

# Zeros of multiple zeta-functions

Takashi Nakamura

Department of Mathematics Faculty of Science and Technology  
Tokyo University of Science

Łukasz Pańkowski

Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University

## 概要

ここでは Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数の零に関する我々の論文 [14] について解説する。論文 [14] では、概均質ベクトル空間の zeta 関数、スペクトル zeta 関数の特別な場合などの、種々の zeta 関数の零に関する結果も得られているが、それらはここでは省略する。

§1 で Riemann zeta 関数、Hurwitz zeta 関数、Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数の定義と性質について簡単にまとめる。§2 では zeta 関数の普遍性定理と混合普遍性定理を導入した後、主定理を述べる。§3 では主定理から Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数の零に関する結果を得る。さらに関連する話題についても紹介する。

## 1 Zeta 関数

このセクションでは、まず Riemann zeta 関数について述べる。次にその一般化である、Hurwitz zeta 関数と Hurwitz 型 Euler-Zagier zeta 関数について簡単にまとめる。詳しい内容は、[1], [9], [10]などを参照して頂きたい。

### 1.1 Riemann zeta 関数

Riemann zeta 関数は次のように定義される。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \sigma := \Re(s) > 1. \quad (1.1)$$

Euler 積表示から、Riemann zeta 関数は  $\sigma > 1$  で零点を持たないことがわかる。級数表示により、 $\sigma > 1$  において

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

が成り立つ。一方、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$  は  $\Re(s) > 0$  で広義一様収束している。よって Riemann zeta 関数は  $\Re(s) > 0$  の範囲の有理型関数に解析接続される。さらに関数等式

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s) \cos(\pi s/2)}{(2\pi)^s} \zeta(s)$$

により,  $\zeta(s)$  は全  $s$  平面の有理型関数に解析接続される.  $\sigma < 0$  では上の関数等式により  $\cos(\pi s/2) = 0$  で  $\zeta(1-s) = 0$ . よって  $s = -2, -4, -6, \dots$  で  $\zeta(s) = 0$  となる. これらは自明な零点と呼ばれている.  $s = 0$  では  $\cos$  の零点と Riemann zeta 関数の極が打ち消しあって,  $\zeta(s) \neq 0$  となる. さらに, Euler 積表示から,  $\zeta(s)$  は  $\sigma > 1$  で零点を持たず, 上記の関数等式から  $\sigma < 0$  では自明な零点以外に零点を持たないことがわかる. 残された帯領域  $0 \leq \sigma \leq 1$  については, 1859 年に Riemann により提出された次の予想がある.

**Riemann 予想**  $0 < \sigma < 1$  における  $\zeta(s)$  の零点は全て  $\sigma = 1/2$  上にある.

1896 年に Hadamard と de la vallée Poussin が独立に,  $\zeta(1+it) \neq 0, t \neq 0$  を証明した. Riemann 予想については非常に多くの研究がなされ, 整数論の中心的問題の一つである. ここでは, Riemann 予想の帰結である 1890 年に提唱された次の予想について述べることにだけに留める.

**Lindelöf 予想** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\zeta(1/2+it) = O(|t|^\varepsilon), t \geq 2$ .

この予想を仮定すれば, 凸性原理から, 任意の  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  に対して,  $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^\varepsilon), t \geq 2$  が導かれる. この評価は次の命題と同値であることが知られている.

任意の  $T \geq 2$  と任意の自然数  $k$  に対して次が成り立つ:

$$\int_2^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt = O(T^{1+\varepsilon}).$$

この Riemann zeta 関数の平均値についても様々な研究がなされている. その一例として,  $k=1$  である場合について, 1949 年に Atkinson は  $u$  と  $v$  を独立な複素変数として

$$\zeta(u)\zeta(v) = \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^u n^v} + \sum_{n>m>0} \frac{1}{m^u n^v} + \zeta(u+v), \quad \Re u > 1, \quad \Re v > 1$$

を用いて研究した. 上式の右辺第 1 項又は第 2 項が Euler-Zagier 2 重 zeta 関数と呼ばれているものである.

## 1.2 Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数

Riemann zeta 関数の拡張である, Hurwitz zeta 関数は以下の級数で定義される.

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \quad \Re(s) > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

明らかに  $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$  であり,  $\zeta(s, 1/2) = (2^s - 1)\zeta(s)$  であるので, 本質的に Riemann zeta 関数である. Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  も全  $s$  平面の有理型関数に解析接続され, さらに関数等式を持つことが知られている.

Riemann zeta 関数とは異なり,  $\alpha \neq 1, 1/2$  であるとき,  $1 < \sigma < 1 + \alpha$ ,  $0 < t < T$  における Hurwitz zeta 関数の零点の個数は  $cT$  超であることが,  $\alpha \neq 1/2, 1$  が超越数または有理数である場合は 1936 年に Davenport と Heilbronn により,  $\alpha$  が代数的無理数である場合は 1961 年に Cassels により示されている. よってこれらの場合 Hurwitz zeta 関数は Euler 積表示を持たない.  $1/2 < \sigma < 1$  における  $\zeta(s, \alpha)$  の零点については後で述べる.

Hurwitz zeta 関数と先のセクションの最後で導入された Euler-Zagier 2 重 zeta 関数の拡張である, Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数を以下で定義する.

$$\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)}) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r \geq 0} \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{s_1} (n_2 + \alpha_2)^{s_2} \dots (n_r + \alpha_r)^{s_r}}.$$

この級数は領域  $\Re(s_1) > 1$  かつ  $\Re(s_j) \geq 1$ ,  $2 \leq j \leq r$  で絶対収束し, 全  $\mathbb{C}^r$  平面に有理型に解析接続される.  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 1$  であるとき上の関数を Euler-Zagier 多重 zeta 関数と呼び, さらに  $s_1, \dots, s_r$  が自然数であるときは多重 zeta 値と呼ばれるものであり, 多くの数学者によって研究されている. 多重 zeta 関数の解析接続についても同様である. 1775 年に Euler が既に  $r = 2$  かつ  $s_1$  と  $s_2$  が自然数である場合を考察していたことを注意しておく. ここでは Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数の解析接続として次の定理を補題として挙げておく.

**Lemma 1.1** (Akiyama and Ishikawa [2]).  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)})$  は  $s_1 = 1$ ,  $\sum_{j=1}^k s_j \in \mathbb{Z}_{\geq k}$ ,  $k = 2, 3, \dots, r$  上に限り, *possible singularities* を持つ.

絶対収束域における  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)})$  の零については,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  が代数的独立ならば,  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)})$  は  $\Re(s_1) > 1$ ,  $\Re(s_j) \geq 1$ ,  $2 \leq j \leq r$  で無限個の零を持つことが知られている. これは [11, Proposition 3.2] で証明されていることであるが, その証明を見れば,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  に関する仮定はいくら弱められることがすぐにわかる.

## 2 普遍性定理と zeta 関数の零点

このセクションでは, まず zeta 関数の普遍性について記述し, Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  の  $1/2 < \sigma < 1$  における零点分布についてまとめる. 次に混合普遍性とその帰結について述べる. 最後に主定理を紹介する. この主定理により多重 zeta 関数だけでなく, 概均質ベクトル空間の zeta 関数, スペクトル zeta 関数, Barnes zeta 関数などの特別な場合など零に関する結果も得られるが, それらはここでは省略する. 普遍性定理の歴史, 証明, 一般化等については [6], [8], [18]などを参照して頂きたい.

### 2.1 Riemann zeta 関数, Hurwitz zeta 関数の普遍性

普遍性について記述するために, まず記号を用意する.  $\text{meas}(A)$  で集合  $A$  の Lebesgue 測度とし,  $\nu_T\{\dots\} := T^{-1}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : \dots\}$ ,  $\dots$  の部分には  $\tau$  が充たす条件が書かれる.

$K$  と  $K_1, \dots, K_m$  を  $D$  に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする .

Theorem A (Voronin).  $f(s)$  を  $K$  上で連続で零点を持たず ,  $K$  の内部で正則な関数とする . このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して ,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left\{ \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

この定理は普遍性定理 ( universality theorem ) と呼ばれるものであり , おおまかに言えば , 零点を持たない任意の正則関数は Riemann zeta 関数  $\zeta(s)$  の平行移動により一様に近似でき , しかも近似できる  $\tau$  の密度は正であることを意味する . Riemann zeta 関数の普遍性定理は Voronin により 1975 年に証明された .

次の定理は同時普遍性定理 ( joint universality theorem ) と呼ばれるものである . 1977 年に Voronin により , 1979 年に Gonek , 1981 年に Bagchi により独立に証明された . これらはいずれも学位論文として公表された .

Theorem B (Bagchi, Gonek, Voronin, independently).  $f_l(s)$  を  $K_l$  上で連続で零点を持たず ,  $K_l$  の内部で正則な関数とする .  $\chi_1, \dots, \chi_m$  を互いに非同値な Dirichlet 指標とする . このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して ,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left\{ \max_{1 \leq l \leq m} \max_{s \in K_l} |L(s + i\tau, \chi_l) - f_l(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

この定理は , 零点を持たない任意の正則関数の組は , 非同値な Dirichlet  $L$  関数  $L(s, \chi)$  の平行移動により一様に近似でき , 近似できる  $\tau$  の密度は正であることを意味する .

Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  の普遍性定理については次のものがある . Hurwitz zeta 関数はオイラー積を持たないこと , 近似される関数に零点を持たないという仮定が必要ないことを注意しておく . このような場合を強普遍性を持つということにする .

Theorem C (Bagchi, Gonek, independently).  $\alpha$  を超越数とする .  $f(s)$  を  $K$  上で連続で  $K$  の内部で正則な関数とする . このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して ,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left\{ \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

$1/2 \neq \alpha$  が有理数である場合の強普遍性は , 余計な因子が付いたものは定理 B から導かれるものであり , それを取り除かれたものは Sander と Steuding [17] により証明されている . 現在では数多くの zeta 関数が普遍性を持つことが証明されている .

Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  の強普遍性定理から , 次の  $\zeta(s, \alpha)$  の  $1/2 < \sigma < 1$  における零点分布が証明される .  $\alpha \neq 1/2$  が有理数である場合は , 1977 年に Voronin により ,  $\alpha$  が超越数である場合は , 1979 年に Gonek , 1981 年に Bagchi により独立に証明された .

Theorem D (Bagchi, Gonek, Voronin, independently).  $\alpha \neq 1/2, 1$  が超越数または有理数とする .  $1/2 < \sigma < 1$  ,  $0 < t < T$  における Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  の零点の個数は  $cT$  超である .

## 2.2 Hybrid universality

このサブセクションではまず hybrid universality について述べる．これは適当な日本語訳がないので混合普遍性と仮に訳しておく． $\|x\|$  で実数  $x$  と整数の距離で最小のものとする． $H(K)$  を  $K$  上で連続で零点を持たず  $K$  の内部で正則な関数全体とする．さらに  $H_0(K)$  を  $K$  上で連続で  $K$  の内部で正則な関数全体とする．

**Definition 2.1.**  $L$  関数の集合  $L_1, \dots, L_m$  が hybrid joint universality を持つとは，以下の性質を充たすことである． $f_l(s) \in H(K_l)$ ， $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq n}$  を  $\mathbb{Q}$  上一次独立な実数とし， $\{\theta_j\}_{1 \leq j \leq n}$  を実数とする．このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left\{ \max_{1 \leq l \leq m} \max_{s \in K_l} |L_l(s + i\tau) - f_l(s)| < \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} \|\tau \alpha_j - \theta_j\| < \varepsilon \right\} > 0.$$

これは前半部分が同時普遍性定理で，後半部分が Kronecker の近似定理である． $L$  関数の集合  $L_1, \dots, L_m$  が hybrid joint strong universality を持つ場合とは，上の定義において  $H(K_l)$  を  $H_0(K_l)$  に換えればよい．歴史について簡単に触れる．この形の定理を初めに示したのは Gonek [3] である．その後 Kaczorowski と Kulas [5] により改良され，Pańkowski [15, 16] が最も一般的な形で述べている．

この hybrid joint universality から次の定理が導かれる．一般 Dirichlet 級数を絶対収束する領域で  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ ， $a_n \in \mathbb{C}$ ， $\lambda_n > 0$  で定義する． $\mathcal{D}_\sigma$  を  $\sigma > 1/2$  で絶対収束する一般 Dirichlet 級数の成す環とする．

**Theorem 2.2.**  $L_1, \dots, L_m$  が hybrid joint universality を持ち， $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{D}_\sigma$  とする． $F: H(K)^{m+n} \rightarrow H(K)$  を任意の連続関数， $f_l(s) \in H(K)$  とし， $g(s) := F(f_1(s), \dots, f_m(s), Q_1(s), \dots, Q_n(s))$  とする．このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left\{ \max_{s \in K} |F(L_1(s + i\tau), \dots, L_m(s + i\tau), Q_1(s + i\tau), \dots, Q_n(s + i\tau)) - g(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

$L$  関数の集合  $L_1, \dots, L_m$  が hybrid joint strong universality を持つ場合は，上の定理において  $H(K)$  を  $H_0(K)$  に換えればよい．上記の定理において  $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{D}_\sigma$  がない場合は [7] で扱われている．この定理の証明などは，我々の論文 [12, 13] を参照して頂きたい．

## 2.3 主定理

以下に主定理を述べる． $\mathcal{D}_\sigma[X]$  を  $\mathcal{D}_\sigma$  を係数とする多項式環とする．

**Main Theorem 1.** 関数  $L(s)$  は hybrid universality を持ち， $P_s \in \mathcal{D}_\sigma[X]$  は単項式でない最高次数が 1 以上の多項式とする．このとき， $P_s(L(s))$  は  $D$  内に無限個の零点を持つ．正確には，任意の  $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  に対し，関数  $P_s(L(s))$  は長方領域  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ， $0 < t < T$ ，ただし  $T > 0$  は充分大，内に  $cT$  超個の零点を持つ．さらに，関数  $L(s)$  が strong hybrid universality を持つ場合は，単項式でないという仮定を外すことができる．

定理において,  $\zeta(s) + \zeta(2s)$  や  $\zeta^2(s) - \zeta(s)$  などは仮定の条件を充たしているが,  $\zeta(2s)\zeta(s)$  などは除外される. この定理において, 関数  $L(s)$  が strong hybrid universality を持ち,  $P_s$  が単項式である場合が Theorem D である. 繰り返しになるが, この定理から概均質ベクトル空間の zeta 関数, スペクトル zeta 関数の特別な場合など零点分布もわかることを注意しておく. 詳しい証明は [14] に譲るが, Theorem 2.2 において, 連続関数  $F$  を多項式にしたもの, 代数学の基本定理, ルーシェの定理などが用いられる.

次の定理は零点の個数の上からの評価である. 証明は関数論で良く知られたリトルウッドの補題などを用いる. 詳細は [14] を参照して頂きたい. 定理に種々の仮定を必要とするが, 関数  $L(s)$  が hybrid universality を持つ場合は, それらを充たす場合が殆どである.

**Main Theorem 2.** 関数  $L(s)$  を  $\sigma > 1$  で絶対収束する一般 Dirichlet 級数で,  $\sigma > 1/2$  に有理型に解析接続され, 有限個の極を持ち, それらは全て  $\sigma = 1$  上にあるとする. さらに関数  $L(s)$  のオーダーは有限で, 任意の  $1/2 < \sigma < 1$  に対し,  $\int_2^T |L(\sigma + it)|^2 dt = O(T)$ ,  $T \geq 2$  と仮定する. このとき, 任意の  $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  に対し, 関数  $P_s(L(s))$  は長方領域  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ,  $0 < t < T$ , ただし  $T > 0$  は充分大, 内に  $CT$  個以下の零点を重複度も込めて持つ.

### 3 Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数の零

この章では先の定理を利用して, 多重 zeta 関数の零点分布に関する結果を導く. Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重 zeta 関数は, Main Theorem 1 において  $P_s \in \mathcal{D}_s[X]$  の最高次数が 1 より大である, 現在知られているもので唯一の例であることを注意したい, 他の例である, 概均質ベクトル空間の zeta 関数, スペクトル zeta 関数の特別な場合などは全て最高次数が 1 である.

#### 3.1 一変数関数とした場合

$\bar{\zeta}_r(s; \alpha)$  を  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)})$  において  $s := s_1 = \dots = s_r$ ,  $\alpha := \alpha_1 = \dots = \alpha_r$  としたものとする. Hoffman の論文 [4] に基づき, 次の記号を用意する.  $\Sigma_r$  を  $r$  次対称群,  $\Pi_r$  を  $\{1, 2, \dots, r\}$  の分割とし,  $\Pi = \{P_1, \dots, P_l\}$ ,

$$c(\Pi_r) = \prod_{j=1}^l (|P_j| - 1)! \quad \text{and} \quad \zeta(s_{(1, \dots, r)}; \alpha, \Pi_r) = \prod_{j=1}^l \zeta\left(\sum_{k \in P_j} s_k, \alpha\right),$$

と書く. [4, Theorem 2.1] と同様な議論により次の補題を得る.

**Lemma 3.1.** 特異点を除き,

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_r} \zeta(s_{\sigma(1)}, s_{(\sigma(2), \dots, \sigma(r))}; \alpha_0, \alpha_{(0, \dots, 0)}) = \sum_{\Pi_r} c(\Pi_r) \zeta(s_{(1, 2, \dots, r)}; \alpha_0, \Pi).$$

この補題から，ある多項式  $P_r \in \mathcal{D}_s[X]$  が存在し， $\bar{\zeta}_r(s; \alpha) = P_r(\zeta(s, \alpha))$  が成立することがわかる．具体例を挙げると以下ようになる．

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_2(s; \alpha) &= \frac{1}{2}\zeta(s, \alpha)^2 - \frac{1}{2}\zeta(2s, \alpha) \\ \bar{\zeta}_3(s; \alpha) &= \frac{1}{6}\zeta(s, \alpha)^3 - \frac{1}{2}\zeta(s, \alpha)\zeta(2s, \alpha) + \frac{1}{3}\zeta(3s, \alpha).\end{aligned}$$

Hurwitz zeta 関数  $\zeta(s, \alpha)$  が  $\alpha$  が有理数又は超越数であるとき hybrid universality を持つこと，Main Theorem 1, 2 と上の補題により次の定理と系を得る．

**Theorem 3.2.**  $\alpha$  が有理数又は超越数であるとき  $\bar{\zeta}_r(s; \alpha)$  は，任意の  $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  に対し，長方領域  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ,  $0 < t < T$ ，ただし  $T > 0$  は充分大，内に  $cT$  超個かつ  $CT$  個以下の零点を重複度も込めて持つ．

**Corollary 3.3.**  $\alpha_0$  が有理数又は超越数であるとき  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_0, \alpha_{(0, \dots, 0)})$  は， $1/2 < \Re(s_j) < 1$ ,  $j = 1, \dots, r$  において零を持つ．

ここでいくつかの注意を述べておく．Zhao [19] は  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 1$  であるとき，負の整数点において  $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_1, \alpha_{(2, \dots, r)}) = 0$  なる例を示し，負の整数点でない零の存在を未解決問題として提出した．Zhao による零点は自明な零点とは言い難いので実零点と呼ぶことにし，Theorem 3.2 から存在が保証される零点を複素零点と呼ぶことにする．Corollary 3.3 において， $\zeta_r(s_1, s_{(2, \dots, r)}; \alpha_0, \alpha_{(0, \dots, 0)})$  は多変数関数なので零点になるとは限らないので，単に零と書いた．

次に  $r \geq 2$  として，Euler-Zagier 多重 zeta 関数  $\bar{\zeta}_r(s; 1)$  に対する Lindelöf 予想を，任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，

$$\bar{\zeta}_r(1/2 + it; 1) = O(|t|^\varepsilon), \quad t \geq 2$$

によって定義する．詳細は省略するが，任意の  $r \geq 2$  に対する Euler-Zagier 多重 zeta 関数  $\bar{\zeta}_r(s; 1)$  に対する Lindelöf 予想と，Riemann zeta 関数に対する Lindelöf 予想が同値であることが，Lemma 3.1 により証明される．よって Euler-Zagier 多重 zeta 関数  $\bar{\zeta}_r(s; 1)$  は Lindelöf 予想を充たすと予想されるが，実部が  $1/2$  より大である複素零点を持つ (Riemann 予想の類似を満足しない) zeta 関数である．

### 3.2 変数を固定した場合

次の定理において  $\alpha_1$  が超越数である場合は，[11] において下からの評価が示されている．

**Theorem 3.4.**  $0 < \alpha_1 < 1$  は代数的無理数でないとする． $(\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in (0, 1]^{r-1}$ ,  $\Re(s_2) > 3/2$ ,  $\Re(s_j) \geq 1$ ,  $3 \leq j \leq r$  なる  $(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$  を固定したとき， $r - 1$  重 Hurwitz 型 Euler-Zagier zeta 関数に対して  $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3, \dots, r)}; \alpha_2, \alpha_{(2, \dots, r)}) \neq 0$  と仮定する．このとき  $r$  重

Hurwitz 型 Euler-Zagier zeta 関数  $\zeta_r(s_1, s(2, \dots, r); \alpha_1, \alpha(2, \dots, r))$  は, 任意の  $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  に対し, 長方領域  $\sigma_1 < \Re s_1 < \sigma_2, 0 < t < T$ , ただし  $T > 0$  は充分大, 内に  $cT$  超個かつ  $CT$  個以下の零点を重複度も込めて持つ.

Main Theorem 1 において最高次数を 1 とするため,  $r - 1$  重 Hurwitz 型 Euler-Zagier zeta 関数が  $\zeta_{r-1}(s_2, s(3, \dots, r); \alpha_2, \alpha(2, \dots, r)) \neq 0$  という仮定が必要になる. 前のサブセクションと同様に,  $\alpha_1 = 1$  である場合は  $\zeta_r(s_1, s(2, \dots, r); 1, \alpha(2, \dots, r))$  に対する Lindelöf 予想が定義でき, Riemann zeta 関数に対する Lindelöf 予想と同値になる.

以下に証明の概略を書く.  $\Re(s_j) > 1, 1 \leq j \leq r$  とする. 調和積公式により

$$\begin{aligned} & \zeta(s_1; \alpha_1) \zeta_{r-1}(s_2, s(3, \dots, r); \alpha_2, \alpha(3, \dots, r)) \\ &= \sum_{n_1 \geq 0, n_2 > \dots > n_r \geq 0} \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{s_1} (n_2 + \alpha_2)^{s_2} \dots (n_r + \alpha_r)^{s_r}} \\ &= \left( \sum_{n_1 > \dots > n_r \geq 0} + \sum^* \right) \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{s_1} \dots (n_r + \alpha_r)^{s_r}}. \end{aligned}$$

を得る. ただし和  $\sum^*$  は以下の条件を充たす.

$$n_2 \geq n_1 > n_3 > \dots > n_r \geq 0, \quad \dots, \quad n_2 > n_3 > \dots > n_r \geq n_1 \geq 0.$$

$\Re(s_j) > 1, 1 \leq j \leq r$  において

$$\zeta_r^*(s_1, s(2, \dots, r); \alpha_1, \alpha(2, \dots, r)) := \sum^* \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{s_1} \dots (n_r + \alpha_r)^{s_r}},$$

と定義し, 領域  $Z$  を  $1 - \delta < \Re(s_1) < 1, \Re(s_2) > 1 + \delta, \Re(s_j) \geq 1, 3 \leq j \leq r$  と定義する. 領域  $Z$  において  $\zeta_r^*(s_1, s(2, \dots, r); \alpha_1, \alpha(2, \dots, r))$  は  $Z$  で絶対収束する. よって以下の等式を得る.

$$\begin{aligned} & \zeta(s_1; \alpha_1) \zeta_{r-1}(s_2, s(3, \dots, r); \alpha_2, \alpha(3, \dots, r)) = \\ & \zeta_r(s_1, s(2, \dots, r); \alpha_1, \alpha(2, \dots, r)) + \zeta_r^*(s_1, s(2, \dots, r); \alpha_1, \alpha(2, \dots, r)), \quad (s_1, \dots, s_r) \in Z. \end{aligned} \quad (3.1)$$

したがって Main Theorem 1 と 2 が適用できる.

## 参考文献

- [1] 荒川恒男, 金子昌信 著, 多重ゼータ値入門, COE Lecture Note Vol. 23 : Kyushu University.
- [2] S. Akiyama and H. Ishikawa, *On analytic continuation of multiple LL-functions and related zeta-functions*, Analytic number theory (Beijing/Kyoto, 1999), 1–16, Dev. Math., 6, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [3] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-functions*, Ph.D. Thesis, Universality of Michigan (1979).



- [4] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*. Pacific J. Math. **152** (1992), no. 2, 275–290.
- [5] J. Kaczorowski and M. Kulas, *On the non-trivial zeros off line for  $L$ -functions from extended Selberg class*, Monatshefte Math. **150** (2007), 217–232.
- [6] Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-function*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [7] A. Laurinćikas, *Universality of the Riemann zeta-function*, J. Number Theory **130** (2010), 2323–2331
- [8] K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions,' *Sugaku* 53 (2001), 279–296 (in Japanese); English Transl.: *Sugaku Expositions* 17 (2004), 51–71.
- [9] 松本耕二 著, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.
- [10] K. Matsumoto, *Analytic theory of multiple zeta-functions and its applications*. (in Japanese) *Sūgaku* 59 (2007), no. 1, 24–45.
- [11] T. Nakamura, *Zeros and the universality for the Euler-Zagier Hurwitz type of multiple zeta-functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 691–700.
- [12] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *On universality for linear combinations of  $L$ -functions*, Monatshefte fuer Mathematik. **165** (2012), no. 3, 433–446.
- [13] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *Applications of hybrid universality to multivariable zeta-functions*, J. Number Theory, **131** (2011), no. 11, 2151–2161.
- [14] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *Zeros of multiple zeta-functions*, preprint.
- [15] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for the Dirichlet  $L$ -functions*, Acta Arith. **141** (2010) no. 1, 59–72.
- [16] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for  $L$ -functions without the Euler product*, submitted.
- [17] J. Sander and J. Steuding, *Joint universality for sums and products of Dirichlet  $L$ -functions*, Analysis **26** (2006), 295–312.
- [18] J. Steuding, *Value Distributions of  $L$ -functions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.
- [19] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 5, 1275–1283.