学 III」で、1年後期に、「 $\varepsilon - \delta$ 論法」などの解析学の基礎、級数、ベクトル解析、1変数複素関数論の初歩を講義する。「解析学 IV」は、常微分方程式を講義し、「数理統計学」も2年前半で講義

し、合計12単位を旧教養部数学教員で担うこととなった。同時に、工学部の責任で1年前期、後期に「数学物理学演習」(通年2単位)を担い、数学と物理数学の初歩的・基礎的な演習を行うことによって、今で言う転換教育としての役割をも担うようにする。その他、選択で、平成11年(1999年)までは、「離散数学」もあった。

すぐにお分かりのように、数学として見れば、これは相当変則的で無理のあるカリキュラムである。平成12年(2000年)の、全学教育見直しの時期に、同時に数学カリキュラムについてもその見直しが行われた。同時に全学教育のあり方についても見直された。全学組織の「学務委員会」が設置され、その中に、「全学教育科目委員会」があり、その中に、「数学教科目」委員会がある。さらに、その下に「連絡委員会」、「企画部会」、「カリキュラム部会」が置かれて、様々な問題を審議されるようになっている。

さて、現在では、工学部の数学教育(全学教育と学部専門教育)については、次のようになり、比較的整合性の取れたカリキュラムに落ち着き、現在に至っている。

東北大学の教育数学

(工学部の場合。理学部もほぼこれに準じている)

1年前期:

「解析学 A」 1変数関数の微積分を扱い、テーラー級数にも簡単に触れる

(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「線形代数学 A」 連立方程式の解法、ベクトルの一次独立性、行列の階数、

逆行列、行列式、行列式の展開(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「数学物理学演習」 数学と物理数学の初歩的な演習(工学部教員担当)、

1年後期:

「解析学 B」 2変数関数の偏微分と重積分

(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「線形代数学 B」 線形写像、核空間と像空間、固有値、固有ベクトル、行列の三

角化、内積、グラム・シュミットの正規直交化法、直交(ユニタリ)行列、実対

称(エルミート)行列の対角化(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「数学物理学演習」 数学と物理数学の初歩的な演習の続き(工学部教員担当)、

2年前期:

「解析学 C」 常微分方程式(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「解析学 D」 1変数複素関数論(理学・情報科学研究科数学教員担当)、

「数理統計学」 確率論、統計学(理学・情報科学研究科数学教員担当)。

他に、2年前期及び2年後期で、工学部数学担当教員による学部専門教育として、「数学 A」、「数学 B」で、ベクトル解析、フーリエ・ラプラス変換、特殊函数論、物理数学などの講義が行われている。

4. 問題点と今後の課題

上記の東北大学工学部の数学のカリキュラムでは、まだまだいろいろな問題点が浮かび上がる。

まず解析学の問題点としては、「級数」をしっかり関数項級数まで含めてしっかりと、統一的に扱う場所がなくなってしまった。使用教科書では、どれも一応は、しっかりと述べられてはいるのであるが、講義では「さらっと」述べるにとどまっている。また、「 ϵ - δ 論法」についても同様に、簡単に触れるのみで、閉区間上の連続関数の最大値の存在定理、一様連続などを統一的に一貫するものとして扱うことができず、したがって閉区間上の連続関数のリーマン積分可能性の証明は、各教員にまかされている。

また、ベクトル解析の扱いについては、工学部の数学担当教員に任せられている。線積分、グリーンの定理、微分と積分の順序変更、さらにはストークスの定理、などベクトル解析に行く前の、触れておきたい話題であるあるが、時間的に余裕がなく出来ていない。

常微分方程式については、講義の指針はあるが、昔ながらのカリキュラムを行っている人、力学系の初歩に触れる人、などバラバラで、統一できていない。また、微分方程式、差分方程式、等々触れたいことは色々あるのだが、時間配分の余裕がない。

線形代数学でも、昔の「代数学・幾何学」の講義の方が、むしろ、情報数理とは整合性があり、良かったように思えることもある。しかし、線形代数の現行の講義でやっている程度は触れておきたいので、結局は妥協せざるを得ない。また、線形代数学の応用として、グラフ理論、連立線形常微分方程式の解法、またあまり知られていないようであるが、掃き出し法の応用として「線形計画法」なども、触れておきたい事柄である。

「教育数学」とは、「限られた時間の中をいかにやり繰りして、学生諸君の興味をつなぎながら、将来につながるコアの数学を教えるかというゲームをプレイしている」というような気分させられてしまうのであるが、いかがなものだろうか。

思えば、カリキュラムの編成作業に多少携わって痛感したことであるが、「数学のカリキュラムとは、学部と数学教員における組織的な話し合いの中で決まるもので、年齢的には40台から50台の、第一線で元気盛りの、しかし様々な価値観を持った色々な

数学者一人一人が持っている価値観そのものが激しくぶつかり合い、多大な労力と神経をすり減らし、ぶつかり合いの結果生ずる凝集あるいは妥協の産物として生まれた貴重な財産」という気がしてならない。

平成22年度からは、それまで所属していた大学院情報科学研究科は定年退職し、新たに東北大学教授として再雇用されて、「グローバル30英語コース」における「コーディネーター」として、日本語での全学教育の英語化の事業に携わり、また、関係諸学部からの代表者で構成されている「グローバル30英語コース全学教育委員会」(学務審議会下部委員会)の一員として、全学教育の運営にも微力ながら加えられている毎日である。

5. 幻の名著:藤原松三郎「微分積分学(第1巻、第2巻)」を読んで

藤原松三郎「微分積分学(第1巻、第2巻)」は第1巻が1934年(昭和9年)2月に発行され、1993年5月第12版が発行されており、第2巻が1939年(昭和14年)2月され、1982年12月第11版が発行されている。名著であると言われながら、今までほとんど読む機会がなかった。この度、本書を手にして読んでみて驚愕した。同じく名著と言われている高木貞治「解析概論」と比較してみると、多々参考になる。

章立ては下記の通りである:

<第1巻> 672頁

第1章 基本概念:無理数、数列の極限、点集合、無限級数、無限乗積、函数の極限、初等函数、練習問題

第2章 微分:微分法、導関数、平均値定理、平均値定理の応用、テーラー級数、函数項の無限級数、練習問題

第3章 積分:不定積分、定積分、有界でない函数の積分、無限積分、ガンマ函数、定積分の近似計算、練習問題

第4章 二変数の函数:二重数列と二重級数、函数の極限、二変数函数の微分、二変数函数の積分、二重積分、任意次数の微分積分、定積分の近似評価、練習問題
文献補遺、和英独対訳と索引、正誤並に補遺

<第2巻> 644頁

第5章 多変数函数:n次元空間の点集合、連続函数、多変数函数の微分、陰函数、極大極小問題、演習問題

第6章 曲線と曲面:平面曲線、空間曲線、曲面、演習問題

第7章 多重積分: 多重積分の基本性質、積分の変換、曲線積分、面積体積の計算、曲面積分、演習問題

第8章 常微分方程式: 1階微分方程式、解の存在問題、線形微分方程式、随伴微分方程式、級数による解法、スツルムの定理、演習問題

第9章 偏微分方程式: 線形1階偏微分方程式、連立線形1階偏微分方程式、全微分方程式、一般の1階偏微分方程式、2階偏微分方程式、補遺、演習問題

文献補遺、和英独対訳と索引、人名索引、
となっている。

まず、気の付くことは、どの本や論文を引用したか、微分積分の様々な定理が誰の、どの論文によるものか明示されていることにある。これは数学史の研究者にとって、極めて有益と思われる。

まず、第1章1頁、数列の極限について、実数列の極限についてナイーブな定義について、デデキントの1872年出版の著書「連続と無理数」に触れるところから導入があり、なるほどと納得させられた。続いてデデキントの切断、上限、下限を述べ、簡単に実数論を展開している。次に、「 $\epsilon - N$ 論法」による数列の極限の定義、コーシーの収束条件とコーシー列は収束するという定理とその証明を述べている。コーシー列を「基本数列」と名付け、2つの基本列の同値性を定義して、実数論を展開したのは、Cantor, Math. Ann., Vol. 5, 1872 の論文によるものであることをこの本で初めて知った。

「数列が収束するとき、その平均も同じ極限值に収束する」

という定理の出典は、Cauchy の著書 *Analyse algebrique*, 1821, *Oeuvres*, (2)3 にあり、Stolz, Math. Ann., Vol. 33 (1889) により拡張されたそうである。また、

「有界無限数列には少なくとも1つの集積点が存在する」

という、いわゆる「ワイエルシュトラス・ボルツァノの定理」は、ワイエルシュトラスが彼の講義中にこの定理を述べたそうであるが、ボルツァノは1817年に公にしたのだとか。

ハイネ・ボレルの被覆定理:

「閉区間の、区間(あるいは開集合)による被覆は有限個で被覆できる」

は Borel, *Ann. L'Ecole norm. sup.*, (3) 12, 1895 によるものだそうである。正項級数の収束条件についても、文献入りで詳細に述べられている。特に、「コーシーの判定条件」というのが有名であるが、これは前出の Cauchy, p.121 にあるとのことである。また

「ガウスの判定条件」というのがあるそうであるが、これは Gauss, Werke 3, p.140 にあるとのことで、とにかく徹底的に詳しいのである。

「絶対収束級数は項を順序変更しても同じ値に収束する」

という「ディリクレの定理」は Berliner Abh. 1837, Werke, 1, p. 319 にあり、

「条件収束のときには項の順序を適当に変更すれば、いかなる和にも取ることができる」

という「リーマンの定理」は Habilitationsschrift, 1854, Werke, p. 235 にあるとのことである。

「閉区間上連続な函数はこの区間で一様連続である」

という有名なハイネ=ボレルの定理は Heine, Journ. f. Math. 71, 74, (1870), (1872) にあることも知った。

第2章 微分では、「至る所微分不可能な連続函数」について、ワイエルシュトラスの函数がそうであることの定理の正確な記述及びその証明、当時の影響、文献が詳述されている。この辺り、なおも多くの数学者の興味を引くものと思われる。

次に「平均値定理」に移る。「ロル(Rolle)の定理」は彼の1691年の仕事によるものであるとのことである。その定理の応用として、「ルジャンドルの整式」と呼ばれる多項式の根がすべて开区間 $(-1,1)$ の中にあることが述べられている。さらなる平均値の定理の応用として、「第 n 差分と n 階微分との興味ある関係」について触れられている。

「テーラーの定理」に移る。「テーラー級数」は、1715年の彼の著書: Method incrementorum directa et inversa の21頁にあり、「マクローリン級数」は実は、同書の27頁に既にあるという。マクローリン級数については、マクローリンの著書は Treatise of fluxions, 1742 年で、その611頁には、その級数について「テーラーが与えたものである」と引用されているとのことである。級数論は前述のコーシーの著書により組織立てて展開されたが、その第6章において

「連続函数を項とする収束級数の和はまた、連続函数になる」

と述べているようで、アーベルは Jour. f. Math. Vol. 1, (1826), 及び Werke 1, p.219 において反例を与えた。ワイエルシュトラスが1841年に「一様収束」の概念に到達し、ベルリン大学での講義中に述べたが、それとは独立に Stokes, Trans. Cambridge Phil. Soc., 7 (1847), 236 と、Seidel, Munchener Abh. 7 (1848) の仕事があり、Cauchy 自身も、Comptes Rendus 36 (1853) において「一様収束の概念を得た」と述べている、とのことである。

さらに読み進んでみよう。

「閉区間 $[a,b]$ 上で函数 $s(x)$ に収束する函数項級数について、各項が k 階微分可能で、各項の k 階微分からなる級数が閉区間 $[a,b]$ 上で一様収束するならば、 $s(x)$ の k 階までの微分はそれぞれ、項別微分したものに等しい」という「ランダウの定理」(Landau, Archiv d. Math., 26 (1917))と、その証明が237～239頁に与えられていて、このような面白い便利な定理があることを初めて知った。

「微積分学の発達」という節(274～277頁)では、ニュートンとライプニッツの微積分学の「もめにもめた」発見物語について詳しく触れられている。これについては、岩波数学辞典第4版:項目176の「17世紀の数学」にも詳述されているので、両者を読み比べて見られると面白い、と思われる。

解答は与えられていないが、各章には興味ある問題が与えられており、その中には、Polya, Tohoku Math. Jour., 19, (1921) の仕事が練習問題の93番に出されていた。

定積分では定積分の普通の平均値定理(第1平均値定理という)の他に、第2平均値定理というのがある(これは一度使ったことがある有用な定理)。これには様々な型があるようで、Bonnet, Journ. de Math., (1), 14 (1849) のもの、ワイエルシュトラスが、やはりベルリン大学で講義中に述べ、デュボア＝レーモンド Du Bois=Reymond, Journ. f. Math., 69 (1868) のもの、などがあるとのことである。

有界でない函数の積分として、 $1/x$ なる函数の閉区間 $[-1,1]$ 上の積分について「コーシーの主値」というものがあり、Hardy, Proc. London Math. Soc., Vol. 34, 35, 1902, 1903 に詳しい研究のあることがコメントされていた。

定積分の例題にもこったものが多い。これは高木貞治の著書にも共通しているが、例えば、 $\sin x/x$ の $(0,\infty)$ 上の積分が収束し、 $\pi/2$ となること、 $\sin(x^2)$ の $(0,\infty)$ 上の積分が $\pi/2$ の平方根の $1/2$ となることと、より一般に、 $\sin(x^m)$ や $\cos(x^m)$ の定積分がガンマ函数でかけることなどの証明が例題として述べられていた(555頁)。

以上、微積分学の名著として名高い著書を、長々と紹介した。今読んでみても興味を引かれる。「へーッ。こんな定理があるのか、知らなかった」と、自分の無知を知らされ、恥じ入るばかりである。残念ながら、私はこの名著はその存在を知るのみで、今まで、実際には、ほとんど紐解くことはなかった。今回、研究集会「教育数学の構築」の議論の中で「そう言えば」と改めて思い起こし、詳細にそれを読む機会が与えられたのは感謝である。その一方で、高木貞治「解析概論」については、その第1章を1年生

のときに、斎藤偵四郎先生に土曜日午後にゼミ指導をしていただいて「行間を読みなさい」と指導されて徹底的にしごかれた。そのことによって、私自身の数学的な基礎を与えられた、とあって深く感謝している。今後は、これら2つの良書を、互いに読み比べて楽しんでみたい、と思っている。

なお、以下は、「教育数学」に関係する東北大学関係者の「解析学」の著書、及び小生の拙い著書の一覧である。参考文献としてあげておこう。

なお、「a. 解析学大要」とその「b. 改訂版」は、長年にわたり、使用教科書が自由化した平成5年の東北大学教養部の改組まで続いた解析学の「標準教科書」である。

藤原松三郎、数学解析第一編、微分積分学 第一巻、1934年2月1日発行、
内田老鶴圃(ろうかくほ)

藤原松三郎、数学解析第一編、微分積分学第二巻、1939年2月18日発行、
内田老鶴圃

a. 解析学大要、御園生善尚、渡利千波、斎藤偵四郎、望月望、1973年、養賢堂

b. 改訂版 解析学大要、御園生善尚、望月望、金子誠、内山明人、1988年、
養賢堂、

c. 基礎微分積分学 I (1変数の微積分)、中村哲男、今井秀雄、清水 悟、
2003年、共立出版

d. 基礎微分積分学 II (多変数の微積分)、中村哲男、今井秀雄、清水 悟、
2003年、共立出版

1. 線形代数入門、内田伏一、高木斉、劔持勝衛、浦川 肇、1988年、裳華房

2. 線形代数演習、内田伏一、高木斉、劔持勝衛、浦川 肇、1992年、裳華房

3. 線形代数通論、内田伏一、浦川 肇、1994年、裳華房

4. 線形代数概説、内田伏一、浦川 肇、2000年、裳華房

5. 解析入門 級数／複素関数／ベクトル空間、浦川 肇、1998年、裳華房

6. 微積分の基礎、浦川 肇、2006年、朝倉書店

7. 変分法と調和写像、浦川 肇、1990年、裳華房

8. H. Urakawa, Calculus of Variations and Harmonic Maps, 1993, Amer. Math. Soc

9. ラプラス作用素とネットワーク、浦川 肇、1996年、裳華房

10. ラプラシアン of 幾何と有限要素法、浦川 肇、2009年、朝倉書店