数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 268-273

分数型利得に対する最適停止問題

広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻修士課程 2 年
守田瞬 (Shun Morita)
広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻
田中輝雄 (Teruo Tanaka)
Department of Systems Engineering,
Graduate School of Information Sciences,
HIROSHIMA CITY UNIVERSITY

1 はじめに

分数型評価基準の離散時間最適停止問題について述べる．分数型評価基準の最適化問題は，数理計画法では既に分数計画法という一分野があり (例えば，[17])，マルコフ決定過程では [1]，[8]，[13]，ゲーム理論では [14]，連続時間最適停止問題では [10] 等の研究がある．最適停止問題の拡張として，多数回停止規則をもつ問題がある (例えば，[7]，[9]，[11]，[12]，[16])．多数回停止規則をもつ最適停止問題は数理ファイナンスへ応用されている (例えば，[3]，[4])．本論文では，[7]，[10] に従い，分数型評価基準の離散時間多数回最適停止問題の定式化を与え，最適停止規則，最適値，ε-最適について述べる．

2 記号と定式化

$\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$，$\overline{\mathbf{N}}=\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ とする．$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を完備確率空間，$\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$ をフィルトレーションとし，$\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty=\sigma(\cup_n\mathcal{F}_n)$ とする．$\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$ に関する有限停止規則 $t:\Omega\to\mathbf{N}$ の全体を C，停止規則 $t:\Omega\to\overline{\mathbf{N}}$ の全体を $\overline{C}$ で表す．

まず，2 種類の分数型評価基準の最適停止問題の定式化を与える．$\{Z(n),n\in\mathbf{N}\}$ を $\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-適合，非負値確率過程で，

$$E[\sup_{n\in\mathbf{N}}Z(n)]<\infty$$

を満たすとし，$\{W(n),n\in\mathbf{N}\}$ を $\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-適合，非負値確率過程で，

- $K>0$ が存在し，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，$W(n)\geq K\quad P$-a.e.
- 任意の $t\in C$ に対して，$E[W(t)]<\infty$

を満たすとする．

このとき，問題 (P_1) は

$$\frac{E[Z(t^*)]}{E[W(t^*)]}=\sup_{t\in C}\frac{E[Z(t)]}{E[W(t)]}$$

となる $t^*\in C$ を求めることである．

$\{Z(n),n\in\overline{\mathbf{N}}\}$ を $\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-適合，非負値確率過程で，$Z(\infty)\equiv\limsup_{n\to\infty}Z(n)$ とし，

$$E[\sup_{n\in\mathbf{N}}Z(n)]<\infty$$

を満たすとする．$\{W(n),n\in\overline{\mathbf{N}}\}$ を $\{\mathcal{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-適合，非負値確率過程で，$W(\infty)\equiv\liminf_{n\to\infty}W(n)$ とし，

- $K>0$ が存在し，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，$W(n)\geq K\quad P$-a.e.
- 任意の $t\in\overline{C}$ に対して，$E[W(t)]<\infty$

を満たすとする．

このとき，問題 (P_2) は

$$\frac{E[Z(t^*)]}{E[W(t^*)]} = \sup_{t \in \overline{C}} \frac{E[Z(t)]}{E[W(t)]}$$

となる $t^* \in \overline{C}$ を求めることである．

次に，[7] に従い，分数型評価基準の多数回最適停止問題の定式化を与える．

$\mathbf{I} \equiv \{(m,n);\ m<n,\ m,n \in \mathbf{N}\}$，$\mathbf{J} \equiv \mathbf{I} \cup \{(m,\infty);\ m \in \mathbf{N}\} \cup \{(\infty,\infty)\}$ とし，$\{\mathcal{F}_m, m \in \mathbf{N}\}$，$\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n) \in \mathbf{I}\}$ を次を満たすフィルトレーションとする：任意の $k \le m < n \le \ell$ に対して，

$$\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{m,n} \subseteq \mathcal{F}_{m,\ell}$$

であり，時間空間が $\mathbf{J}$ のときは，$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n), \mathcal{F}_{m,\infty} = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{m,n}), \mathcal{F}_{\infty,\infty} = \sigma(\cup_m \mathcal{F}_{m,\infty})$ とおき，$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{m,\infty} = \mathcal{F}_{\infty,\infty} = \mathcal{F}$ とする．

$\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n) \in \mathbf{I}\}$ に関する有限 2–停止規則とは，次を満たす確率変数の組 (s,t) である：

- $s < t < \infty\quad P$-a.e.
- 任意の m に対して，$\{s = m\} \in \mathcal{F}_m$
- 任意の $m,n(m<n)$ に対して，$\{s=m, t=n\} \in \mathcal{F}_{m,n}$

また，2–停止規則とは，次を満たす確率変数の組 (s,t) である：

- $s < \infty$ ならば，$s < t \le \infty$ であり，$s = \infty$ ならば，$t = \infty$
- 任意の m に対して，$\{s = m\} \in \mathcal{F}_m$
- 任意の $m,n(m<n)$ に対して，$\{s=m, t=n\} \in \mathcal{F}_{m,n}$

有限2–停止規則全体を T，2–停止規則全体を $\overline{T}$ で表す．$\{Z(m,n),(m,n) \in \mathbf{I}\}$ を $\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n) \in \mathbf{I}\}$–適合，非負値確率過程で，

$$E[\sup_{n \in \mathbf{N}} E[\sup_{(m,n) \in \mathbf{I}} Z(m,n)|\mathcal{F}_n]] < \infty$$

を満たすとし，$\{W(m,n),(m,n) \in \mathbf{I}\}$ を $\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n) \in \mathbf{I}\}$–適合，非負値確率過程で，

- $K > 0$ が存在し，任意の $(m,n) \in \mathbf{I}$ に対して，$W(m,n) \ge K\quad P$–a.e.
- 任意の $(s,t) \in T$ に対して，$E[W(s,t)] < \infty$

を満たすとする．

このとき，問題 (P_3) は

$$\frac{E[Z(s^*,t^*)]}{E[W(s^*,t^*)]} = \sup_{(s,t) \in T} \frac{E[Z(s,t)]}{E[W(s,t)]}$$

となる $(s^*,t^*) \in T$ を求めることである．

$\{Z(m,n),(m,n) \in \mathbf{J}\}$ を $\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n) \in \mathbf{I}\}$–適合，非負値確率過程で，任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して，

$$Z(m,\infty) \equiv \limsup_{n \to \infty} Z(m,n), \quad Z(\infty,\infty) \equiv \limsup_{m \to \infty} Z(m,\infty),$$

とし，

$$E[\sup_{n \in \mathbf{N}} E[\sup_{(m,n) \in \mathbf{I}} Z(m,n)|\mathcal{F}_n]] < \infty$$

を満たすとする.

$\{W(m,n),(m,n)\in\mathbf{I}\}$ を $\{\mathcal{F}_{m,n},\ (m,n)\in\mathbf{I}\}$-適合，非負値確率過程で，任意の $m\in\mathbf{N}$ に対して,

$$W(m,\infty)\equiv\liminf_{n\to\infty}W(m,n),\quad W(\infty,\infty)\equiv\liminf_{m\to\infty}W(m,\infty),$$

とし,

- $K>0$ が存在し，任意の $(m,n)\in\mathbf{I}$ に対して， $W(m,n)\geq K$ P-a.e.
- 任意の $(s,t)\in\overline{T}$ に対して，$E[W(s,t)]<\infty$

を満たすとする.

このとき，問題 (P_4) は

$$\frac{E[Z(s^*,t^*)]}{E[W(s^*,t^*)]}=\sup_{(s,t)\in\overline{T}}\frac{E[Z(s,t)]}{E[W(s,t)]}$$

となる $(s^*,t^*)\in\overline{T}$ を求めることである.

これらの問題 (P_i) $(i=1,2,3,4)$ に対して，最適停止規則，最適値，ε-最適等について考察する．次節以降で述べる結果は，次の結果に基づいている.

Proposition 2.1 ([8, 10, 17]) $\lambda\geq0$ に対して,

$$d(\lambda)\equiv\sup_{t\in C(or\ t\in\overline{C})}E[Z(t)-\lambda W(t)]$$

とおく．このとき,

(1) $d(\lambda)$ は凸，狭義単調減少関数である.

(2) $d(\hat{\lambda})=0$ となる $\hat{\lambda}(\geq0)$ が一意に存在する.

3 (P_2) の最適停止

Theorem 3.1 *(1)* 次を満たす一意解 $(\hat{\lambda},\ \{U(n),\ n\in\overline{\mathbf{N}}\})$ が存在する：

$$\begin{aligned}&\hat{\lambda}\geq0,\\&U(n)=\mathrm{esssup}_{t\in\overline{C},t\geq n}E[Z(t)-\hat{\lambda}W(t)\mid\mathcal{F}_n],n\in\mathbf{N},\\&E[U(0)]=0.\end{aligned}$$

但し， $U(\infty)\equiv\limsup_{n\to\infty}U(n)$.

(2) 最適停止規則 t^* と最適値は次で与えられる：

$$\begin{aligned}&t^*\equiv\inf\{n\in\mathbf{N}\mid U(n)=Z(n)-\hat{\lambda}W(n)\},\quad\inf\emptyset=\infty,\\&\frac{E[Z(t^*)]}{E[W(t^*)]}=\hat{\lambda}.\end{aligned}$$

次に，マルコフ過程に対する問題 (P_2) について述べる．$(X(n),\mathcal{F}_n,P_x)$ を可測空間 $(E,\mathcal{B})$ を状態空間にもつ離散時間定常マルコフ過程，$F:E\longrightarrow\mathbf{R}$ を非負値可測関数とし，任意の $x\in E$ に対して,

$$E_x[\sup_n F(X(n))]<\infty$$

を満たし， $G:E\longrightarrow\mathbf{R}$ を非負値可測関数とし,

- $K > 0$ が存在し，任意の $x \in E$ に対して，$G(x) \geq K$
- 任意の $x \in E$ に対して，$E_x[\sup_n G(X(n))] < \infty$

を満たすとする．但し，$F(X(\infty)) \equiv \limsup_{n\to\infty} F(X(n))$，$G(X(\infty)) \equiv \liminf_{n\to\infty} G(X(n))$.

Theorem 3.2 $\lambda \geq 0$ に対して，$S(\lambda, x) \equiv \sup_{t\in\overline{C}} E_x[F(X(t)) - \lambda G(X(t))]$ とおく．このとき，

(1) $S(\widehat{\lambda}(x), x) = 0$ となる可測関数 $\widehat{\lambda} : E \longrightarrow \mathbf{R}$ が一意に存在する．

(2) 最適停止規則 t_x^* と最適値は次で与えられる：

$$t_x^* \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} \mid S(\widehat{\lambda}(x), X(n)) = F(X(n)) - \widehat{\lambda}(x)G(X(n))\}, \quad \inf\emptyset = \infty, \quad x \in E,$$
$$\widehat{\lambda}(x) = \frac{E_x[F(X(t_x^*))]}{E_x[G(X(t_x^*))]} = \sup_{t\in\overline{C}} \frac{E_x[F(X(t))]}{E_x[G(X(t))]}.$$

4 (P_1) の最適停止と ε–最適

Theorem 4.1 *(1)* 次を満たす一意解 $(\widehat{\lambda},\ \{U(n),\ n \in \mathbf{N}\})$ が存在する：

$$\widehat{\lambda} > 0,$$
$$U(n) = \text{esssup}_{t\in C,\ t\geq n} E[Z(t) - \widehat{\lambda}W(t) \mid \mathcal{F}_n],\ n \in \mathbf{N},$$
$$E[U(0)] = 0.$$

(2) さらに，次が満たされると仮定する：

$$n \in \mathbf{N} \text{ が存在して，} P(Z(n) > 0) > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} W(n) = \infty.$$

このとき，最適停止規則 t^* と最適値は次で与えられる：

$$t^* \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} \mid U(n) = Z(n) - \widehat{\lambda}W(n)\} < \infty \ P\text{–}a.e.,$$
$$\frac{E[Z(t^*)]}{E[W(t^*)]} = \widehat{\lambda}.$$

Theorem 4.2 $\varepsilon > 0$ とし，$(\widehat{\lambda},\ \{U(n),\ n \in \mathbf{N}\})$ は定理 *4.1 (1)* で与えられたものとする．このとき，ε-最適停止規則 t_ε^* は次で与えられる：

$$t_\varepsilon^* \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} \mid Z(n) - \widehat{\lambda}W(n) \geq U(n) - \varepsilon K\} < \infty \ P\text{–}a.e.,$$
$$\frac{E[Z(t_\varepsilon^*)]}{E[W(t_\varepsilon^*)]} \geq \sup_{t\in C} \frac{E[Z(t)]}{E[W(t)]} - \varepsilon = \widehat{\lambda} - \varepsilon.$$

5 (P_4) の最適停止

Theorem 5.1 *(1)* 次を満たす一意解 $(\hat{\lambda},\ \{X(m,n), (m,n) \in \mathbf{J}\},\ \{Y(m), m \in \overline{\mathbf{N}}\})$ が存在する：

$$\hat{\lambda} \geq 0,$$
$$X(m,n) = \text{esssup}_{(m,t)\in\overline{T},\ t\geq n} E[Z(m,t) - \hat{\lambda}W(m,t)|\mathcal{F}_{m,n}], \quad (m,n) \in \mathbf{I},$$
$$X(m) = E[X(m, m+1)|\mathcal{F}_m], \quad m \in \mathbf{N},$$
$$Y(m) = \text{esssup}_{s\in\overline{C},\ s\geq m} E[X(s)|\mathcal{F}_m], \quad m \in \mathbf{N},$$
$$E[Y(0)] = 0.$$

但し， $X(m,\infty) \equiv \limsup_{n\to\infty} X(m,n)$， $X(\infty,\infty) \equiv \limsup_{m\to\infty} X(m,\infty)$，
$X(\infty) \equiv \limsup_{m\to\infty} X(m)$， $Y(\infty) \equiv \limsup_{m\to\infty} Y(m)$.

(2) 最適停止規則 (s^*,t^*) と最適値は次で与えられる：

$$s^* \equiv \inf\{m \in \mathbf{N} | X(m) = Y(m)\},\ \inf\emptyset = \infty,$$
$$t^* \equiv \begin{cases} \inf\{n(>m) \mid X(m,n) = Z(m,n) - \hat{\lambda}W(m,n)\} & on\ \ \{s^* = m\} \quad (\inf\emptyset = \infty), \\ \infty \quad on \ \ \{s^* = \infty\}, \end{cases}$$
$$\frac{E[Z(s^*,t^*)]}{E[W(s^*,t^*)]} = \hat{\lambda}.$$

6 (P_3) の最適停止と ε–最適

Theorem 6.1 *(1)* 次を満たす一意解 $(\hat{\lambda},\ \{X(m,n),(m,n) \in \mathbf{I}\},\ \{Y(m),\ m \in \mathbf{N}\})$ が存在する：

$$\hat{\lambda} \geq 0,$$
$$X(m,n) = \mathrm{esssup}_{(m,t)\in T,\ t\geq n} E[Z(m,t) - \hat{\lambda}W(m,t)|\mathcal{F}_{m,n}], \quad (m,n) \in \mathbf{I},$$
$$X(m) = E[X(m,m+1)|\mathcal{F}_m],\ m \in \mathbf{N},$$
$$Y(m) = \mathrm{esssup}_{s\in C,\ s\geq m} E[X(s)|\mathcal{F}_m],\ m \in \mathbf{N},$$
$$E[Y(0)] = 0.$$

(2) さらに，次が満たされると仮定する：

$$(m,n) \in \mathbf{I} \text{ が存在して，} P(Z(m,n) > 0) > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} W(m,n) = \infty,\ m \in \mathbf{N},$$
$$\liminf_{m\to\infty} \inf_{n\in\mathbf{N}} W(m,n) = \infty.$$

このとき，最適停止規則 (s^*,t^*) と最適値は次で与えられる：

$$s^* \equiv \inf\{m \in \mathbf{N} | X(m) = Y(m)\} < \infty \ \ P\text{-}a.e.,$$
$$t^* \equiv \inf\{n(>m) | X(m,n) = Z(m,n) - \hat{\lambda}W(m,n)\} < \infty \ \ P\text{-}a.e. \ on\ \{s^* = m\},$$
$$\frac{E[Z(s^*,t^*)]}{E[W(s^*,t^*)]} = \hat{\lambda} > 0.$$

Theorem 6.2 $\varepsilon > 0$ とし，$(\hat{\lambda},\ \{X(m,n),(m,n) \in \mathbf{I}\},\ \{Y(m),\ m \in \mathbf{N}\})$ は定理 *6.1 (1)* で与えられたものとする．このとき， ε-最適停止規則 $(s^*_\varepsilon, t^*_\varepsilon)$ は次で与えられる：

$$s^*_\varepsilon \equiv \inf\{m \in \mathbf{N} \mid X(m) \geq Y(m) - \frac{\varepsilon K}{2}\} < \infty \ \ P\text{-}a.e.,$$
$$t^*_\varepsilon \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} \mid Z(m,n) - \hat{\lambda}W(m,n) \geq X(m,n) - \frac{\varepsilon K}{2}\} < \infty \ \ P\text{-}a.e.,$$
$$\frac{E[Z(s^*_\varepsilon, t^*_\varepsilon)]}{E[W(s^*_\varepsilon, t^*_\varepsilon)]} \geq \sup_{(s,t)\in T} \frac{E[Z(s,t)]}{E[W(s,t)]} - \varepsilon = \hat{\lambda} - \varepsilon.$$

References

[1] Aggarwal, V., Chandrasekaran, R. and Nair, K.P.K. : Markov ratio decision processes. J. Optim. Theory Appl. 21, 27–37 (1977)

[2] 穴太克則： タイミングの数理. 朝倉書店(2000)

[3] Carmona, R. and Dayanik, S. : Optimal multiple-stopping of linear diffusions. Math. Oper. Res. 33, 446–460 (2008)

[4] Carmona, R. and Touzi, N. : Optimal multiple stopping and valuation of swing options. Mathematical Finance 18, 239-268 (2008)

[5] Chow, Y.S. and Robbins, H. : A martingale system theorem and applications. Proc. Fourth Berkeley Symposium Math. Statist Prob. 1, 93-104 (1961)

[6] Chow, Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D. : Great Expectations : The Theory of Optimal Stopping. Houghton–Mifflin, Boston (1971)

[7] Haggstrom, G.W. : Optimal sequential procedures when more than one stop is required. Ann. Math. Statist. 38, 1618-1626 (1967)

[8] 岩本誠一, 藤田敏治： 分数型評価のマルコフ決定過程. 京都大学数理解析研究所講究録, 1079, 153–163 (1999)

[9] Kosters, H. : A note on multiple stopping rules. Optimization 53, 69-75 (2004)

[10] Morimoto, H. : On average cost stopping time problems. Probab.Theory Relat. Fields 90, 469–490 (1991)

[11] Nikolaev, M.L. and Sofronov, G.Yu. : A multiple optimal stopping rule for sums of independent random variables. Discrete Math. Appl. 17, 463-473 (2007)

[12] Preater, J. : On multiple choice secretary problems. Math. Oper. Res. 19, 597-602 (1994)

[13] Ren, Z. and Krogh, B. : Markov decision processes with fractional costs. IEEE Trans. Autom. Control 50, 646–650 (2005)

[14] Sawasaki, Y., Kimura, Y. and Tanaka, K. : A two–person zero–sum game with fractional loss function. J. Oper. Res. Soc. Japan 43, 209–218 (2000)

[15] Shiryaev, A.N. : Optimal Stopping Rules. Springer (1978)

[16] Stadje, W. : On multiple stopping rules. Optimization 16, 401-418 (1985)

[17] Stancu–Minasian, I.M. : Fractional programming. Kluwer Academic Publishers (1997)