数理解析研究所講究録
第 1804 巻 2012 年 11-20

On the comparison of estimators in a certain curved exponential model

筑波大・数理物質 Kim Hyo Gyeong
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

統計的推定における最小分散推定については，完備十分統計量が存在する場合にはそれに基づく一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量を求めれば良い (Lehmann and Casella[LC98]). また，Cramér-Rao 等の情報不等式による下界を利用して (U)MVU 推定量を求めることもできる．しかし，指数型分布族等の下で完備十分統計量が存在した場合にそれに基づく UMVU 推定量の形を具体的に求めることが容易でないこともある．

本稿においては曲指数型分布族に属する典型的な分布として正規分布 $N(\theta,\theta)(\theta>0)$ を取り上げ，その分布モデルにおいて θ の推定問題を考える．最近，そのモデルにおいて Mukhopadhyay[M06] は θ に対する完備十分統計量と θ の最尤推定量の期待値と平均 2 乗誤差 (MSE) の計算を θ の特別な値について計算ソフト MAPLE によって求めて比較している．本稿においては，それを可能な限り解析的に求めた上で，[M06] の数値結果との比較を行う ([K12])．なお，同様な曲指数型分布モデルにおいて大偏差近似の観点から最尤推定量の大偏差有効性についても論じられている (Akahira[A10]).

2. 正規モデルにおける母数の UMVU 推定

まず，$X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に，いずれも正規分布 $N(\theta,\sigma^2)$ に従う確率変数とする．ただし，θ と σ^2 は未知の母数とする．このとき，$\bar{X}:=(1/n)\sum_{i=1}^n X_i$，$S^2:=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ とおくと，$(\bar{X},S^2)$ は (θ,σ^2) に対する完備十分統計量になる．このとき，$\bar{X}$ は θ の UMVU 推定量で，その分散は $V(\bar{X})=\sigma^2/n$ になるから，σ^2 の UMVU 推定が重要になる．そこで，S^2/σ^2 が自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従うので，それを確率変数 χ^2_{n-1} と表わせば

$$E\left(\frac{S^r}{\sigma^r}\right)=E[\chi^r_{n-1}]=\frac{\Gamma\left(\frac{n+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}2^{r/2}=:K_{n-1,r}$$

になる ([LC98])．ただし，$S=\sqrt{S^2}$ とする．このとき，$n>-r+1$ について，$S^r/K_{n-1,r}$ は σ^r の UMVU 推定量になり，特に $S^2/(n-1)$ は σ^2 の UMVU 推定量になる．また，$\bar{X}$ は θ の UMVU 推定量で $1/(K_{n-1,-1}S)$ は $1/\sigma$ の UMVU 推定量になる．さらに，$\bar{X}$ と S はたがいに独立であるから，$n>2$ のとき $\bar{X}/(K_{n-1,-1}S)$ は θ/σ の不偏推定量になり，従って UMVU 推定量になる ([LC98]).

3. ある曲指数型分布モデルにおける母数の推定量の比較

確率変数 X が正規分布 $N(\theta,\theta)(\theta>0)$ に従うと仮定すると，θ に対する完備十分統計量が $|X|$ になることから，$|X|$ の定数倍の形の θ の MVU 推定量が存在するか否かを考え，また，$|X|$ と θ の最尤推定量 (MLE) の MSE の数値比較が行われている ([M06])．このとき，θ の MLE は

$$\hat{\theta}_{ML}=\sqrt{X^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

になり $|X|$ の関数にはなるが，θ の不偏推定量ではない．そこで，[M06] において $T:=|X|$ の確率密度関数 (p.d.f.) は

$$f_T(t,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}(e^{-t}+e^{t})\exp\left(-\frac{t^2}{2\theta}-\frac{\theta}{2}\right) & (t>0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

になり，T と $\hat{\theta}_{ML}$ の期待値，MSE は

$$E_\theta[T]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\int_0^\infty u(e^{-u}+e^{u})e^{-u^2/(2\theta)}du, \tag{3.1}$$

$$E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\int_0^\infty\left(\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)(e^{-u}+e^{u})e^{-u^2/(2\theta)}du, \tag{3.2}$$

$$MSE_\theta[T]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\int_0^\infty(u-\theta)^2(e^{-u}+e^{u})e^{-u^2/(2\theta)}du, \tag{3.3}$$

$$MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\int_0^\infty\left(\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}-\theta\right)^2(e^{-u}+e^{u})e^{-u^2/(2\theta)}du \tag{3.4}$$

になり，計算ソフト MAPLE を用いて (3.1)〜(3.4) より $\theta^{-1}E_\theta[|X|]$, $MSE_\theta[|X|]$, $\theta^{-1}E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]$, $MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}]$ の数値計算して数表が得られている．

次節において，(3.1)〜(3.4) を解析的に計算し，その上で数値を求めて，[M06] のそれらと比較する．

4. ある曲指数型分布モデルにおける母数の推定量の期待値と MSE

まず，(3.1) と (3.3) の積分を変数変換して解析的に計算すると

$$\begin{aligned}E_\theta[|X|]=&\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\left\{\theta-e^{\theta/2}\theta\sqrt{2\pi\theta}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))+\theta+e^{\theta/2}\theta\sqrt{2\pi\theta}\Phi(\sqrt{\theta})\right\}\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\left\{2\theta+e^{\theta/2}\theta\sqrt{2\pi\theta}(2\Phi(\sqrt{\theta})-1)\right\}\\ =&\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}}e^{-\theta/2}+\theta(2\Phi(\sqrt{\theta})-1),\end{aligned}$$

$$MSE_\theta[|X|]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2}\left\{-3\theta^2+e^{\frac{\theta}{2}}\theta\sqrt{2\pi\theta}(1+4\theta)(1-\Phi(\sqrt{\theta}))-\theta^2+e^{\theta/2}\theta\sqrt{2\pi\theta}\Phi(\sqrt{\theta})\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{4\theta^2}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2} + \theta(1+4\theta)(1-\Phi(\sqrt{\theta})) + \theta\Phi(\sqrt{\theta}) \\
&= \theta + 4\theta^2 - 4\theta^2\Phi(\sqrt{\theta}) - \frac{4\theta^2}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\theta/2} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

になり，

$$
\frac{1}{\theta}E_\theta[|X|] = \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}}e^{-\theta/2} + 2\Phi(\sqrt{\theta}) - 1 \qquad (4.2)
$$

となる．

ここで，まず，[M06] の MAPLE による数値計算結果を待つまでもなく，(4.2) から $E_\theta[|X|]$ は θ の非線形関数であるから $|X|$ の定数倍の形の θ の UMVU 推定量は存在しないことは理論的に明らかである．また，(4.2) と (4.1) から計算した値と [M06] の数値とを比較すると表 4.1 のようになる．両者の数値はほぼ等しいが，(4.2) と (4.1) は解析的に求められているので [M06] より正確な値になっていることに注意．

表 4.1 $|X|$ の平均及び MSE の [M06] との数値比較

	$\theta^{-1}E_\theta[|X|]$		$\mathrm{MSE}_\theta[|X|]$	
θ	(4.2)	[M06]	(4.1)	[M06]
0.001	25.2439	25.244	0.000951512	0.00095151
0.002	17.8591	17.859	0.00186513	0.0018651
0.005	11.312	11.312	0.0044844	0.0044844
0.01	8.01871	8.0187	0.00859626	0.0085963
0.02	5.69822	5.6982	0.0162414	0.016241
0.1	2.64825	2.6482	0.067035	0.067035
0.2	1.95962	1.9596	0.12323	0.12323
0.5	1.39928	1.3993	0.300359	0.30036
0.7	1.26925	1.2692	0.43614	0.43614
0.9	1.19349	1.1935	0.586543	0.58654
1	1.16663	1.1666	0.666738	0.66674
2	1.05025	1.0503	1.59796	1.598
3	1.01952	1.0195	2.6486	2.6486
4	1.00849	1.0085	3.7283	3.7283
5	1.00394	1.0039	4.80287	4.8029
6	1.00191	1.0019	5.686237	5.8624
7	1.00096	1.0010	6.90634	6.9063
8	1.00049	1.0005	7.93741	7.9374
9	1.00025	1.0003	8.95873	8.9587
10	1.00013	1.0001	9.97307	9.9731

次に，(3.2) の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の期待値は

$$
E_\theta[\hat{\theta}_{ML}] = E_\theta\left[\sqrt{X^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{X^2+\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta}}dx - \frac{1}{2} \qquad (4.3)
$$

になり，$Z := (X-\theta)/\sqrt{\theta}$ とおいて (4.3) の積分部分を変形すると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{X^2+\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta}}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{(\sqrt{\theta}z+\theta)^2+\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sqrt{\theta}dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\theta(z+\sqrt{\theta})^2+\frac{1}{4}}\phi(z)dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(1+4\theta(z+\sqrt{\theta})^2)^{\frac{1}{2}}\phi(z)dz \qquad (4.4)\end{aligned}$$

になる．また，$(1+4\theta(z+\sqrt{\theta})^2)^{1/2}$ を z を固定して小さい θ に関して Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}E_\theta[\hat{\theta}_{ML}] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+2\theta^2+4\theta^{3/2}z+2\theta z^2-2\theta^2z^4+R_z(\theta))\phi(z)dz-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+2\theta^2+4\theta^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}z\phi(z)dz+2\theta\int_{-\infty}^{\infty}z^2\phi(z)dz-2\theta^2\int_{-\infty}^{\infty}z^4\phi(z)dz\right)-\frac{1}{2}\\ &\quad +o(\theta^2)\\ &= \frac{1}{2}(1+2\theta-4\theta^2)-\frac{1}{2}+o(\theta^2)\\ &= \theta-2\theta^2+o(\theta^2) \qquad (4.5)\end{aligned}$$

になり，

$$\frac{1}{\theta}E_\theta[\hat{\theta}_{ML}] = 1-2\theta+o(\theta) \qquad (4.6)$$

となる．実際，(4.5) の中の剰余項 $R_z(\theta)$ を具体的に書くと

$$\begin{aligned}R_z(\theta) :=& -\frac{1}{8}(16\theta^4+64\theta^{7/2}z+96\theta^3z^2+64\theta^{5/2}z^3)\\ &+\frac{1}{16}(1+4\theta\gamma(z+\sqrt{\theta})^2)^{-5/2}(4z^2\theta+8z\theta^{3/2}+4\theta^2)^3 \qquad (4.7)\end{aligned}$$

である．ただし，$0<\gamma<1$ とする．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}z^k\phi(z)dz = \begin{cases}0 & (k\ は奇数),\\ \frac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} & (k\ は偶数)\end{cases} \qquad (4.8)$$

であるから，(4.7) の右辺の第 1 項は $o(\theta^2)$ になる．また，(4.7) の右辺の第 2 項に関しては，

$$\bar{R}_z(\theta) := \frac{1}{16}(1+4\theta\gamma(z+\sqrt{\theta})^2)^{-5/2}(4z^2\theta+8z\theta^{3/2}+4\theta^2)^3$$

とおくと，$(1+4\theta\gamma(z+\sqrt{\theta})^2)^{-5/2}\leq 1$ となるから

$$\begin{aligned}|\bar{R}_z(\theta)| &\leq 4|\theta^6+6z\theta^{11/2}+15z^2\theta^5+20z^3\theta^{9/2}+15z^4\theta^4+6z^5\theta^{7/2}+z^6\theta^3|\\ &=: T(z,\theta)\end{aligned}$$

となる．このとき，Schwarz の不等式と (4.8) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(z,\theta)\phi(z)dz \le \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} T(z,\theta)^2\phi(z)dz} = o(\theta^2)$$

になり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_z(\theta)\phi(z)dz = o(\theta^2)$$

となる．

次に，θ が大きい場合には，まず，(4.4), (4.5) から

$$\begin{aligned}
E_\theta[\hat{\theta}_{ML}] + \frac{1}{2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1+4\theta(z+\sqrt{\theta})^2)^{\frac{1}{2}}\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{4\theta^2}\left(1+\frac{2z}{\sqrt{\theta}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^{1/2}\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \theta\left(1+\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^{1/2}\phi(z)dz
\end{aligned}$$

になる．ここで，大きい θ について

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^{1/2} \\
&= 1 + \binom{1/2}{1}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right) + \binom{1/2}{2}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^2 \\
&\quad + \binom{1/2}{3}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^3 + \binom{1/2}{4}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^4 \\
&\quad + \binom{1/2}{5}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^5 + \binom{1/2}{6}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^6 \\
&\quad + \binom{1/2}{7}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^7 + \binom{1/2}{8}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^8 \\
&\quad + \binom{1/2}{9}\left(1+\gamma\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}-9}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^9 \\
&= 1 + \frac{1}{8\theta^2} - \frac{1}{128\theta^4} + z\left(\frac{1}{\theta^{1/2}} - \frac{1}{8\theta^{5/2}}\right) + z^2\left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{16\theta^3} + \frac{3}{16\theta^3}\right) \\
&\quad + z^3\left(-\frac{1}{2\theta^{3/2}} + \frac{1}{2\theta^{3/2}} + \frac{3}{16\theta^{7/2}} - \frac{5}{16\theta^{7/2}}\right) \\
&\quad + z^4\left(-\frac{1}{8\theta^2} + \frac{3}{4\theta^2} + \frac{3}{64\theta^4} - \frac{5}{8\theta^2} - \frac{15}{32\theta^4} + \frac{35}{64\theta^4}\right) + z^5\left(\frac{3}{8\theta^{5/2}} - \frac{5}{4\theta^{5/2}} + \frac{7}{8\theta^{5/2}}\right) \\
&\quad + z^6\left(\frac{1}{16\theta^3} - \frac{5}{16\theta^3} + \frac{35}{16\theta^3} - \frac{21}{16\theta^3}\right) + z^7\left(-\frac{5}{16\theta^{7/2}} + \frac{35}{16\theta^{7/2}} - \frac{63}{16\theta^{7/2}} + \frac{33}{16\theta^{7/2}}\right)
\end{aligned}$$

$$+z^8\left(-\frac{5}{128\theta^4}-\frac{315}{64\theta^4}+\frac{35}{32\theta^4}+\frac{231}{32\theta^4}-\frac{429}{128\theta^4}\right)+R_z^{(1)}(\theta)+R_z^{(2)}(\theta)$$

と展開できる．ただし，$0<\gamma<1$ とする．上記において $R_z^{(1)}(\theta)$ は $(\sum_{k=4}^{18} z^k)o(1/\theta^4)$ の形になり，

$$R_z^{(2)}(\theta):=\binom{1/2}{9}\left(1+\gamma\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)\right)^{-17/2}\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^9$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&\theta\left(1+\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\theta+\frac{1}{8\theta}-\frac{1}{128\theta^3}+z\left(\theta^{1/2}-\frac{1}{8\theta^{3/2}}\right)+z^2\frac{1}{8\theta^2}-z^3\frac{1}{8\theta^{5/2}}+z^4\frac{1}{8\theta^3}+\theta R_z^{(1)}(\theta)+\theta R_z^{(2)}(\theta)\end{aligned}$$

なるので，

$$\begin{aligned}&E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]\\&=-\frac{1}{2}+\theta+\frac{1}{8\theta}-\frac{1}{128\theta^3}+\left(\theta^{1/2}-\frac{1}{8\theta^{3/2}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}z\phi(z)dz+\frac{1}{8\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty}z^2\phi(z)dz\\&-\frac{1}{8\theta^{5/2}}\int_{-\infty}^{\infty}z^3\phi(z)dz+\frac{1}{8\theta^3}\int_{-\infty}^{\infty}z^4\phi(z)dz+\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(1)}(\theta)\phi(z)dz+\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(2)}(\theta)\phi(z)dz\\&=-\frac{1}{2}+\theta+\frac{1}{8\theta}+\frac{1}{8\theta^2}+\frac{47}{128\theta^3}+\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(1)}(\theta)\phi(z)dz+\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(2)}(\theta)\phi(z)dz\end{aligned}$$

となる．上記において剰余項については，(4.8) より

$$\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(1)}(\theta)\phi(z)dz=o\left(\frac{1}{\theta^3}\right)$$

になり，

$$\left(1+\gamma\left(\frac{2z}{\theta^{1/2}}+\frac{z^2}{\theta}+\frac{1}{4\theta^2}\right)\right)^{-\frac{17}{2}}=\left((1-\gamma)+\gamma\left(\frac{z}{\sqrt{\theta}}+1\right)^2+\frac{\gamma}{4\theta^2}\right)^{-\frac{17}{2}}<(1-\gamma)^{-\frac{17}{2}}$$

より

$$\theta\int_{-\infty}^{\infty}R_z^{(2)}(\theta)dz=o\left(\frac{1}{\theta^3}\right)$$

になる．よって，θ が大きいとき $\hat{\theta}_{ML}$ の期待値は

$$E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]=-\frac{1}{2}+\theta+\frac{1}{8\theta}+\frac{1}{8\theta^2}+\frac{47}{128\theta^3}+o\left(\frac{1}{\theta^3}\right)$$

で与えられ，

$$\frac{1}{\theta}E_\theta[\hat{\theta}_{ML}] = -\frac{1}{2\theta} + 1 + \frac{1}{8\theta^2} + \frac{1}{8\theta^3} + \frac{47}{128\theta^4} + o\left(\frac{1}{\theta^4}\right) \tag{4.9}$$

となる．

ここで，(4.6) と (4.9) から計算した値と [M06] の数値とを比較するために $E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]/\theta$ に関する相対誤差を求めると表 4.2 のようになる．このとき，(4.6) と (4.9) の近似値が比較的良いことに注意．

表 4.2 $E_\theta[\hat{\theta}_{ML}]/\theta$ に関する (4.6) と (4.9) の [M06] に対する相対誤差

θ	$\{[M06]-(4.6)\}/[M06]$	θ	$\{[M06]-(4.9)\}/[M06]$
0.001	0.0000200397	10	0.000197858
0.002	0.0000903533	9	0.00037494
0.005	0.000555247	8	0.00069445
0.01	0.00208747	7	0.00130801
0.02	0.00746469	6	0.00254409
0.1	0.109716	5	0.00506201
0.2	0.302309	4	0.010319
0.5	1.0	3	0.0210841
0.7	1.48881	2	0.0337047
0.9	1.97635	1	-0.360764
1	2.21803	0.9	-0.623038

さらに，(3.4) の $\hat{\theta}_{ML}$ の MSE は

$$\begin{aligned}
MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}] &= (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\int_0^\infty \left\{\left(u^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} - \theta\right\}^2 (e^{-u}+e^u)e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du \\
&= (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\int_0^\infty u^2(e^{-u}+e^u)e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du \\
&\quad - (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}2\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\int_0^\infty \sqrt{u^2+\frac{1}{4}}(e^{-u}+e^u)e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du \\
&\quad + (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\theta^2+\theta+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty (e^{-u}+e^u)e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du
\end{aligned} \tag{4.10}$$

になる．このとき，(4.10) の右辺の第 1 項と第 3 項については

$$\begin{aligned}
&(2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\int_0^\infty u^2(e^{-u}+e^u)e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du \\
&= (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\left\{\int_0^\infty u^2e^{-\frac{(u+\theta)^2}{2\theta}}e^{\frac{\theta}{2}}du + \int_0^\infty u^2e^{-\frac{(u-\theta)^2}{2\theta}}e^{\frac{\theta}{2}}du\right\} \\
&= (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_{\sqrt{\theta}}^\infty (\sqrt{\theta}t-\theta)^2e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{\theta}dt + \int_{-\sqrt{\theta}}^\infty (\sqrt{\theta}t+\theta)^2e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{\theta}dt\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\theta\int_{\sqrt{\theta}}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt - 2\theta\sqrt{\theta}\int_{\sqrt{\theta}}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \theta^2\int_{\sqrt{\theta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right.$$
$$\left.+\theta\int_{-\sqrt{\theta}}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + 2\theta\sqrt{\theta}\int_{-\sqrt{\theta}}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \theta^2\int_{-\sqrt{\theta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\theta\left(\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}} + \sqrt{2\pi}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))\right) - 2\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}} + \theta^2\sqrt{2\pi}\left(1-\Phi(\sqrt{\theta})\right)\right.$$
$$\left.+\theta\left(-\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}} + \sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})\right) + 2\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}} + \theta^2\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\theta + \sqrt{2\pi}\theta^2\right) = \theta + \theta^2, \tag{4.11}$$

$$(2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\theta^2+\theta+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty}(e^{-u}+e^{u})e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\theta^2+\theta+\frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\sqrt{\theta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\sqrt{\theta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}$$
$$= \left(\theta^2+\theta+\frac{1}{2}\right)\left(1-\Phi(\sqrt{\theta})+\Phi(\sqrt{\theta})\right) = \theta^2+\theta+\frac{1}{2} \tag{4.12}$$

になる．また，(4.10) の右辺の第２項の積分部分は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\theta}e^{\frac{\theta}{2}}\left\{\int_{\sqrt{\theta}}^{\infty}\left(1+4(\sqrt{\theta}t-\theta)^2\right)^{1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\sqrt{\theta}}^{\infty}\left(1+4(\sqrt{\theta}t+\theta)^2\right)^{1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}$$

と表わせる．ここで，t を固定して小さい θ について $\left(1+4(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2\right)^{1/2}$ を Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}\left(1+4(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2\right)^{1/2} &= 1+\frac{1}{2}\cdot 4(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2 - \frac{1}{8}\cdot 16(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^4 + \frac{1}{16}\cdot 64(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^6\\
&\quad + \binom{1/2}{4}\left(1+4\gamma(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2\right)^{-7/2}4^8(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^8\\
&= 1+2(\theta t^2 \pm 2\theta^{3/2}t+\theta^2) - 2(\theta^2t^4 \pm 4\theta^{5/2}t^3 + 6\theta^3t^2) + 4\theta^3t^6\\
&\quad + R_t^{(1)}(\theta) + R_t^{(2)}(\theta)\\
&= 1+2\theta^2 \pm 4\theta^{3/2}t + (2\theta-12\theta^3)t^2 \mp 8\theta^{5/2}t^3 - 2\theta^2t^4 + 4\theta^3t^6\\
&\quad + R_t^{(1)}(\theta) + R_t^{(2)}(\theta)\end{aligned}$$

となる．ただし，$0<\gamma<1$ とする．上記において $R_t^{(1)}(\theta)$ は $(\sum_{k=0}^{5} t^k)o(\theta^3)$ の形になり，

$$R_t^{(2)}(\theta) := \binom{1/2}{4}\left(1+4\gamma(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2\right)^{-7/2}4^8(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^8$$

とおくと，$\left(1+4\gamma(\sqrt{\theta}t\pm\theta)^2\right)^{-7/2} \le 1$ で，各 $k=1,\cdots,8$ について $\int_{\pm\sqrt{\theta}}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt \le \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt < \infty$ となるから

$$\int_{\pm\sqrt{\theta}}^{\infty}\{R_t^{(1)}(\theta)+R_t^{(2)}(\theta)\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = o(\theta^3)$$

になる．よって，(4.10) の右辺の第２項は

$$
\begin{aligned}
&-(2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{2}}2\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\int_0^\infty\sqrt{u^2+\frac{1}{4}(e^{-u}+e^u)}e^{-\frac{u^2}{2\theta}}du\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\left\{\int_{\sqrt{\theta}}^\infty\left(1+4(\sqrt{\theta}t-\theta)^2\right)^{1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty\left(1+4(\sqrt{\theta}t+\theta)^2\right)^{1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\left\{(1+2\theta^2)\int_{\sqrt{\theta}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt-4\theta^{3/2}\int_{\sqrt{\theta}}^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}dt+(2\theta-12\theta^3)\int_{\sqrt{\theta}}^\infty t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right.\\
&\qquad+8\theta^{5/2}\int_{\sqrt{\theta}}^\infty t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt-2\theta^2\int_{\sqrt{\theta}}^\infty t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt+4\theta^3\int_{\sqrt{\theta}}^\infty t^6e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\
&\qquad+(1+2\theta^2)\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt+4\theta^{3/2}\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}dt+(2\theta-12\theta^3)\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\
&\qquad\left.-8\theta^{5/2}\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt-2\theta^2\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt+4\theta^3\int_{-\sqrt{\theta}}^\infty t^6e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}+o(\theta^3)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\left\{(1+2\theta^2)\sqrt{2\pi}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))-4\theta^{3/2}e^{-\frac{\theta}{2}}+(2\theta-12\theta^3)\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}\right.\\
&\qquad+(2\theta-12\theta^3)\sqrt{2\pi}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))+8\theta^{5/2}(\theta+2)e^{-\frac{\theta}{2}}\\
&\qquad-2\theta^2\left(\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{2\pi}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))\right)\\
&\qquad+4\theta^3\left(\theta^{5/2}e^{-\frac{\theta}{2}}+5\left(\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{2\pi}(1-\Phi(\sqrt{\theta}))\right)\right)\\
&\qquad+(1+2\theta^2)\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})+4\theta^{3/2}e^{-\frac{\theta}{2}}-(2\theta-12\theta^3)\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}\\
&\qquad+(2\theta-12\theta^3)\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})-8\theta^{5/2}(\theta+2)e^{-\frac{\theta}{2}}\\
&\qquad-2\theta^2\left(-\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}-3\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})\right)\\
&\qquad\left.+4\theta^3\left(-\theta^{5/2}e^{-\frac{\theta}{2}}+5\left(-\theta\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}-3\sqrt{\theta}e^{-\frac{\theta}{2}}+3\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{\theta})\right)\right)\right\}+o(\theta^3)\\
&=-\left(\frac{1}{2}+\theta\right)(1+2\theta-4\theta^2+48\theta^3)+o(\theta^3)\\
&=-\frac{1}{2}-2\theta-20\theta^3+o(\theta^3)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

になる．ゆえに，(4.11), (4.12), (4.13) より，θ が小さいとき

$$
\begin{aligned}
MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}]&=(\theta+\theta^2)+\left(\theta^2+\theta+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-2\theta-20\theta^3\right)+o(\theta^3)\\
&=2\theta^2-20\theta^3+o(\theta^3)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

になる．

ここで，(4.14) から計算した値と [M06] の数値とを比較するために $MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}]$ に関する相対誤差を求めると表 4.3 のようになる．このとき，(4.14) の近似値が比較的良いことに注意．

表 **4.3** $MSE_\theta[\hat{\theta}_{ML}]$ に関する (4.14) の [M06] に対する相対誤差

θ	$\{[M06]-(4.14)\}/[M06]$
0.001	0.000201979
0.002	0.000764721
0.005	0.00450592
0.01	0.0169306
0.02	0.0613083
0.1	1.0
0.2	3.04056

5. おわりに

本稿において，曲指数型分布モデルの典型として正規分布 $N(\theta,\theta)(\theta>0)$ の場合を考え，θ の対する完備十分統計量と最尤推定量の期待値と MSE をある程度まで解析的に計算できることを示し，[M06] の計算ソフト MAPLE による数値計算結果とも比較した．今後，もっと一般の曲指数型分布族への拡張が課題となるが，推定量の期待値や MSE の計算はそれほど容易ではないと思われる．

参考文献

[A10] Akahira, M.(2010). The first- and second-order large-deviation efficiency for an exponential family and certain curved exponential models. *Commun. Statist.-Theory and Math.*, **39**, 1387–1403.

[K12] Kim, H. G.(2012). Minimum Variance Unbiased Estimation and Loss of Information. Ph.D. Thesis, Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G.(1998). *Theory of Point Estimation.* 2nd ed., Springer, New York.

[M06] Mukhopadhyay, N.(2006). MVUE for the mean with one observation: Normal with same mean and variance. *American Statistician* **60**, 71–74.